

FEYNMANOVY

PŘEDNÁŠKY Z FYZIKY

s řešenými příklady

2/3

FEYNMAN • LEIGHTON • SANDS

FRAGMENT

FEYNMANOVY PŘEDNÁŠKY Z FYZIKY

FRAG
MENT

PRAHA 2001

**Richard P. Feynman
Robert B. Leighton
Matthew Sands**

**FEYNMANOVY
přednášky z fyziky
s řešenými příklady**

Obálka a grafická úptava: Marek Jodas
Odborná korektura: Doc. Ing. Ivan Štoll, CSc.
Řešení příkladů a cvičení: Doc. Ing. Ivan Štoll, CSc.
Vydalo nakladatelství FRAGMENT,
Humpolecká 1503, Havlíčkův Brod
jako svou 480. publikaci
Vytiskla CENTA spol. s r.o.
1. vydání, 2001

Copyright © California Institute of Technology, USA, 1964
© nakladatelství FRAGMENT, 2001
© Marek Jodas, 2001
© Ivan Štoll, 2001

Published by arrangement with Addison Wesley Longman, Inc.

All rights reserved. This book, or parts thereof may not be reproduced in any form without written permission of the copyright holder.

Všechna práva vyhrazena. Žádná část této knihy nesmí být reprodukována a rozšiřována žádnou formou bez písemného souhlasu majitelů práv.

ISBN 80-7200-420-4 (česká verze, 1. vydání, 2001)
ISBN 0-201-02117-X-P (anglická verze, 6. vydání, 1977)

FEYNMANOVY

PŘEDNÁŠKY Z FYZIKY

s řešenými příklady

2/3

FEYNMAN • LEIGHTON • SANDS

FRAG
MENT



Richard P. Feynman soustředil po dobu zhruba čtyřiceti let svou zvědavost na tajemné mechanismy fyzikálního světa a svůj intelekt zaměřoval na objevení pořádku v chaosu. Teď dva roky věnoval své schopnosti a svou energii Přednáškám z fyziky pro začínající studenty. Ze svých vědomostí pro ně vybral to podstatné a v pojmech, o nichž lze předpokládat, že je studenti pochopí, vytvořil obraz fyzikova světa. Do přednášek vložil důvtip a jasnost svého myšlení, originalitu a vitalitu svého přístupu a nakažlivý entuziasmus svého podání. Bylo zážitkem být při tom.

Přednášky konané v prvním roce tvořily základ prvního dílu této série knih. V tomto druhém dílu jsme se pokusili udělat určitý záznam části přednášek konaných v druhém roce pro posluchače druhého ročníku akademického roku 1962/63. Zbytek přednášek druhého roku tvoří třetí díl.

Z přednášek druhého roku byly první dvě třetiny věnovány téměř úplnému shrnutí fyziky elektrických a magnetických jevů. Předkládáme ho zde ze dvou důvodů. Za prvé, chtěli jsme studentům poskytnout úplný obraz jedné z velkých kapitol fyziky – od prvních Franklinových tápání přes velkou Maxwellovu syntézu až po Lorentzovu elektronovou teorii vlastností látek, končící dosud nerozřešenými dilematy vlastní elektromagnetické energie. Za druhé, zavedením vektorové analýzy na začátku jsme chtěli poskytnout solidní úvod do matematiky teorií polí. Abychom podtrhli obecnou užitečnost matematických metod, rozebírala se občas příbuzná témata z jiných částí fyziky spolu s jejich elektrickými analogiemi. Neustále jsme se přitom snažili zdomácnit princip obecnosti matematiky. („Stejně rovnice mají stejná řešení.“) Zdůrazňovali jsme to rozmanitými cvičeními a příklady, které jsme zahrnuli do tohoto kurzu.

Po elektromagnetismu následují dva páry kapitol věnované jeden pružnosti a druhý proudění tekutin. V první kapitole každého páru se probírají elementární a praktické aspekty. V druhých kapitolách obou párů se pokoušíme ukázat obzor celé složité oblasti jevů, do které může dané téma vyústit. Tyto čtyři kapitoly je možné bez vážné újmy i vynechat, neboť nejsou nevyhnutelnou přípravou na třetí díl.

Přibližně poslední čtvrtina druhého roku byla věnována úvodu do kvantové mechaniky: Tato látka tvoří obsah třetího dílu.

Při sepisování Feynmanových přednášek jsme chtěli udělat víc než jen poskytnout zápis toho, co na nich bylo řečeno. Chtěli jsme dosáhnout toho, aby písemná verze byla co nejjasnějším výkladem myšlenek, na kterých se původně přednášky zakládaly. V případě některých přednášek stačily pouze drobné úpravy stylizace originálního zápisu. Jiné přednášky si vyžádaly podstatné přepracování a nové uspořádání materiálu. Tu a tam jsme cítili, že musíme ještě něco přidat, abychom zvětšili jasnost a vyrovnanost výkladu. Po celou dobu této práce jsme využívali neustálé pomoci a rady profesora Feynmana.

Přepis více než miliónu vyřčených slov do souvislého textu v krátkém termínu představuje obrovský úkol, zvláště je-li provázen dalšími povinnostmi spojenými se zavedením nové přednášky – přípravou seminářů a konzultací, návrhem cvičení a zkoušek, jejich známkování atd. Podílelo se na něm mnoho rukou a hlav. V některých případech se nám, jak věřím, podařilo předložit věrný obraz, nebo jen mírně retušovaný portrét, Feynmanova originálu. V jiných případech jsme minuli cíl. Na našich úspěších mají zásluhu všichni, kteří nám pomohli. Za nedostatky se omlouváme.

Jak bylo podrobně vysvětleno v přemluvě k 1. dílu, tyto přednášky byly pouze jednou stránkou programu začatého a řízeného Výborem pro revizi kurzu fyziky (Physics Course Revision Committee, R. B. Leighton – předseda, H. V. Neher a M. Sands) na Kalifornském technickém institutu a finančně podporovaného Fordovou nadací. Kromě toho s přípravou textového

materiálu pro tento druhý díl tím nebo oním pomáhali následující lidé: T. K. Caughey, M. L. Clayton, J. B. Curcio, J. B. Hartle, T. W. H. Harvey, M. H. Israel, W. J. Karzas, R. W. Kavanagh, R. B. Leighton, J. Mathews, M. S. Plesset, F. L. Warren, W. Whaling, C. H. Wilts a B. Zimmerman. Další přispěli nepřímou svou prací v kurzu: J. Blue, G. F. Chapline, M. J. Clauser, R. Dolen, H. H. Hill a A. M. Title. Profesor Gerry Neugebauer všestranně napomáhal našemu dílu usilovně a se zaujetím, daleko přesahujícím hranice povinnosti.

Vyprávění o fyzice, které zde nacházíte, by však nebylo možné bez výjimečných schopností a pracovitosti Richarda P. Feynmana.

BŘEZEN 1964, MATTHEW SANDS

Druhý díl Feynmanových přednášek z fyziky, který vychází v českém překladu poprvé, je mimořádně bohatý jak svým rozsahem, tak i šíří tematiky a hloubkou zpracování. Byl přeložen z 6. amerického vydání (Addison – Wesley 1977) s přihlédnutím k vydáním ve slovenském a ruském jazyce. Podobně jako u prvního dílu je doplněn úlohami, které tvoří součást kurzu, s uvedením výsledků a stručných návodu k řešení.

Převážná část přednášek druhého dílu je věnována elektromagnetizmu, jedné z nejzajímavějších a nejlépe prozkoumaných oblastí fyziky. Matematickou podobu dal zákonům elektromagnetizmu v 19. století James Clerk Maxwell. Maxwellovy rovnice se staly základem dalšího výzkumu i praktických aplikací elektřiny a magnetizmu, inspirovaly Einsteina k formulaci speciální teorie relativity a stále nás udivují svou matematickou elegancí. Ludwig Boltzmann je charakterizoval slovy básníka Goetha: „Byl to snad Bůh, ko napsal tyto znaky?“ Není proto divu, že se ve druhém díle Feynmanových přednášek setkáváme s Maxwellovými rovnicemi na mnoha místech a v mnoha podobách, abychom mohli jejich krásu a účinnost procítit. V posledních kapitolách knihy se Feynman zabývá vlastnostmi pružných látek a tekutin a závěrečnou kapitolu věnuje obecné teorii relativity jako jakési ozdobě na dotu.

Jak sám Feynman uvádí ve své předmluvě, jeho kurz není nějaký stručný přehled fyziky a vyžaduje určitou předchozí přípravu. Jde do hloubky, odhaluje nové, nečekané souvislosti a netradiční, typicky feynmanovské postřehy. Ponechává si do značné míry charakter bezprostředního mluveného projevu. Kapitola 19 je dokonce doslovným záznamem Feynmanovy přednášky i s jeho vlastnoručními náčrtky na tabuli.

Feynman se nijak nesusvazoval ustálenými zvyklostmi, definicemi a označováním, takže některé výrazy a rovnice mají u něho zcela jinou podobu, než je v našich učebnicích obvyklé (například zavedení intenzity magnetického pole H). I když jsme v některých případech přizpůsobovali označování fyzikálních veličin našim zvyklostem (ϵ_r jako relativní permitivita, U elektrické napětí, N moment síly apod.), ve většině případů jsme nechávali Feynmanovy symboly a způsob zápisu beze změny. Abeceda stejně nemá dost písmen, aby stačila na celé bohatství veličin a jejich vztahů. Feynmanovi šlo přitom vždy především o fyzikální podstatu problému.

Věříme, že po prostudování 1. dílu Feynmanových přednášek se čtenář s potěšením seznámí i s pokračováním této fyzikální epopeje, najde v něm nové podněty a intelektuální uspokojení.

ČERVENEC 2001, IVAN ŠTOLL

- 1 ELEKTROMAGNETISMUS**
 - 1.1 Elektrické síly /13
 - 1.2 Elektrická a magnetická pole /16
 - 1.3 Charakteristiky vektorových polí /17
 - 1.4 Zákony elektromagnetizmu /19
 - 1.5 Co jsou pole? /23
 - 1.6 Elektromagnetismus ve vědě a v technice /25
Příklady a cvičení /26
- 2 DIFERENCIÁLNÍ POČET VEKTOROVÝCH POLÍ**
 - 2.1 Chápání fyziky /27
 - 2.2 Skalární a vektorová pole – T a h /28
 - 2.3 Derivace polí – gradient /31
 - 2.4 Operátor ∇ /34
 - 2.5 Operace s operátorem ∇ /35
 - 2.6 Diferenciální rovnice proudění tepla /37
 - 2.7 Druhé derivace vektorových polí /39
 - 2.8 Nástrahy /41
Příklady a cvičení /43
- 3 INTEGRÁLNÍ POČET VEKTOROVÝCH POLÍ**
 - 3.1 Vektorové integrály. Křivkový integrál $\nabla\psi$ /45
 - 3.2 Tok vektorového pole /47
 - 3.3 Tok povrchem krychle. Gaussova věta /50
 - 3.4 Tepelná vodivost. Rovnice difúze /52
 - 3.5 Cirkulace vektorového pole /55
 - 3.6 Cirkulace obvodu čtverce. Stokesova věta /57
 - 3.7 Pole s nulovou rotací a divergencí /59
 - 3.8 Shrnutí /61
Příklady a cvičení /62
- 4 ELEKTROSTATIKA**
 - 4.1 Statika /63
 - 4.2 Coulombův zákon. Superpozice /65
 - 4.3 Elektrický potenciál /67
 - 4.4 $E = -\nabla\varphi$ /70
 - 4.5 Tok pole E /72
 - 4.6 Gaussův zákon. Divergence pole E /75
 - 4.7 Pole nabitě koule /77
 - 4.8 Siločáry. Ekvipotenciální plochy /78
Příklady a cvičení /81
- 5 POUŽITÍ GAUSSOVA ZÁKONA**
 - 5.1 Elektrostatika je Gaussův zákon plus... /82
 - 5.2 Rovnováha v elektrostatickém poli /83
 - 5.3 Rovnováha s vodiči /84
 - 5.4 Stabilita atomů /85
 - 5.5 Pole nabitě přímky /86
 - 5.6 Nabitá rovina /87
 - 5.7 Nabitá koule. Kulová slupka /89
 - 5.8 Je pole bodového náboje přesně úměrné veličině $1/r^2$? /90
 - 5.9 Pole vodiče /93
 - 5.10 Pole v dutině vodiče /94
Příklady a cvičení /96
- 6 ELEKTRICKÉ POLE V RŮZNÝCH PŘÍPÁDECH**
 - 6.1 Rovnice elektrostatického potenciálu /98
 - 6.2 Elektrický dipól /100
 - 6.3 Poznámky o vektorových rovnicích /104
 - 6.4 Potenciál dipólu jako gradient /104
 - 6.5 Dipólové přiblížení pro libovolné rozdělení náboje /107
 - 6.6 Pole nabitých vodičů /109
 - 6.7 Metoda elektrostatického zobrazení /109
 - 6.8 Bodový náboj v blízkosti vodivé roviny /111
 - 6.9 Bodový náboj v blízkosti vodivé koule /112
 - 6.10 Kondenzátory. Rovnoběžné desky /114
 - 6.11 Průraz při vysokém napětí /116
 - 6.12 Emisní mikroskop /117
Příklady a cvičení /120
- 7 ELEKTRICKÉ POLE V RŮZNÝCH PŘÍPÁDECH (POKRAČOVÁNÍ)**
 - 7.1 Metody určování elektrostatického pole /123
 - 7.2 Dvojměrná pole.
Funkce komplexní proměnné /124
 - 7.3 Kmity v plazmatu /129
 - 7.4 Koloidní částice v elektrolytu /132
 - 7.5 Elektrostatické pole mřížky /135
Příklady a cvičení /138
- 8 ELEKTROSTATICKÁ ENERGIE**
 - 8.1 Elektrostatická energie nábojů.
Homogenní koule /139
 - 8.2 Energie kondenzátoru.
Síly působící na nabitě vodiče /142
 - 8.3 Elektrostatická energie iontového krystalu /145
 - 8.4 Elektrostatická energie v atomových jádrech /148
 - 8.5 Energie v elektrostatickém poli /152
 - 8.6 Energie bodového náboje /155
Příklady a cvičení /157
- 9 ELEKTŘINA V ATMOSFÉRE**
 - 9.1 Gradient elektrického potenciálu v atmosféře /158
 - 9.2 Elektrické proudy v atmosféře /160
 - 9.3 Původ atmosférických proudů /162
 - 9.4 Bouřky /163
 - 9.5 Mechanismus oddělování nábojů /167
 - 9.6 Blesk /171
- 10 DIELEKTRIKA**
 - 10.1 Permittivita /174
 - 10.2 Vektor elektrické polarizace P /176
 - 10.3 Polarizační náboje /177
 - 10.4 Elektrostatické rovnice pro dielektrika /181
 - 10.5 Pole a síly v přítomnosti dielektrik /182
Příklady a cvičení /186

- 11 VNITŘNÍ STAVBA DIELEKTRIK**
- 11.1 Molekulové dipóly /187
 - 11.2 Elektronová polarizace /188
 - 11.3 Polární molekuly.
Orientační polarizace /191
 - 11.4 Elektrická pole v dutinách dielektrika /194
 - 11.5 Permittivita kapalin.
Clausiava-Mosottiova rovnice /197
 - 11.6 Pevná dielektrika /198
 - 11.7 Ferroelektrika. BaTiO_3 /199
Příklady a cvičení /204
- 12 ANALOGIE ELEKTROSTATIKY**
- 12.1 Stejně rovnice mají stejná řešení /205
 - 12.2 Proudění tepla. Bodový zdroj v blízkosti nekonečného rovinného rozhraní /206
 - 12.3 Napnutá membrána /211
 - 12.4 Difúze elektronů. Kulové symetrický zdroj v homogenním prostředí /214
 - 12.5 Bezvýrové proudění kapaliny.
Obtákná koule /216
 - 12.6 Osvětlení. Homogenní osvětlení roviny /219
 - 12.7 „Fundamentální jednotka“ přírody /221
Příklady a cvičení /223
- 13 MAGNETOSTATIKA**
- 13.1 Magnetické pole /224
 - 13.2 Elektrický proud. Zachování náboje /225
 - 13.3 Magnetická síla působící na proud /227
 - 13.4 Magnetické pole stacionárních proudů.
Ampérův zákon /228
 - 13.5 Magnetické pole přímého vodiče a solenoidu. Atomové proudy /231
 - 13.6 Magnetická a elektrická pole v teorii relativity /233
 - 13.7 Transformace proudů a nábojů /239
 - 13.8 Superpozice. Pravidlo pravé ruky /240
Příklady a cvičení /241
- 14 MAGNETICKÉ POLE V RŮZNÝCH PŘÍPADECH**
- 14.1 Vektorový potenciál /242
 - 14.2 Vektorový potenciál daných proudů /246
 - 14.3 Přímý vodič /248
 - 14.4 Dlouhý solenoid /249
 - 14.5 Pole malé smyčky. Magnetický dipól /252
 - 14.6 Vektorový potenciál obvodu /254
 - 14.7 Biotův-Savartův zákon /255
Příklady a cvičení /257
- 15 VEKTOROVÝ POTENCIÁL**
- 15.1 Síly působící na proudovou smyčku.
Energie dipólu /259
 - 15.2 Mechanická a elektrická energie /263
 - 15.3 Energie ustálených proudů /266
 - 15.4 B nebo A /267
 - 15.5 Vektorový potenciál
a kvantová mechanika /269
- 15.6 Co platí ve staticce, neplatí v dynamice /276
Příklady a cvičení /279
- 16 INDUKOVANÉ PROUDY**
- 16.1 Motory a generátory /280
 - 16.2 Transformátory a indukčnosti /284
 - 16.3 Síly působící na indukované proudy /286
 - 16.4 Elektrotechnika /290
- 17 ZÁKONY ELEKTROMAGNETICKÉ INDUKCE**
- 17.1 Fyzika elektromagnetické indukce /293
 - 17.2 Výjimky z „pravidla toku“ /295
 - 17.3 Urychlování částice indukovaným elektrickým polem. Betatron /297
 - 17.4 Paradox /299
 - 17.5 Generátor střídavého proudu /300
 - 17.6 Vzájemná indukčnost /304
 - 17.7 Samoindukčnost /307
 - 17.8 Indukčnost a magnetická energie /308
Příklady a cvičení /314
- 18 MAXWELLOVY ROVNICE**
- 18.1 Maxwellovy rovnice /317
 - 18.2 Co způsobuje nový člen /320
 - 18.3 Vše z klasické fyziky /322
 - 18.4 Putující pole /323
 - 18.5 Rychlost světla /327
 - 18.6 Řešení Maxwellových rovnic.
Potenciály a vlnová rovnice /328
- 19 PRINCIP NEJMENŠÍ AKCE**
- Speciální přednáška – téměř doslovná s Feynmanovými náčrtky na tabuli /331
- 20 ŘEŠENÍ MAXWELLOVÝCH ROVNIC VE VOLNÉM PROSTORU**
- 20.1 Vlny ve volném prostoru. Rovinné vlny /350
 - 20.2 Trojrozměrné vlny /359
 - 20.3 Vědecká obrazovnost /361
 - 20.4 Kulové vlny /363
- 21 ŘEŠENÍ MAXWELLOVÝCH ROVNIC S PROUDY A NÁBOJI**
- 21.1 Světlo a elektromagnetické vlny /368
 - 21.2 Kulové vlny z bodového zdroje /370
 - 21.3 Obecné řešení Maxwellových rovnic /373
 - 21.4 Pole oscilujícího dipólu /374
 - 21.5 Potenciály pohybujícího se náboje.
Liénardovo a Wicbertovo obecné řešení /380
 - 21.6 Potenciály náboje pohybujícího se rovnoměrně. Lorentzův vzorec /384
Příklady a cvičení /387
- 22 STŘÍDAVÉ OBVODY**
- 22.1 Impedance /389
 - 22.2 Generátory /395

- 22.3 Sítě s ideálními prvky.
Kirchhoffova pravidla /398
- 22.4 Ekvivalentní obvody /404
- 22.5 Energie /405
- 22.6 Řetězový obvod /407
- 22.7 Filtry /409
- 22.8 Jiné prvky obvodů /413
Příklady a cvičení /417
- 23 DUTINOVÉ REZONÁTORY**
- 23.1 Reálné prvky obvodů /419
- 23.2 Kondenzátor při vysokých frekvencích /421
- 23.3 Rezonanční dutina /426
- 23.4 Kmitavé módy dutinových rezonátorů /431
- 23.5 Dutinové rezonátory
a rezonanční obvody /433
Příklady a cvičení /435
- 24 VLNOVODY**
- 24.1 Přenosové vedení /436
- 24.2 Obdélníkový vlnovod /440
- 24.3 Mezní frekvence /444
- 24.4 Rychlost šíření vln ve vlnovodu /445
- 24.5 Detekování vedených vln /446
- 24.6 Spojování vlnovodů /447
- 24.7 Módy vlnovodů /450
- 24.8 Jiný pohled na vlnovody /451
Příklady a cvičení /454
- 25 ELEKTRODYNAMIKA V RELATIVISTICKÉM ZÁPISU**
- 25.1 Čtyřvektory /456
- 25.2 Skalární součin /459
- 25.3 Čtyřrozměrný gradient /463
- 25.4 Elektrodynamika v čtyřrozměrném
zápisu /466
- 25.5 Čtyřpotenciál pohybujícího se náboje /467
- 25.6 Invariance rovnic elektrodynamiky /468
Příklady a cvičení /471
- 26 LORENTZOVY TRANSFORMACE POLÍ**
- 26.1 Čtyřpotenciál pohybujícího se náboje /472
- 26.2 Pole bodového náboje pohybujícího se
konstantní rychlostí /474
- 26.3 Relativistické transformace polí /479
- 26.4 Polybové rovnice v relativistickém
označení /486
Příklady a cvičení /491
- 27 ENERGIE POLE A HYBNOST POLE**
- 27.1 Lokální zákony zachování /492
- 27.2 Zákon zachování energie
a elektromagnetismus /494
- 27.3 Hustota energie a hustota toku energie
elektromagnetického pole /495
- 27.4 Nejednoznačnost energie pole /498
- 27.5 Příklady hustoty toku energie /499
- 27.6 Hybnost pole /503
Příklady a cvičení /508
- 28 ELEKTROMAGNETICKÁ HMOTNOST**
- 28.1 Energie pole bodového náboje /510
- 28.2 Hybnost pole pohybujícího se náboje /511
- 28.3 Elektromagnetická hmotnost /513
- 28.4 Síla, kterou elektron působí sám na sebe /515
- 28.5 Pokusy o modifikaci Maxwellovy teorie /517
- 28.6 Pole jaderných sil /524
Příklady a cvičení /527
- 29 POHYB NÁBOJŮ V ELEKTRICKÉM A MAGNETICKÉM POLI**
- 29.1 Pohyb v homogenním elektrickém
nebo magnetickém poli /528
- 29.2 Analyzátor hybnosti /529
- 29.3 Elektrostatická čočka /532
- 29.4 Magnetická čočka /532
- 29.5 Elektronový mikroskop /533
- 29.6 Stabilizující pole urychlovačů /535
- 29.7 Fokuse pomocí střídavého gradientu /538
- 29.8 Pohyb ve zkřížených elektrických
a magnetických polích /541
Příklady a cvičení /542
- 30 VNITŘNÍ GEOMETRIE KRYSŤALŮ**
- 30.1 Vnitřní geometrie krystalů /543
- 30.2 Chemické vazby v krystalech /545
- 30.3 Růst krystalů /547
- 30.4 Krystalové mřížky /547
- 30.5 Symetrie ve dvou rozměrech /549
- 30.6 Symetrie ve třech rozměrech /551
- 30.7 Pevnost kovů /553
- 30.8 Dislokace a růst krystalů /555
- 30.9 Braggův-Nyeův model krystalu /556
- 31 TENZORY**
- 31.1 Tenzor polarizovatelnosti /572
- 31.2 Transformace tenzorových složek /574
- 31.3 Elipsoid energie /575
- 31.4 Jiné tenzory. Tenzor sctrvačnosti /579
- 31.5 Vektorový součin /581
- 31.6 Tenzor napětí /582
- 31.7 Tenzory vyššího řádu /587
- 31.8 Čtyřtenzor elektromagnetické energie
a hybnosti /588
- 32 INDEX LOMU OPTICKY HUSTÝCH LÁTEK**
- 32.1 Polarizace látky /590
- 32.2 Maxwellovy rovnice v dielektriku /593
- 32.3 Vlny v dielektriku /595
- 32.4 Komplexní index lomu /599
- 32.5 Index lomu směsí /600
- 32.6 Vlny v kovech /602

- 32.7 Nízkofrekvenční a vysokofrekvenční přiblížení. Tloušťka skinové vrstvy a plazmová frekvence /604
Příklady a cvičení /608
- 33 ODRAZ OD POVRCHŮ**
- 33.1 Odraz a lom světla /609
33.2 Vlny v opticky hustých látkách /610
33.3 Hraniční podmínky /614
33.4 Odražené a lomené vlny /619
33.5 Odraz od kovu /624
33.6 Úplný vnitřní odraz /625
Příklady a cvičení /628
- 34 MAGNETIZMUS LÁTEK**
- 34.1 Diamagnetismus a paramagnetismus /629
34.2 Magnetické momenty a moment hybnosti /631
34.3 Precese atomových magnetů /633
34.4 Diamagnetismus /635
34.5 Larmorova věta /636
34.6 Klasická fyzika nevysvětluje ani diamagnetismus ani paramagnetismus /638
34.7 Moment hybnosti v kvantové mechanice /639
34.8 Magnetická energie atomů /642
Příklady a cvičení /644
- 35 PARAMAGNETIZMUS A MAGNETICKÁ REZONANCE**
- 35.1 Kvantové magnetické stavy /645
35.2 Sternův-Gerlachův pokus /647
35.3 Rabiho metoda molekulového svazku /649
35.4 Paramagnetismus makroskopických látek /652
35.5 Chlazení pomocí adiabatické demagnetizace /656
35.6 Jaderná magnetická rezonance /657
Příklady a cvičení /660
- 36 FEROMAGNETIZMUS**
- 36.1 Magnetizační proudy /661
36.2 Pole H /668
36.3 Magnetizační křivka /670
36.4 Indukčnost ocelových jader /672
36.5 Elektromagnety /674
36.6 Spontánní magnetizace /677
Příklady a cvičení /684
- 37 MAGNETICKÉ LÁTKY**
- 37.1 Podstata feromagnetismu /685
37.2 Termodynamické vlastnosti /689
- 37.3 Hysterezní křivka /691
37.4 Feromagnetické látky /697
37.5 Zvláštní magnetické látky /699
- 38 PRUŽNOST**
- 38.1 Hookův zákon /702
38.2 Homogenní deformace /704
38.3 Torzní tyč. Sřizné vlny /710
38.4 Prohnutý nosník /713
38.5 Vzpěrnost /717
Příklady a cvičení /720
- 39 PRUŽNÉ LÁTKY**
- 39.1 Tenzor deformace /721
39.2 Tenzor pružnosti /725
39.3 Pohyby v pružném tělese /728
39.4 Nepružné chování /732
39.5 Výpočet konstant pružnosti /734
- 40 PROUDĚNÍ „SUŠÉ VODY“**
- 40.1 Hydrostatika /740
40.2 Pohybové rovnice /742
40.3 Ustálené proudění – Bernoulliho věta /746
40.4 Vířivé proudění /752
40.5 Vířivé čáry /754
Příklady a cvičení /757
- 41 PROUDĚNÍ „MOKRÉ VODY“**
- 41.1 Viskozita /758
41.2 Viskózní proudění /762
41.3 Reynoldsovo číslo /764
41.4 Obtékání kruhového válce /766
41.5 Limita nulové viskozity /769
41.6 Couetteovo proudění /770
Příklady a cvičení /773
- 42 ZAKŘIVENÝ PROSTOR**
- 42.1 Zakřivené prostory se dvěma rozměry /774
42.2 Křivost v trojrozměrném prostoru /781
42.3 Náš prostor je zakřiven /783
42.4 Geometrie v časoprostoru /784
42.5 Gravitace a princip ekvivalence /785
42.6 Chod hodin v gravitačním poli /785
42.7 Křivost časoprostoru /789
42.8 Pohyb v zakřiveném časoprostoru /790
42.9 Einsteinova teorie gravitace /793
- VÝSLEDKY A NÁVODY K CVIČENÍM /795**
- REJSTŘÍK VYBRANÝCH POJMŮ A JMEN /805**

Elektromagnetismus

- 1.1 ELEKTRICKÉ SÍLY
- 1.2 ELEKTRICKÁ A MAGNETICKÁ POLE
- 1.3 CHARAKTERISTIKY VEKTOROVÝCH POLÍ
- 1.4 ZÁKONY ELEKTROMAGNETIZMU
- 1.5 CO JSOU POLE?
- 1.6 ELEKTROMAGNETIZMUS VE VĚDĚ A TECHNICE

1.1 ELEKTRICKÉ SÍLY

Přečtěte si znovu: kapitolu 12, díl 1, Charakteristiky síly

Představme si sílu, která se podobá gravitaci a mění se převážně nepřímo úměrně druhé mocnině vzdálenosti, ale asi *miliardu miliard miliard miliard* krát větší. A ještě s jedním rozdílem. Necht existují dva druhy „látky“, které nazýváme kladná a záporná. Necht narozdíl od gravitace, v níž existuje pouze přitahování, se stejné druhy odpuzují a odlišné druhy přitahují. Co by se stalo?

Chomáč kladné látky by se ohromnou silou odpuzoval a rozptýlil by se na všechny strany. S chomáčem záporné by se stalo totéž. Ale směs stejného množství kladné a záporné látky by se chovala zcela odlišně. Ohromná přitažlivá síla by přitáhla opačné kousky k sobě. V konečném důsledku by se tyto úžasné síly navzájem téměř dokonale vykompenzovaly vytvořením hutných jemných směsí kladného a záporného, přičemž mezi dvěma oddělenými chomáči takových směsí by neexistovalo téměř žádné přitahování nebo odpuzování.

Taková síla existuje – je to elektrická síla! A každá látka je směsí kladných protonů a záporných elektronů, které se touto velkou silou přitahují a odpuzují. Ale vyvážení je tak dokonalé, že když stojíte blízko někomu jiného, necítíte sílu vůbec žádnou. Kdyby existoval jen malý zbytek nerovnováhy, poznali bychom to. Kdybyste stáli od někomu na vzdálenost paže a každý z vás by měl o *jedno procento* víc elektronů než protonů, byla by odpudivá síla mezi vámi neuvěřitelná. Jak velká? Dost na to, aby zvedla obrovský mrakodrap? Ne! Aby zvedla Mount Everest? Ne! Odpuzování by stačilo na zvednutí břemene s hmotností celé zeměkoule!

S ohledem na tak perfektní vyvážení ohromné síly, působící v této směsi, není těžké pochopit, že látka s tendencí udržet své kladné a záporné náboje v nejjemnější rovnováze může mít velkou

tvrdost a pevnost. Mrakodrap Empire State Building¹⁾ se například vychyluje ve větru jen o necelé tři metry, neboť elektrické síly udržují každý elektron a proton víceméně ve stálé poloze. Na druhé straně, když se podíváme na tak malé množství látky, že uvidíme jen několik atomů, libovolná malá část látky obvykle nebude mít stejný počet kladných a záporných nábojů, takže budou existovat velké zbytkové elektrické síly. I kdyby byly počty obou druhů nábojů ve dvou sousedních malých částech stejné, pravděpodobně ještě zůstanou mezi oběma částmi elektrické síly, neboť síly mezi jednotlivými náboji se mění nepřímo úměrně s druhou mocninou vzdálenosti. Zbytková síla může vzniknout, nachází-li se záporný náboj jedné části blíž kladnému náboji než kladný náboj zápornému v části jiné. Pak mohou být přitažlivé síly větší než odpuzivé a může dojít k výslednému přitahování i dvou částí bez nadbytečných nábojů. Síla, která udržuje pohromadě atomy, a chemická síla, která drží molekuly, jsou ve skutečnosti elektrickými silami působícími v oblastech s nedokonalou rovnováhou nábojů anebo s velmi malými vzdálenostmi.

Vy samozřejmě víte, že se atomy skládají z kladných protonů v jádře a záporných elektronů v jeho okolí. Můžete se ptát: Když je tato elektrická síla tak úžasná, proč spolu protony a elektrony nesplynou? Když mají tvořit dokonalou směs, proč tato směs není ještě dokonalejší? Odpověď nacházíme v kvantových jevech. Pokusíme-li se naše elektrony uzavřít do oblasti těsně přiléhající k protonům, musí mít podle principu neurčitosti nenulovou střední kvadratickou hybnost, která je tím větší, čím těsnější je ohraničení. Právě tento pohyb, vyplývající ze zákonů kvantové mechaniky, zabraňuje elektrické přitažlivosti dostat náboje jakýmkoli způsobem blíž k sobě.

Je tu další otázka: Co drží pohromadě atomové jádro? V jádře je několik kladných protonů. Proč se od sebe neoddělí? Ukazuje se, že v jádře existují kromě elektrických i neelektrické síly, které se nazývají jaderné síly. Jsou větší než elektrické síly a jsou schopné držet protony u sebe i přes jejich elektrické odpuzování. Síly jádra však mají malý dosah – jejich velikost klesá mnohem rychleji než $1/r^2$. A to má důležitý důsledek. Kdyby jádro obsahovalo velmi mnoho protonů, stalo by se příliš velkým a nezůstalo by pohromadě. Příkladem je uran s 92 protony. Jaderné síly působí převážně jen mezi každým protonem (nebo neutronem) a jeho nejbližším sousedem, ale elektrické síly působí i na větší vzdálenosti a vyvolávají tak odpuzování každého protonu od všech ostatních v jádře. Čím víc je v jádře protonů, tím je elektrické odpuzování silnější, až dokud – jako v případě uranu – není rovnováha tak křehká, že je jádro účinkem elektrické síly téměř připraveno se rozletět. Jestliže takové jádro jen trochu „postrčíme“ (pokud do něj vyšleme pomalý neutron), rozdělí se na dvě části s kladným nábojem. V důsledku elektrického odpuzování od sebe obě části odletí. Energie, která se při tom uvolňuje, je energií atomové bomby. Obvykle se tato energie nazývá jaderná, ale v podstatě je to elektrická energie uvolněná tehdy, když elektrické síly překonaly přitažlivé síly jádra.

Konečně se můžeme ptát, co drží pohromadě záporný elektron (neboť ten nemá žádné jaderné síly). Skládá-li se elektron celý z jednoho druhu látky, každá z jeho částí by měla odpuzovat ty ostatní. Proč se tedy nerozletí? Má však elektron „části“? Asi bychom měli říct, že elektron je jen bod a že elektrické síly působí jen mezi *různými* dvěma bodovými náboji, takže sám na sebe elektron nepůsobí. Snad. Vše, co můžeme říct, je, že otázka, co drží pohromadě elektron, způsobila v pokusech o vytvoření úplné teorie elektromagnetizmu mnoho těžkostí. Tato otázka zatím nebyla zodpovězena. V dalších kapitolách se budeme tomuto tématu věnovat více.

Jak jsme viděli, je třeba čekat, že právě kombinace elektrických sil a kvantově mechanických jevů bude určovat detailní strukturu makroskopických množství látek, a tím i jejich vlastnosti. Některé látky jsou tvrdé, jiné měkké. Některé jsou elektrickými vodiči, protože jejich elektrony

¹⁾ 381 m vysoký mrakodrap v New Yorku, do roku 1956 nejvyšší stavba světa. (Pozn. red.)

se mohou volně pohybovat, jiné jsou izolátory, protože jejich elektrony jsou pevně připoutané k jednotlivým atomům. Později budeme hovořit o tom, jak vznikají některé z těchto vlastností. Je to však složitá otázka, proto nejdříve budeme zkoumat elektrické síly jen v jednoduchých situacích. Začneme s probíráním zákonů elektřiny, včetně magnetizmu, který je vlastně částí téhož předmětu.

Řekli jsme, že elektrická síla podobně jako gravitační klesá nepřímo úměrně s druhou mocninou vzdálenosti mezi náboji. Tento vztah se nazývá Coulombův zákon. Ale neplatí přesně, když se náboje pohybují, protože elektrické síly závisí také na pohybu nábojů, a to komplikovaným způsobem. Jednu část síly mezi pohybujícími se náboji nazýváme *magnetická síla*, která vlastně představuje jeden aspekt elektrického účinku. Právě proto hovoříme o „elektromagnetizmu“.

Existuje důležitý obecný princip, který umožňuje zacházet s elektromagnetickými silami poměrně snadno. Experimentálně se zjistilo, že síla působící na náboj závisí pouze na poloze tohoto náboje, jeho rychlosti a velikosti, bez ohledu na to, kolik dalších nábojů existuje a jak se pohybují. Sílu F působící na náboj q , který se pohybuje rychlostí v , můžeme vyjádřit takto:

$$F = q(E + v \times B), \quad (1.1)$$

kde E je *elektrické pole* a B *magnetické pole* v místě, kde se nachází náboj. Důležité je, že elektrické síly všech nábojů ve vesmíru lze složit právě z těchto dvou vektorů. Jejich hodnoty závisí na tom, *kde* se uvažovaný náboj nachází, a mohou se *v čase* měnit. Kromě toho, nahradíme-li tento náboj jiným, změní se síla působící na nový náboj v poměru velikostí obou nábojů, nezmění-li všechny ostatní náboje na světě svou polohu nebo pohyb. (Samozřejmě že v reálné situaci každý náboj působí na všechny ostatní ve svém okolí a může je uvést do pohybu. A tak když v některých případech nahradíme náš určitý náboj jiným nábojem, *mohou* se pole změnit.)

Z 1. dílu víme, jak se určuje pohyb částice, známe-li sílu, která na ni působí. Dosadíme-li výraz (1.1) do pohybové rovnice, dostaneme

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{mv}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \right] = F = q(E + v \times B). \quad (1.2)$$

Známe-li E a B , můžeme určit pohyby nabitých částic. K tomu už jen potřebujeme vědět, jak E a B vznikají.

Jeden z nejdůležitějších zjednodušujících principů vytváření elektrických polí závisí na tomto: Předpokládejme, že určitý počet nábojů pohybujících se libovolným způsobem vytvoří pole E_1 a jiná množina nábojů vytvoří pole E_2 . Působí-li obě množiny nábojů současně (při zachování stejných pohybů a poloh, které měly, když jsme o nich uvažovali odděleně), vytvoří pole, které je dáno součtem

$$E = E_1 + E_2. \quad (1.3)$$

Tento fakt se nazývá *princip superpozice* polí. Platí také pro magnetická pole.

Z tohoto principu vyplývá, že budeme-li vědět, podle jakého zákona vytváří elektrická a magnetická pole *jediný* náboj pohybující se libovolným způsobem, zákony elektrodynamiky už budou úplné. Chceme-li znát sílu působící na náboj A , je třeba spočítat pouze E a B , které vytváří každý náboj B , C , D atd., pak vypočítat vektory E a B všech nábojů, a tak najít pole a síly působící z nich na A . Kdyby se ukázalo, že zákon, podle kterého se vytváří pole jediného náboje, je

jednoduchý, byla by to nejjednodušší cesta, jak popsat zákony elektrodynamiky. My už jsme uvedli tento zákon (kapitola 28, díl 1), který je, bohužel, dost složitý.

Ukazuje se, že tvar, ve kterém jsou zákony elektrodynamiky nejjednodušší, není tím tvarem, který byste zde mohli očekávat. Není totiž vůbec jednoduché udat vzorec síly, kterou působí jeden náboj na druhý. Je pravda, že pokud jsou náboje v klidu, je výraz pro Coulombovu sílu ještě jednoduchý, ale když se náboje pohybují, vztahy se komplikují kromě jiného i časovým zpožděním a zrychlením. Z tohoto důvodu nehodláme prezentovat elektrodynamiku pouze prostřednictvím zákonů síly působící mezi náboji; pokládáme za vhodnější jiné hledisko – při něm jsou zákony elektrodynamiky zvládnutelné snáze.

1.2 ELEKTRICKÁ A MAGNETICKÁ POLE

Nejdříve si musíme trochu rozšířit naši představu o elektrickém vektoru E a magnetickém vektoru B . Definovali jsme je pomocí sil působících na náboj. Nyní chceme hovořit o elektrických a magnetických polích *v bodě*, i v tom případě, kdy se v něm nenachází žádný elektrický náboj. Tvrdíme: jestliže existují síly působící na náboj, existuje tam „něco“ i tehdy, je-li náboj odstraněn. Když na náboj umístěný v bodě (x, y, z) působí v čase t síla F daná výrazem (1.1), přiřazujeme bodu (x, y, z) v prostoru vektory E a B . O vektorech $E(x, y, z, t)$ a $B(x, y, z, t)$ si můžeme myslet, že určují síly, které by působily v čase t na náboj umístěný v bodě (x, y, z) za podmínky, že umístění náboje do bodu (x, y, z) neporuší polohy nebo pohyby žádných jiných nábojů vytvářejících pole E a B .

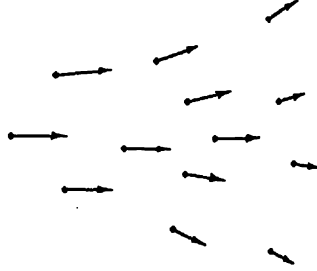
Podle této představy připíšeme každému bodu (x, y, z) v prostoru dva vektory E a B , které se mohou měnit v čase. Elektrická a magnetická pole pak chápeme jako *vektorové funkce* proměnných x, y, z a t . Protože vektor je určen svými složkami, každé z polí $E(x, y, z, t)$ a $B(x, y, z, t)$ představuje tři reálné funkce proměnných x, y, z a t .

Právě proto, že E (nebo B) je možné určit v každém bodě v prostoru, nazývá se pole. Pole je jakákoliv fyzikální veličina, která nabývá různé hodnoty v různých bodech prostoru. Například teplota je polem – v tomto případě skalárním polem, které zapisujeme jako $T(x, y, z)$. Teplota se může také měnit v čase, říkáme, že je závislá na čase a zapisujeme ji jako $T(x, y, z, t)$. Jiným příkladem je „rychlostní pole“ tekoucí kapaliny. Rychlost kapaliny v každém bodě prostoru v čase t zapisujeme jako $v(x, y, z, t)$. Je to vektorové pole.

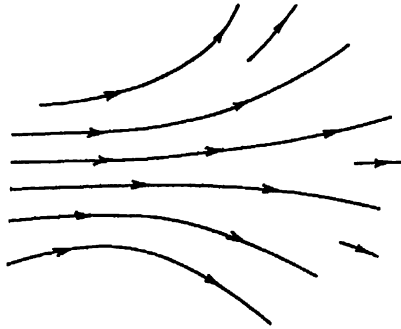
Vraťme se k elektromagnetickým polím. Ačkoliv se jejich závislost na nábojích, které je vytvořily, vyjadřuje složitými vzorci, mají důležitou následující vlastnost: vztahy mezi hodnotami polí *v jednom bodě* a hodnotami polí *v bodech sousedních* jsou velice jednoduché. Pole lze zcela popsat pomocí několika vztahů, které mají tvar diferenciálních rovnic. Právě pomocí takových rovnic se zapisují zákony elektrodynamiky nejjednodušeji.

Existují rozmanité nápady, jak si vytvořit představu o chování polí. Nejsprávnější z nich je i nejabstraktnější: pole chápeme prostě jako matematické funkce polohy a času. Můžeme se pokusit získat představu pole také tím, že si v mnoha bodech prostoru nakreslíme vektory, z nichž každý bude udávat intenzitu a směr pole v daném bodě. Takové zobrazení pole vidíme na *obr. 1.1*. Můžeme však jít dál a nakreslit křivky, které mají všude vektoru ve směru tečny, tj. jakoby šly za šipkami a sledovaly směr pole. Když postupujeme takto, ztrácíme znázornění *dělek* vektorů. Intenzitu pole můžeme však znázornit tak, že křivky vykreslíme daleko od sebe, když je pole slabé, a blízko sebe, když je silné. Domluvíme se přitom, že počet křivek připadajících na jednotku plochy postavenou kolmo na křivky bude přímo úměrný intenzitě pole. Toto je ovšem jen zjednodušené

a vyžaduje, aby se tu a tam objevily nové křivky tak, aby jejich počet vždy souhlasil s intenzitou pole. Pole z obr. 1.1 je znázorněno pomocí těchto siločar na obr. 1.2.



Obr. 1.1 Vektorové pole lze znázornit nakreslením šipek, přičemž jejich velikosti a směr udávají hodnoty vektorového pole v bodech, ze kterých šipky vycházejí.



Obr. 1.2 Vektorové pole můžeme znázornit nakreslením siločar, jejichž tečny mají v každém bodě směr vektoru pole a jejichž hustota je úměrná velikosti vektoru pole.

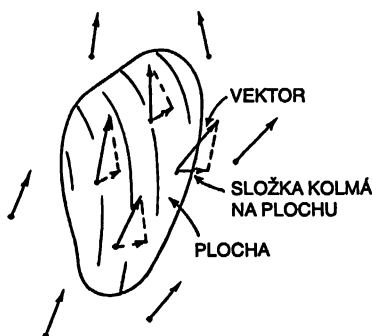
1.3 CHARAKTERISTIKY VEKTOROVÝCH POLÍ

V našem popisu zákonů elektřiny, který se opírá o pojem pole, budeme používat dvě matematicky důležité vlastnosti vektorového pole. Předpokládejme, že máme nějakou uzavřenou plochu, a ptáme se, zda se „něco“ ztrácí z jejího nitra, tj. zda má pole vlastnost „výtoku“. Například v případě rychlostního pole bychom se mohli ptát, zda rychlost směřuje vždy ven z plochy, nebo obecněji, zda víc kapaliny (za jednotku času) vytéká než vtéká. Výsledné množství kapaliny, vytékající z určité plochy za jednotku času, se nazývá tok rychlosti plochou. Tok elementární ploškou je roven složce rychlosti kolmé na plošku, násobené velikostí plošky. Pro libovolnou uzavřenou plochu je čistý *výtok*, nebo krátce *tok*, roven součinu jejího plošného obsahu a střední normálové složky rychlosti, orientované ven z objemu uzavřené plochy:

$$\text{Tok} = (\text{střední normálová složka}) \cdot (\text{plošný obsah}). \quad (1.4)$$

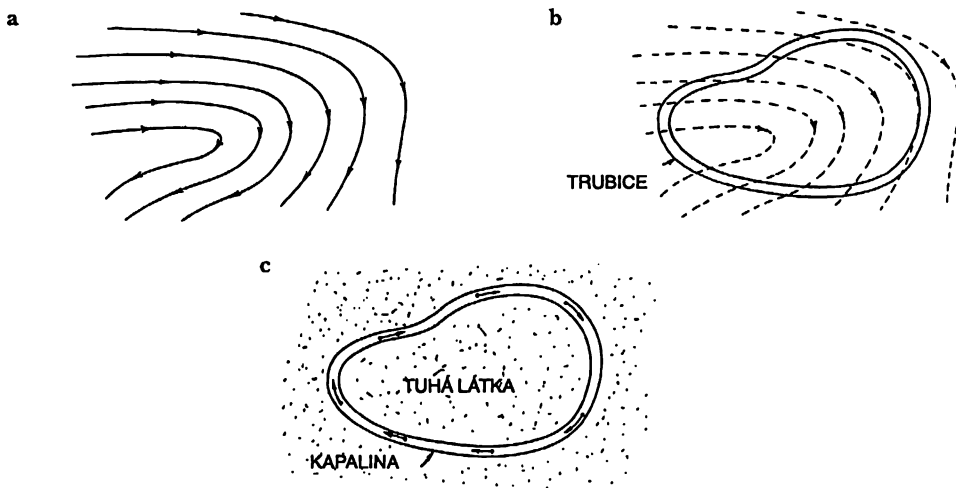
I v případě elektrického pole můžeme matematicky definovat veličinu analogickou k toku. Opět ji nazveme tokem, ale samozřejmě nepůjde o tok nějaké látky, protože elektrické pole není rychlostí něčeho. Ukazuje se však, že i tak je matematická veličina udávající střední normálovou

složku pole velice užitečná. Pak hovoříme o *elektrickém toku*, definovaném taktéž podle (1.4). Přitom je užitečné zavést tok nejen zcela uzavřenou plochou, ale jakoukoliv ohraničenou plochou. Podobně jako předtím se tok takovouto plochou definuje jako součin jejího plošného obsahu a střední normálové složky vektoru. Tyto pojmy ilustruje *obr. 1.3*.



Obr. 1.3 Tok vektorového pole plochou se definuje jako součin střední hodnoty normálové složky vektoru a obsahu plochy.

Druhá vlastnost vektorového pole se týká spíše křivky než plochy. Opět si představme rychlostní pole, které popisuje tok kapaliny. Mohli bychom si položit tuto zajímavou otázku: Cirkuluje kapalina? Myslíme tím toto: existuje výsledný rotační pohyb kapaliny podél nějaké uzavřené křivky? Představme si, že jsme v jeden okamžik zmrazili všechnu kapalinu s výjimkou vnitřku trubice s konstantním průřezem a tvarem uzavřené křivky, jako na *obr. 1.4*. Mimo trubici se kapalina zastaví, ale uvnitř se může udržovat v pohybu, a to v závislosti na hybnosti kapaliny zachycené v trubici, tj. podle toho, zda hybnost kapaliny v jednom směru podél trubice je větší než hybnost v opačném směru.



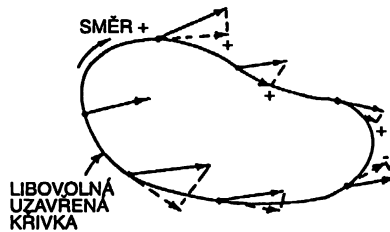
Obr. 1.4 a) Pole rychlosti v kapalině.

b) Představme si trubici s konstantním průřezem a tvarem nějaké uzavřené křivky.

c) Kdyby kapalina všude s výjimkou vnitřku trubice náhle zmrzla, v trubici by cirkulovala.

Veličinu nazvanou *cirkulace* definujeme jako výslednou rychlost kapaliny v trubici násobenou délkou trubice. Naše pojmy můžeme nyní opět rozšířit a cirkulaci definovat pro jakékoliv vektorové pole (i když tam není nic, co by se pohybovalo). Pro libovolné vektorové pole se *cirkulace podél libovolné myšlené uzavřené křivky* definuje jako střední tangenciální složka vektoru (s ohledem na směr oběhu po křivce) násobená délkou křivky (obr. 1.5).

$$\text{Cirkulace} = (\text{střední tangenciální složka}) \cdot (\text{délka křivky}). \quad (1.5)$$



Obr. 1.5 Cirkulace vektorového pole je rovna součinu střední tangenciální složky vektoru (vzhledem ke směru pohybu po křivce) a délky uzavřené křivky.

Uvidíte, že z této definice opravdu vyplývá číslo, které je přímo úměrné rychlosti oběhu kapaliny v rychle zamrzlé trubici, popsané předtím.

Právě pomocí těchto dvou pojmů – toku a cirkulace – už můžeme uvést všechny zákony elektřiny a magnetizmu. Možná, že význam zákonů hned plně nepochopíte, ale poskytnou vám určitou představu o tom, jak se v konečném tvaru formuluje fyzika elektromagnetických jevů.

1.4 ZÁKONY ELEKTROMAGNETIZMU

První zákon elektromagnetizmu určuje tok elektrického pole:

$$\text{Tok } E \text{ libovolnou uzavřenou plochou} = \frac{\text{celkový náboj uvnitř plochy}}{\epsilon_0}, \quad (1.6)$$

kde ϵ_0 je vhodná konstanta (čte se „epsilon nula“). Není-li uvnitř plochy žádný náboj, ačkoliv v jejím okolí náboje jsou, je *střední* normálová složka E nulová, takže výsledný tok plochou je nulový. Abychom naznačili hloubku tohoto tvrzení, můžeme ukázat, že vztah (1.6) je ekvivalentní s Coulombovým zákonem. Stačí doplnit předpoklad, že pole jednotlivého náboje je kulově symetrické. V případě bodového náboje opíšeme kolem náboje kulovou plochu. Střední normálová složka vektoru pole je pak dána právě velikostí E v libovolném bodě kulové plochy, neboť pole má nevyhnutelně radiální směr a v každém bodě na kouli má stejnou intenzitu. Naše pravidlo tvrdí, že součin pole na povrchu koule a plošného obsahu jejího povrchu, tj. tok směrem ven z koule, je přímo úměrný náboji uvnitř koule. Jestliže bychom poloměr koule zvětšili, plošný obsah by vzrostl přímo úměrně druhé mocnině poloměru. Ale střední normálová složka elektrického pole vynásobená zvětšeným plošným obsahem se musí rovnat stejnému náboji uvnitř, a pole se tedy musí zmenšit nepřímo úměrně druhé mocnině poloměru – dostáváme výsledek, že pole je nepřímo úměrné čtverci vzdálenosti.

Vezmeme-li libovolnou pevnou křivku v prostoru a měříme-li podél ní cirkulaci elektrického pole, zjistíme, že obecně není rovna nule (i když jde o Coulombovo pole). Pro elektrinu platí totiž i druhý zákon, podle něhož pro jakoukoliv plochu S (neuzavřenou) ohraničenou křivkou C platí

$$\text{Cirkulace } E \text{ podél křivky } C = -\frac{d}{dt} (\text{tok } B \text{ plochou } S). \quad (1.7)$$

Zákony elektromagnetického pole můžeme završit zapsáním dvou analogických rovnic pro magnetické pole B :

$$\text{Tok } B \text{ libovolnou uzavřenou plochou} = 0. \quad (1.8)$$

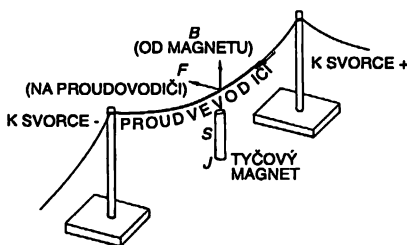
Pro plochu S ohraničenou křivkou C platí

$$c^2 (\text{cirkulace } B \text{ podél křivky } C) = \frac{d}{dt} (\text{tok } E \text{ plochou } S) + \frac{\text{elektrický proud plochou } S}{\epsilon_0}. \quad (1.9)$$

Konstanta c^2 , která vystupuje v rovnici (1.9), je druhou mocninou rychlosti světla. Vyskytuje se tu proto, že magnetismus je ve skutečnosti relativistickým efektem elektriny. Konstanta ϵ_0 byla položena proto, aby vhodným způsobem vyšly jednotky elektrického proudu.

Rovnice (1.6) až (1.9) spolu se vztahem (1.1) vyjadřují všechny zákony elektrodynamiky²⁾. Jak si vzpomínáte, Newtonovy zákony sice bylo možné snadno zapsat, ale měly mnoho velmi složitých důsledků a zabralo nám mnoho času, než jsme se o nich dověděli všechno. Napsat tyto naše zákony tak jednoduché není, z čehož vyplývá, že jejich důsledky budou ještě složitější, a zabere nám opravdu velmi mnoho času, než je všechny objasníme.

Zákony elektrodynamiky můžeme ilustrovat sérií jednoduchých pokusů, které kvalitativně ukazují vzájemné vztahy elektrických a magnetických polí. První člen ve vztahu (1.1) jste pocítili, když jste si česali vlasy, a proto ho nebudeme ilustrovat. Druhou část výrazu (1.1) lze demonstrovat při průchodu proudu vodičem, který visí nad tyčovým magnetem tak, jako na obr. 1.6.



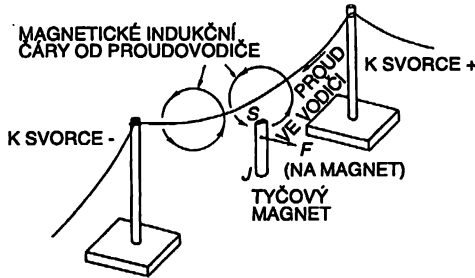
Obr. 1.6 Tyčový magnet vyvolává ve vodiči pole B . Když vodičem prochází proud, působením síly $F = qv \times B$ se vodič pohne.

Účinkem síly $F = qv \times B$ se při zapnutí proudu vodič pohne. Po dobu trvání proudu se náboje uvnitř vodiče pohybují, tj. mají rychlost v , a proto na ně působí magnetické pole magnetu, což se projeví pohybem vodiče do strany.

²⁾ Už se potřebujeme jen dohodnout na konvencích pro výběr *znaménka* cirkulace.

Když se vodič pohne doleva, je třeba čekat, že magnet dostane náraz směrem doprava. (V opačném případě bychom mohli celé zařízení umístit na vůz a měli bychom pohonný systém, který nezachováva hybnost!) I když je síla příliš malá na to, aby byl pohyb tyčového magnetu viditelný, jemněji uložený magnet, např. stříelka kompasu, by se pohnul.

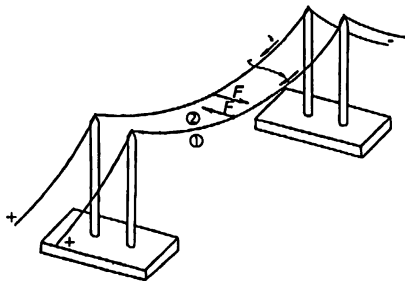
Jak působí na magnet vodič elektrického proudu? Proud ve vodiči vytváří vlastní magnetické pole, které se projeví silovým působením na magnet. Podle posledního členu v rovnici (1.9) vyvolá proud nevyhnutelně *cirkulaci* pole B – v tomto případě křivky pole B (magnetické indukční čáry) jsou uzavřené a obepínají vodič, jak je vidět na obr. 1.7. Právě toto pole B je původcem síly působící na magnet.



Obr. 1.7 Magnetické pole vodiče působí silou na magnet.

Podle rovnice (1.9) je při stálém proudu cirkulace pole B stejná pro jakoukoliv křivku, která vodič obepíná. Křivky, např. kružnice, které jsou dále od vodiče, mají obvod větší, takže tangenciální složka B musí být menší. Vidíte, že podle očekávání bude pole B klesat nepřímou úměrně vzdálenosti od dlouhého přímého vodiče.

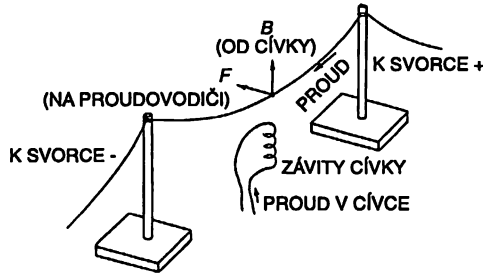
Řekli jsme, že proud ve vodiči vytváří magnetické pole a že v magnetickém poli působí na vodič, kterým prochází proud, síla. Pak bychom měli také očekávat, že vytvoříme-li magnetické pole proudem v jednom vodiči, bude působit silou na jiný vodič, kterým také prochází proud. Můžeme si to ukázat na dvou visících vodičích, jako na obr. 1.8. Mají-li proudy stejný směr, vodiče se přitahují, jsou-li proudy opačného směru, vodiče se odpuzují.



Obr. 1.8 Dva vodiče, kterými prochází proud, na sebe navzájem působí silami.

Krátce řečeno elektrické proudy vytvářejí magnetická pole právě tak jako magnety. Ale počkejte, co je vlastně magnet? Jestliže pohybující se náboje vyvolávají magnetická pole, není možné, že magnetické pole kousku železa je ve skutečnosti také důsledkem proudů? Ukazuje se, že ano. Tyčový magnet z našeho pokusu můžeme nahradit cívkou navinutou z drátu, stejně jako na

obr. 1.9. Prochází-li cívkou proud (jakož i přímým vodičem nad ní), pozorujeme pohyb vodiče přesně jako předtím, kdy jsme měli místo cívky magnet. Jinak řečeno, proud v cívce imituje magnet. Ukazuje se tedy, že kus železa působí tak, jako kdyby obsahoval ustavičně obfhajfící proud. Magnety opravdu můžeme objasnit pomocí permanentních proudů v atomech železa. Sflů účinkující na magnet na obr. 1.7 vyvolává tedy druhý člen ve vztahu (1.1)



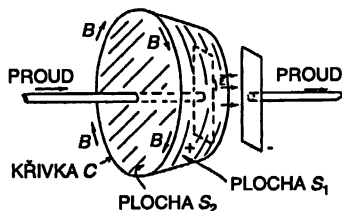
Obr. 1.9 Tyčový magnet na obr. 1.6 je možné nahradit cívkou s elektrickým proudem. Na vodič přitom působí podobná síla.

Odkud se tyto proudy berou? Jednou z možností je, že z pohybu elektronů v atomových orbitách. To však není případ železa, třebaže to tak v některých látkách je. Kromě oběhu v atomu se elektron otáčí i kolem své vlastní osy (nějak podobně jako vlastní rotace Země) a právě tento pohyb, tzv. spin elektronu, vytváří magnetické pole v případě železa. (Říkáme, že je to „něco podobného“ jako vlastní rotace Země, protože tento problém zasahuje tak hluboko do kvantové mechaniky, že klasické představy opravdu příliš dobře nevystihují tyto poměry.) Ve většině látek se některé elektrony otáčejí jedním směrem, kdežto jiné směrem opačným, takže jejich magnetizmus se vyruší. Ale v železe – ze záhadného důvodu, o němž budeme hovořit později – jsou osy otáčení mnoha elektronů uspořádány jedním směrem, a to je zdrojem magnetizmu.

Protože pole magnetů pocházejí z proudů, nemusíme do rovnice (1.8) nebo (1.9) přidávat žádný zvláštní člen zohledňující magnety. Stačí zahrnout všechny proudy včetně těch, které souvisejí se spiny elektronů, a zákon bude správně. Také byste si měli všimnout, že podle rovnice (1.8) neexistují magnetické „náboje“ analogické s elektrickými, vystupující na pravé straně rovnice (1.6). Žádné se nenašly.

První člen na pravé straně rovnice (1.9) objevil Maxwell čistě teoreticky a je velmi důležitý. Podle něj mají proměnlivá elektrická pole magnetické účinky. Pravda je, že bez tohoto členu by rovnice neměla smysl, protože bez něho by neexistovaly elektrické proudy v obvodech, které netvoří uzavřené smyčky. Ale, jak uvidíme na následujícím příkladě, takové proudy existují. Představme si kondenzátor skládající se ze dvou rovinných desek. Necht se nabíjí proudem směřujícím k jedné desce a vycházejícím z druhé z nich (obr. 1.10). Opišme okolo jednoho z přívodů křivku C , jejíž vnitřek vyplníme plochou S_1 , která přetíná vodič (viz obrázek). Podle (1.9) je cirkulace B podél C určena proudem ve vodiči. Ale co když vnitřek křivky C vyplníme jinou plochou S_2 , která má tvar mísy a prochází mezi deskami kondenzátoru, přičemž se nikde nedotýká vodiče. Touto plochou jistě neprochází žádný proud. A zajisté změna umístění myšlené plochy nezmění reálné magnetické pole! Cirkulace pole B se tedy nesmí změnit. První člen na pravé straně rovnice (1.9) se ve skutečnosti kombinuje s druhým členem tak, aby složením daly shodné výsledky pro obě plochy S_1 a S_2 . V případě S_2 se cirkulace B udává pomocí rychlosti změny toku pole E mezi deskami kondenzátoru. Vychází, že změna E je právě v takovém poměru

k proudu, aby rovnice (1.9) byla správná. Maxwell viděl tuto potřebu a byl prvním, kdo napsal úplnou rovnici.



Obr. 1.10 Cirkulace vektoru B po křivce C je určena buď proudem procházejícím plochou S_1 nebo rychlostí změny toku vektoru E plochou S_2 .

Zařízením znázorněným na obr. 1.6 můžeme demonstrovat další ze zákonů elektromagnetizmu. Odpojme konce zavěšeného vodiče od akumulátoru a připojme je ke galvanometru, který nám ukazuje, jestli vodičem protéká proud. Když vodič postrčíme do strany v magnetickém poli magnetu, zaznamenáme proud. Takový jev je opět dalším důsledkem vztahu (1.1) – na elektrony ve vodiči působí síla $F = qv \times B$. Elektrony mají příčnou rychlost, neboť se pohybují s vodičem. Rychlost v v kombinaci se svislým B magnetu vyvolává sílu působící na elektrony v podélném směru (vzhledem k vodiči) a uvádí je do pohybu ke galvanometru.

Předpokládejme však, že vodič necháme v klidu a pohybujeme magnetem. Na základě principu relativity se domníváme, že by v tom neměl být žádný rozdíl. A opravdu, na galvanometru pozorujeme podobný proud. Jak působí magnetické pole na náboje, které se nepohybují? Podle vztahu (1.1) tam musí být elektrické pole. Pohybující se magnet musí vytvořit elektrické pole. Jak k tomu dojde, popisuje kvantitativně rovnice (1.7). Tato rovnice popisuje mnoho prakticky důležitých úkazů, např. ty, které se vyskytují v elektrických generátorech a transformátorech.

Nejpozoruhodnějším důsledkem našich rovnic je, že spojením rovnic (1.7) a (1.9) lze vysvětlit vyzářování elektromagnetických vln na velké vzdálenosti. Příčina spočívá zhruba v tomto: Předpokládejme, že někde máme vzrůstající magnetické pole, třeba proto, že jsme např. najednou zapnuli proud ve vodiči. Potom se podle rovnice (1.7) musí objevit cirkulace elektrického pole. Když elektrické pole postupně vzrůstá a vytváří svou cirkulaci, bude se podle rovnice (1.9) generovat magnetická cirkulace. Ale nárůst *tohoto* magnetického pole způsobí vznik nové cirkulace elektrického pole atd. Takto si pole razí svou cestu prostorem, aniž by potřebovala náboje nebo proudy někde jinde než ve svém zdroji. Tím způsobem jeden druhého vidíme! To všechno obsahují rovnice elektromagnetických polí.

1.5 CO JSOU POLE?

Nyní uděláme několik poznámek o našem způsobu náhledu na tuto otázku. Mohli byste namítnout: „Celá ta záležitost s toky a cirkulacemi je velmi abstraktní. V každém bodu prostoru existují elektrická pole, kromě toho platí určité zákony. Ale co se *opravdu* děje? Proč to nemůžete vysvětlit např. tím, ať už je to cokoliv, co prochází mezi náboji?“ Problém je ve vašich předsudcích. Mnozí fyzici říkají, že přímé působení bez něčeho mezi působícími objekty je nemyslitelné. (Jak to mohli označit za nemyslitelnou ideu, když už byla vymyšlena?) Říkají: „Podívejte se, jediné síly, které známe, jsou přímým působením jednoho kousku látky na jiný. Je nemožné, aby existovala síla, jejíž přenos nic nezprostředkuje.“ Ale co se ve skutečnosti děje, když zkoumáme „přímé

působení“ jednoho kusu látky na druhý? Zjistíme, že nejde o bezprostřední dotyk obou kusů, kusy jsou od sebe trochu vzdálené a uplatňují se mezi nimi elektrické síly, působící v malém měřítku. Tak docházíme k tomu, že působení ve formě přímého dotyku máme vysvětlovat pomocí elektrických sil. Zajisté by nebylo rozumné trvat na tom, že elektrická síla má vypadat jako staré známé odtlačování nebo přitahování pomocí svalů, zejména když se ukazuje, že svalové účinky je třeba vykládat jako elektrické síly! Jediná otázka, která má smysl, je, jaký způsob popisu elektrických sil je *nejvhodnější*. Někteří lidé si je vykládají jako působení nábojů na dálku a používají přitom složitý zákon. Jiní si obľbili siločáry. Celou dobu kreslí siločáry a psát vektory E a B je podle nich příliš abstraktní. Siločáry jsou však jen hrubým způsobem popisu pole a je velmi těžké podat správné kvantitativní zákony bezprostředně pomocí siločar. Kromě toho pojem siločar neobsahuje nejhlubší princip elektrodynamiky – princip superpozice. I když víme, jak vypadají siločáry pro jednu množinu nábojů a jak vypadají pro jinou množinu nábojů, neuděláme si z toho žádnou představu o obraze siločar v případě, že množiny působí najednou. Naproti tomu z matematického hlediska je superpozice jednoduchá – prostě sečteme dva vektory. Určitou předností siločar je, že poskytují názorný obraz, ale mají také nevýhody. Způsob uvažování pomocí přímé interakce má velké výhody, když se uvažuje o elektrických nábojích v klidu, ale má také velké nevýhody, jde-li o náboje v rychlém pohybu.

Nejlepším způsobem je používat abstraktní pojem pole. To, že je abstraktní, je nepřijemné, ale nevyhnutelné. Pokusy popisovat elektrické pole jako pohyb nějakých ozubených koleček, pomocí siločar nebo napětí v nějaké látce si vyžádaly větší úsilí fyziků, než by stačilo na samotné nalezení správných odpovědí na problémy elektrodynamiky. Je zajímavé, že správné rovnice o chování světla v krystalech vypracoval McCullough už r. 1843. Lidé mu však říkali: „Dobře, ale taková reálná látka, jejíž mechanické vlastnosti by mohly vyhovovat těmto rovnicím, neexistuje, a protože světlo je vlnění, které musí kmitat v něčem, nemůžeme těmto abstraktním rovnicím věřit.“ Kdyby lidé byli bývali méně zaujatí, mohli by uvěřit správným rovnicím chování světla o mnoho dříve.

Co se týče magnetického pole, můžeme udělat následující poznámku: Předpokládejme, že jste nakonec úspěšně vytvořili obraz magnetického pole pomocí nějakého druhu siločar nebo koleček rychle se otáčejících v prostoru. Pokuste se potom vysvětlit, co se stane se dvěma náboji pohybujícími se v prostoru rovnoběžně stejnou rychlostí. Protože se pohybují, budou se chovat jako dva proudy a každý z nich bude mít svoje magnetické pole (podobně jako proudy ve vodičích na obr. 1.8). Pozorovatel, který by se pohyboval spolu s náboji, by je však vnímal jako stojící a tvrdil by, že magnetické pole *není*. Ozubená kolečka anebo siločáry tedy zmizí, když se pohybujete spolu s objektem! Jediné co jsme udělali je, že jsme vytvořili nový problém. Jak mohou ozubená kola zmizet? Lidé, kteří kreslí siločáry, se dostávají do podobných těžkostí. Nejen, že není možné říci, zda se siločáry s náboji pohybují anebo ne, ale můžou v určitých souřadnicových soustavách zcela zmizet.

To, co bychom ještě chtěli říct, je, že magnetizmus je skutečně relativistickým efektem. V právě uvažovaném případě dvou rovnoběžně se pohybujících nábojů lze očekávat, že bude třeba udělat relativistické korekce k jejich pohybu pomocí členů řádu v^2/c^2 . Tyto korekce musí odpovídat magnetické síle. Ale co se silou mezi dvěma vodiči v našem pokusu (obr. 1.8)? Tam je magnetická síla jedinou působící silou. Nevypadá jako „relativistická korekce“. Kromě toho, odhadneme-li rychlosti elektronů ve vodiči (to můžete udělat sami), zjistíme, že jejich střední rychlost podél vodiče je asi 0,01 cm/s. Takže v^2/c^2 je asi 10^{-25} . Určitě zanedbatelná „korekce“. Ale není! Ačkoli magnetická síla je v tomto případě 10^{-25} „normální“ elektrické síly mezi pohybujícími se elektrony, vzpomeňme si, že „normální“ elektrické síly vymizely v důsledku téměř dokonalého vyrovná-

ní – neboť vodiče mají stejný počet protonů i elektronů. Rovnováha je mnohem přesnější než $1/10^{25}$ a malý relativistický člen, který nazýváme magnetickou silou, je jediným členem, který zůstal, a stává se tak dominantním.

Právě téměř dokonalé vzájemné vyrušení elektrických sil umožnilo zkoumat relativistické efekty, tj. magnetizmus, a objevit správné rovnice s přesností v^2/c^2 , i když fyzici *nevěděli*, co se ve skutečnosti děje. A právě proto, když byla objevena teorie relativity, elektromagnetické zákony se nemusely měnit. Na rozdíl od mechaniky už byly správné s přesností v^2/c^2 .

1.6 ELEKTROMAGNETIZMUS VE VĚDĚ A V TECHNICE

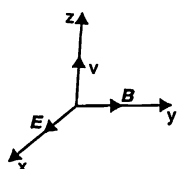
Tuto kapitolu zakončíme poukázáním na to, že mezi mnohými jevy, které zkoumali Řekové, byly dva velmi neobvyklé. Když třete kousek jantaru, můžete jím zvednout malé kousky papýru. Dále to byl podivný kámen z okolí města Magnesia v Malé Asii, který přitahoval železo. Je těžké si představit, že toto byly jediné dva Řekům známé úkazy, v nichž se projevují elektrické a magnetické účinky. Důvod, že to opravdu byly jediné dva úkazy, které byly tehdy známy, spočívá především ve fantastické přesnosti vyrovnání nábojů, o níž jsme se zmínili dříve. Práce vědců, kteří přišli po Řecích kteří objevovali jeden nový jev za druhým, byly vlastně jen různými aspekty těchto vlastností jantaru a magnetovce. Dnes si uvědomujeme, že i jevy chemické interakce a konec konců i samotného života je třeba objasňovat pomocí elektromagnetizmu.

Současně s tím, jak se vyvíjelo chápání elektromagnetizmu, se objevily také technické možnosti, o nichž se lidem dříve nesnilo. Stalo se možným posílat zprávy telegrafem na velké vzdálenosti, mluvit s člověkem, který je na kilometry vzdálený, bez jakýchkoliv spojů v meziprostoru. Vznikly obrovské energetické soustavy. Velká vodní turbína spojená stovkami kilometrů drátů se vzdáleným elektromotorem udržuje jeho otáčky ve svém rytmu, tisíce a tisíce vodičů se rozvětvují, desítky tisíc motorů na desetitisících místech pohánjí stroje v průmyslu i domácnostech, to vše se otáčí a funguje díky poznání zákonů elektromagnetizmu.

Dnes prakticky využíváme i nejjemnější efekty. Elektrické síly, jakkoliv mohutné, mohou být i velmi slabé a můžeme je řídit a mnoha způsoby využívat. Naše přístroje jsou tak citlivé, že to, co člověk dělá, můžeme rozpoznat podle toho, jak ovlivňuje elektrony v tenké kovové tyči vzdálené stovky kilometrů od něj. Jediné co potřebujeme, je použít tyč jako anténu televizního přijímače.

Z dlouhodobého pohledu historie lidstva, tak, jak se bude jevit, například, za deset tisíc let, lze sotva pochybovat, že Maxwellův objev zákonů elektrodynamiky bude hodnocen jako nejvýznamnější událost 19. století. V porovnání s touto důležitou vědeckou událostí upadne americká občanská válka z téhož desetiletí do provinční bezvýznamnosti.

PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 1.1 ■ Síly elektrické a gravitační.
- Jakou hmotnost by musel mít proton, aby přitažlivá gravitační síla mezi dvěma protony v klidu měla stejnou velikost jako síla jejich elektrického odpuzování? Jaký je poměr této hmotnosti ke skutečné hmotnosti protonu?
 - Jak velká by byla elektrostatická síla mezi dvěma měděnými mincemi o hmotnosti 1 g, které by se nacházely v posluchárně na opačných koncích stolu ve vzdálenosti 10 m, kdyby se elektrické náboje jader a elektronů v těchto mincích kompenzovaly pouze s přesností 1 %? Můžete si představit těleso, jehož tíha by odpovídala takové síle?
- 1.2 ■ Odhadněte přibližně práci, kterou je třeba vynaložit na překonání sil elektrického odpuzování při vytváření jádra uranu ze dvou stejných polovin. Čemu je rovna tato práce při syntéze jádra helia ze dvou deuteronů? Oba výsledky vyjádřete v kilowatthodinách na kilogram.
- 1.3 ■ Na každý atom mědi připadá jeden vodivostní elektron. Jaká je střední rychlost vodivostních elektronů, protéká-li měděným vodičem o průměru 0,2 mm proud 10 A? Čemu je přitom roven poměr v^2/c^2 ? (Připomeňme, že právě takový je poměr mezi magnetickými a elektrickými účinky.)
- 1.4 ■ V určité oblasti prostoru je vytvořeno homogenní elektrické pole E o intenzitě 10 000 V/cm mířící ve směru osy x a dále homogenní magnetické pole B ve směru osy y . Touto oblastí prochází ve směru osy z přímočaře svazek mionů rychlostí $c/3$ (viz obrázek).
- 
- Jaká je velikost magnetické indukce B ? (Hmotnost nabitého mionu je 207 krát větší než hmotnost elektronu a jeho náboj má stejnou velikost jako náboj elektronu.)
 - Lze pomocí tohoto pokusu určit znamení náboje mionu?
- 1.5 ■ a) V určité oblasti prostoru je vytvořeno konstantní a homogenní magnetické pole o složkách $B_x = 0$, $B_y = 0$, $B_z = B_0$. Elektrická pole ani proudy v této oblasti nejsou. Z počátku souřadnic vylétá v kladném směru osy x rychlostí v částice o hmotnosti m a s kladným nábojem q . Určete trajektorii této částice.
- Předpokládejte, že $B_x = 0$, $B_y = 0$ a $B_z = B_0 + ax$, kde ax je všude mnohem menší než B_0 . Popište kvalitativně trajektorii částice. Takové pole použil G. Charpak se spolupracovníky v jednom důležitém experimentu – viz Phys. Rev. Lett., 6, 128 (1961).
 - Ukažte, že magnetické pole takového druhu nevyhovuje Maxwellovým rovnicím, je-li ohraničeno v konečném objemu nebo, jak jsme předpokládali, v tomto objemu nejsou přítomny elektrické pole ani proudy.
- 1.6 ■ V poli nehybného záporného bodového náboje umístěného v počátku souřadnic a zároveň v homogenním magnetickém poli B_0 mířícím v kladném směru osy z se z bodu $x = z = 0$, $y = a$ pohybuje částice o hmotnosti m s kladným nábojem q a malou rychlostí $v = v_0 e_x$.
- Při jaké hodnotě magnetické indukce B_0 bude trajektorie částice představovat kružnici poloměru a se středem v počátku souřadnic?
 - Vysvětlete, proč v případě, kdy se magnetická indukce od této hodnoty odlišuje, závisí rychlost částice jen na její vzdálenosti od počátku souřadnic.
 - Nakreslete schematicky několik závitů trajektorie částice, začíná-li částice svůj pohyb v bodě $x = z = 0$, $y = a$ s nulovou počáteční rychlostí.

Diferenciální počet vektorových polí

- 2.1 CHÁPÁNÍ FYZIKY
- 2.2 SKALÁRNÍ A VEKTOROVÁ POLE – T A h
- 2.3 DERIVACE POLÍ – GRADIENT
- 2.4 OPERÁTOR ∇
- 2.5 OPERACE S OPERÁTOREM ∇
- 2.6 DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE PROUDĚNÍ TEPLA
- 2.7 DRUHÉ DERIVACE VEKTOROVÝCH POLÍ
- 2.8 NÁSTRAHY

2.1 CHÁPÁNÍ FYZIKY

Přečtěte si znovu: kapitolu 11, díl 1, Vektory

Fyzik potřebuje mít schopnost zkoumat problémy z několika hledisek. Exaktní analýza reálných fyzikálních problémů je obvykle velmi složitá. Jakákoliv konkrétní fyzikální situace se může ukázat příliš spletitou na to, aby bylo možné ji analyzovat přímo řešením diferenciálních rovnic. Přesto lze získat velmi dobrou představu o chování systému, má-li fyzik určitou schopnost vycítit charakter řešení v různých situacích. Přitom jsou velice prospěšné takové představy jako siločáry, kapacita, odpor a indukce. Proto strávíme mnoho času při jejich analýze. Tím získáme cit pro to, co se v různých situacích děje. Na straně druhé ani jeden z heuristických modelů, takových, jako jsou siločáry, není adekvátní skutečnosti a přesný ve všech situacích. Existuje pouze jediný způsob formulace zákonů, a to pomocí diferenciálních rovnic. Předností rovnic je jejich fundamentálnost, a pokud je nám známo, i přesnost. Jestliže jste se naučili diferenciální rovnice, vždy se k nim můžete vrátit. Neexistuje přitom nic, co by bylo třeba se odnaučit.

Pochopit, co se v různých situacích děje, vám zabere určitý čas. Budete muset řešit rovnice. Pokaždé, když řešíte rovnice, se něco dozvíte o charakteru řešení. Abyste si tato řešení zapamatovali, bude také užitečné zkoumat, co znamenají z hlediska siločar a dalších pojmů. To je cesta, kterou rovnicím opravdu „porozumíte“. V tom je rozdíl mezi matematikou a fyzikou. Matematici, anebo lidé s vyvinutým matematickým myšlením, často při „studiu“ fyziky sejdou s cestou, protože fyziku ztrácejí ze zřetele. Říkájí: „Podívejte se, tyto diferenciální rovnice – Maxwellovy rovnice – představují vše, co se v elektrodynamice vyskytuje; samotní fyzikové přiznávají, že není nic, co by nebylo obsaženo v těchto rovnicích. Jsou to složité rovnice, ale jde konec konců jen o matematické rovnice, a když jim porozumím matematicky, budu chápat i jejich fyziku.“ Tak tomu však není. Matematici, kteří studují fyziku s tímto přístupem, a takoví jsou mnozí z nich, obvykle přispívají fyzice málo a opravdu málo i matematice. Selžou, protože skutečné fyzikální situace v reálném světě jsou tak složité, že je nevyhnutelné je chápat v mnohem širším kontextu.

Co opravdu znamená pochopit rovnici, tj. více než ve striktně matematickém smyslu, vyjádřil Dirac. Řekl: „Rozumím tomu, co rovnice znamená, umím-li určit vlastnosti jejího řešení, aniž bych ji ve skutečnosti řešil.“ Ovládáme-li tedy způsob, jak se dovědět, co se děje v daných situacích, aniž bychom rovnice skutečně řešili, „chápeme“ rovnice v aplikaci na tyto situace. Fyzikální chápání je naprosto nematematické, nepřesné a neexaktní, ale pro fyziku naprosto nevyhnutelné.

Kurz, jako je tento, bývá obvykle založen na postupném budování fyzikálních představ – začíná jednoduchými situacemi a pokračuje situacemi stále složitějšími. Vyžaduje to, abyste neustále zapomínali věci, které jste se naučili dříve – věci, jež platí v určitých situacích, ale neplatí obecně. Například „zákon“, že elektrická síla se mění s druhou mocninou vzdálenosti, neplatí *vždy*. My dáváme přednost opačnému postupu. Raději napřed probereme *úplné* zákony a pak budeme postupovat zpět a aplikovat je na jednotlivé situace, se souběžným rozvíjením fyzikálních představ. A to je to, co se chystáme dělat nyní.

Náš přístup je úplným opakem historického přístupu, při němž se předmět podává na základě experimentů, které o něm poskytly informaci. Předmět fyziky však budovalo velmi mnoho bystrých lidí během uplynulých více než 200 let, a protože my máme na nabytí informací jen omezenou dobu, není v našich silách probrat vše, co udělali oni. Bohužel, jedno z toho, co přitom bude zřejmě chybět v těchto přednáškách, je historický, experimentální postup. Je naděje, že je možné nahradit tento nedostatek v určité míře laboratorními cvičeními. Vše, co musíme pustit ze zřetele, si můžete také doplnit čtením encyklopedií, v nichž se občas vyskytují historické články o elektřině a o jiných oblastech fyziky. Historickou informaci najdete také v mnoha učebnicích elektřiny a magnetizmu.

2.2 SKALÁRNÍ A VEKTOROVÁ POLE – T a h

Nyní začneme s abstraktním, matematickým pohledem na teorii elektřiny a magnetizmu. Základní myšlenkou je vysvětlit význam zákonů formulovaných v kapitole 1. Ale abychom to udělali, musíme nejdříve vysvětlit novou a zvláštní symboliku, kterou chceme použít. Takže na chvíli zapomeňme na elektromagnetismus a věnujme se matematice vektorových polí. Je velmi důležitá nejen pro elektromagnetismus, ale pro všechny druhy fyzikálních situací. Diferenciální počet vektorů je pro všechna odvětví fyziky stejně důležitý jako obyčejný diferenciální a integrální počet. Tak se do toho pusťme.

Dále uvádíme několik faktů z vektorové algebry, přičemž předpokládáme, že je již znáte:

$$A \cdot B = \text{skalár} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (2.1)$$

$$A \times B = \text{vektor} \quad (2.2)$$

$$(A \times B)_z = A_x B_y - A_y B_x$$

$$(A \times B)_x = A_y B_z - A_z B_y$$

$$(A \times B)_y = A_z B_x - A_x B_z$$

$$A \times A = 0 \quad (2.3)$$

$$A \cdot (A \times B) = 0 \quad (2.4)$$

$$A \cdot (B \times C) = (A \times B) \cdot C \quad (2.5)$$

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B). \quad (2.6)$$

Budeme potřebovat následující dvě rovnosti z diferenciálního počtu:

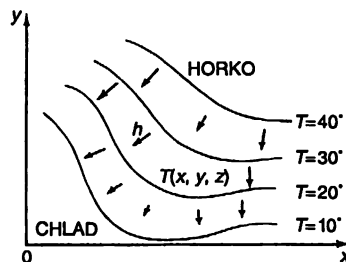
$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}. \quad (2.8)$$

První rovnost (2.7) platí, samozřejmě, pouze v limitě, když Δx , Δy a Δz se blíží nule.

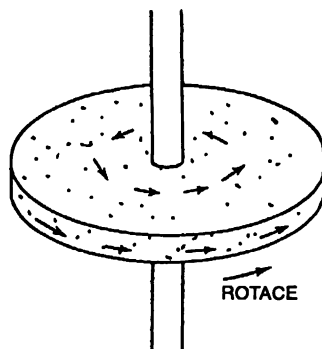
Nejjednodušší možné fyzikální pole je skalární pole. Polem, jak si vzpomínáte, nazýváme veličinu, která závisí na poloze v prostoru. *Skalárním polem* chápeme pole, jež je v každém bodě charakterizováno pouze jedním číslem – skalárem. Toto číslo se však může s časem měnit, ale nyní se tím nemusíme znepokojovat. Budeme mluvit o tom, jak vypadá pole v daném okamžiku. Jako příklad skalárního pole uvádíme tuhé těleso, které se na některých místech zahřívá a na ostatních chladí, takže teplota se v něm mění od bodu k bodu složitým způsobem. Teplota pak bude funkcí x , y a z , tj. polohy v prostoru, udávané v pravouhlé souřadnicové soustavě. Teplota je skalárním polem.

Jeden způsob zkoumání skalárních polí využívá představy myšlených ploch proložených body se stejnými hodnotami pole, právě tak jako vrstevnice na mapě spojují místa se stejnou výškou. V případě teplotního pole se tyto plochy nazývají izotermickými hladinami nebo izotermami. *Obrázek 2.1* zobrazuje teplotní pole a ukazuje závislost T na x a y při $z = 0$. Je nakresleno několik izoterm.



Obr. 2.1 Teplota je příkladem skalárního pole. Každému bodu (x, y, z) v prostoru je přiřazeno číslo $T(x, y, z)$. Všechny body na ploše označené $T=20^\circ\text{C}$ (zobrazené jako křivka při $z=0$) mají stejnou teplotu. Šipky jsou ukázkami hustoty tepelného toku h .

Existují i vektorová pole. Jejich podstata je velmi jednoduchá. V každém bodě prostoru je dán vektor, který se mění od bodu k bodu. Jako příklad vezměme rotující těleso. Rychlost látky, tvořící těleso, je v každém bodě vektor, který je funkcí polohy (obr. 2.2). V druhém příkladě uvažujme o hustotě tepelného toku v tělese. Je-li na jednom místě teplota vysoká a na jiném nízká, nastane proudění tepla z teplejších míst do chladnějších. V různých částech uvažovaného tělesa bude teplo proudit různými směry. Hustota tepelného toku je veličina, která se vyznačuje směrem. Označme ji h . Její velikost je měrou proudícího tepla. Vektor hustoty tepelného toku je vyznačen pro několik poloh i na obr. 2.1.

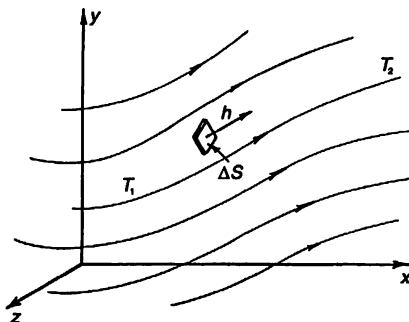


Obr. 2.2 Rychlost atomů v rotujícím tělese je příkladem vektorového pole

Definujme h přesněji. Velikost vektoru hustoty tepelného toku udává tepelnou energii, která projde infinitezimálním plošným elementem postaveným kolmo na směr toku za jednotku času přepočtenou na jednotku plochy. Vektor má směr toku (obr. 2.3). Vyjádříme to v symbolech: je-li ΔP tepelná energie, která projde za jednotku času elementární ploškou ΔS , pak

$$h = \frac{\Delta P}{\Delta S} e_t, \quad (2.9)$$

kde e_t je jednotkový vektor ve směru toku.

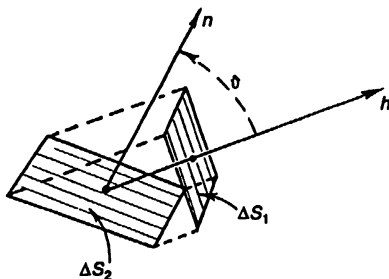


Obr. 2.3 Hustota tepelného toku představuje vektorové pole. Vektor h ukazuje směr proudění. Jeho velikost je rovna energii, která za jednotku času projde elementární ploškou postavenou kolmo na směr proudění, vydělené obsahem této plošky.

Vektor h je možno definovat i jiným způsobem – pomocí jeho složek. Ptejme se, kolik tepla projde malou ploškou postavenou pod libovolným úhlem vzhledem k toku. Obr. 2.4 znázorňuje

plošku ΔS_2 skloněnou pod úhlem ϑ k plošce ΔS_1 kolmé na tok. *Jednotkový vektor* n je kolmý na plošku ΔS_2 . Vektory n a h svírají úhel ϑ (neboť h je kolmé na ΔS_1). Jaká je nyní hustota tepelného toku ploškou ΔS_2 ? Tok ploškou ΔS_2 je stejný jako ploškou ΔS_1 , pouze velikosti obou plošek jsou odlišné, a to $\Delta S_1 = \Delta S_2 \cos \vartheta$. Hustota toku ploškou ΔS_2 je

$$\frac{\Delta P}{\Delta S_2} = \frac{\Delta P}{\Delta S_1} \cos \vartheta = h \cdot n. \quad (2.10)$$



Obr. 2.4 Tepelný tok ploškou ΔS_2 je stejný jako tepelný tok ploškou ΔS_1 .

Tuto rovnici interpretujeme tak, že hustotu tepelného toku h (teplo prošlé za jednotku času jednotkovou plochou) libovolnou elementární ploškou, jejíž jednotkový normálový vektor je n , udává výraz $h \cdot n$. Taktéž bychom mohli říci: složka hustoty tepelného toku kolmá na elementární plošku ΔS_2 je $h \cdot n$. Chceme-li, můžeme považovat tyto výroky za *definice* h . Stejně představy použijeme i pro jiná vektorová pole.

2.3 DERIVACE POLÍ – GRADIENT

Mění-li se pole s časem, je možné udávat tyto změny pomocí jejich derivace podle času. Podobným způsobem chceme popsat jejich změny v závislosti na poloze, protože se, řekněme, zajímáme o vztah teploty v jednom místě k teplotě v sousedním místě. Jak vypočteme derivaci teploty podle polohy? Máme derivovat podle x ? Nebo podle y , nebo z ?

Užitečné fyzikální zákony nezávisí na orientaci souřadnicové soustavy. Proto se musí zapisovat ve tvaru, v němž jsou obě strany buď skaláry nebo vektory. Co je derivace skalárního pole, například $\partial T / \partial x$? Je to skalár, vektor nebo něco jiného? Můžeme se snadno přesvědčit, že to není ani skalár ani vektor, neboť vezmeme-li jinou osu x , $\partial T / \partial x$ se jistě změní. Ale všimněte si, že máme tři možné derivace: $\partial T / \partial x$, $\partial T / \partial y$, $\partial T / \partial z$. Protože existují tři derivace a víme, že tři čísla tvoří vektor, tyto tři derivace by mohly představovat složky jednoho vektoru:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) \stackrel{?}{=} \text{vektor}. \quad (2.11)$$

Samozřejmě, ne každá tři čísla obecně tvoří vektor. Je tomu tak pouze tehdy, když při pootočení souřadnicové soustavy se složky vektoru správně transformují. Proto je nevyhnutelné prozkoumat, jak se naše tři derivace změní při otočení souřadnicové soustavy. Ukážeme, že (2.11) je skutečně vektorem. Při otáčení souřadnicové soustavy se derivace transformují správně.

Můžeme se o tom přesvědčit několika způsoby. Jeden způsob je položit si takovou otázku, na niž lze odpovědět nezávisle na souřadnicové soustavě, a pokusit se vyjádřit odpověď v „invariantním“ tvaru. Například jsou-li A a B vektory a $S = A \cdot B$, víme, neboť jsme to dokázali v 11. kapitole 1. dílu, že S je skalárem. I bez zjišťování víme, zda se S mění se změnou souřadnicových soustav. Nemůže, neboť jde o skalární součin dvou vektorů. Podobně víme-li, že A je vektorem a máme tři čísla B_1 , B_2 a B_3 , o kterých zjistíme, že

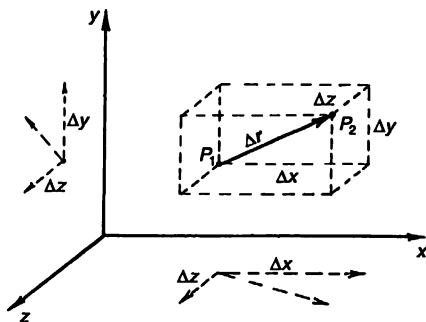
$$A_x B_1 + A_y B_2 + A_z B_3 = S, \quad (2.12)$$

kde S je totéž pro libovolnou souřadnicovou soustavu, pak tři čísla B_1 , B_2 , B_3 jsou nutně složkami B_x , B_y , B_z nějakého vektoru B .

Zvažme případ teplotního pole. Vezměme dva body P_1 a P_2 v malé vzdálenosti Δr od sebe. Teplota v P_1 je T_1 a v P_2 je T_2 s rozdílem $\Delta T = T_2 - T_1$. Teploty v těchto reálných, fyzikálních bodech určitě nezávisí na volbě os souřadnic. Konkrétně ΔT je číslo nezávislé na souřadnicové soustavě. Je to skalár.

Zvolíme-li nějakou vhodnou soustavu souřadnicových os, můžeme napsat $T_1 = T(x, y, z)$ a $T_2 = T(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, kde Δx , Δy , Δz jsou složky vektoru Δr (obr. 2.5). Vzhledem k rovnosti (2.7) můžeme psát

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial T}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial T}{\partial z} \Delta z. \quad (2.13)$$



Obr. 2.5 Vektor Δr , jehož složky jsou Δx , Δy a Δz

Levá strana rovnosti (2.13) je skalárem. Pravá je součtem tří součinů obsahujících jako součinitele Δx , Δy , Δz , které jsou složkami vektoru. Z toho vyplývá, že tři čísla

$$\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}$$

představují také x -ovou, y -ovou a z -ovou složku nějakého vektoru. Pro tento nový vektor použijeme symbol ∇T . Symbol ∇ (nazvaný „nabla“) je převráceným Δ a má nám připomínat derivování. ∇T se čte různě: „nabla T “ nebo „gradient T “ nebo „grad T “;

$$\text{grad } T = \nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)^3. \quad (2.14)$$

Použitím této symboliky můžeme rovnost (2.13) přepsat na kompaktnější tvar

$$\Delta T = \nabla T \cdot \Delta r. \quad (2.15)$$

Tento vztah, vyjádřený slovy, říká, že rozdíl teplot ve dvou sousedních bodech je roven skalárnímu součinu gradientu T a rozdílu polohových vektorů obou bodů. Tvar (2.15) také jasně ilustruje již uvedený důkaz, že ∇T je opravdu vektorem.

Stále ještě nejste přesvědčeni? Dokážeme si to jinak. (Ale budete-li se pozorně dívat, můžete zjistit, že fakticky jde o tentýž důkaz, jen ve zdlouhavější podobě!) Ukážeme, že složky ∇T se transformují stejně jako složky r . Pokud ano, ∇T je vektor podle naší původní definice vektoru z 11. kapitoly 1. dílu. Vezměme novou souřadnicovou soustavu x', y', z' a v této nové soustavě vypočtěme $\partial T / \partial x', \partial T / \partial y', \partial T / \partial z'$. Abychom si to trochu zjednodušili, položíme $z = z'$, takže souřadnici z již nemusíme brát v úvahu. (Obecný případ si můžete vyřešit sami.)

Uvažujme o soustavě $x'y'$ pootočené o úhel ϑ vzhledem k soustavě xy (obr. 2.6a). Souřadnice bodu (x, y) vyjádřené v čárkované soustavě jsou

$$x' = x \cos \vartheta + y \sin \vartheta \quad (2.16)$$

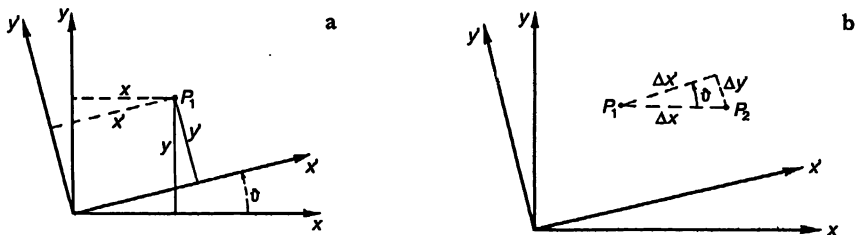
$$y' = -x \sin \vartheta + y \cos \vartheta, \quad (2.17)$$

vyjádříme-li x a y

$$x = x' \cos \vartheta - y' \sin \vartheta \quad (2.18)$$

$$y = x' \sin \vartheta + y' \cos \vartheta. \quad (2.19)$$

Transformuje-li se nějaká dvojice čísel podle těchto rovnic stejně jako x a y , jde o složky vektoru.



Obr. 2.6 a) Transformace do pootočené souřadnicové soustavy.

b) Speciální případ, v němž je vektor Δr rovnoběžný s osou x .

3) V naší symbolice představuje výraz (a, b, c) vektor se složkami a, b, c . Používáte-li rádi jednotkové vektory i, j, k , můžete psát

$$\nabla T = i \frac{\partial T}{\partial x} + j \frac{\partial T}{\partial y} + k \frac{\partial T}{\partial z}.$$

Nyní si všimněme rozdílu teplot ve dvou sousedních bodech P_1 , P_2 , zvolených tak, jak to znázorňuje *obr. 2.6b*. Při výpočtu v souřadnicích x a y , můžeme psát

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x} \Delta x, \quad (2.20)$$

neboť $\Delta y = 0$.

A výpočet v čárkované soustavě? Tam bychom psali

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x'} \Delta x' + \frac{\partial T}{\partial y'} \Delta y'. \quad (2.21)$$

Podíváme-li se na *obr. 2.6b*, vidíme, že

$$\Delta x' = \Delta x \cos \vartheta \quad (2.22)$$

a

$$\Delta y' = -\Delta x \sin \vartheta, \quad (2.23)$$

neboť $\Delta y'$ je záporné při kladném Δx . Dosazením těchto výrazů do (2.21) dostaneme

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x'} \Delta x \cos \vartheta - \frac{\partial T}{\partial y'} \Delta x \sin \vartheta \quad (2.24)$$

$$= \left(\frac{\partial T}{\partial x'} \cos \vartheta - \frac{\partial T}{\partial y'} \sin \vartheta \right) \Delta x. \quad (2.25)$$

Porovnáním (2.25) s (2.2) zjistíme, že

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x'} \cos \vartheta - \frac{\partial T}{\partial y'} \sin \vartheta. \quad (2.26)$$

Podle tohoto vztahu $\partial T / \partial x$ dostaneme z $\partial T / \partial x'$ a $\partial T / \partial y'$ právě tak, jako x z x' a y' (vztah 2.18). $\partial T / \partial x$ je tedy x -ovou složkou vektoru. Podobné úvahy by ukázaly, že $\partial T / \partial y$ je jeho y -ová a $\partial T / \partial z$ jeho z -ová složka. ∇T je zajiště vektorem. Jde o vektorové pole odvozené ze skalárního pole T .

2.4 OPERÁTOR ∇

Nyní můžeme udělat něco, co je nanejvýš zábavné a důvtipné – a charakteristické pro to, co dělá matematiku krásnou. Důkaz, že grad T nebo ∇T je vektorem, nezávisí na tom, jaké skalární pole jsme derivovali. Všechny úvahy by byly stejné i tehdy, kdyby se T zaměnilo za jakékoliv jiné skalární pole. Protože transformační rovnice jsou stejné bez ohledu na to, co derivujeme, mohli bychom T vynechat a nahradit rovnicí (2.26) operátorovou rovnicí

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \cos \vartheta - \frac{\partial}{\partial y'} \sin \vartheta. \quad (2.27)$$

Ponecháme přitom operátory, jak řekl Jeans, „hladové po derivování“.

Protože diferenciální operátory samotné se transformují stejně jako složky vektoru, můžeme je nazvat složkami *vektorového operátoru*. Můžeme psát

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (2.28)$$

což samozřejmě znamená, že

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.29)$$

Gradient jsme abstrahovali od T – *to je obdivuhodná idea*.

Samozřejmě, vždy si musíte pamatovat, že ∇ je operátorem. Samotné neznamená nic. Neznamená-li ale samotné ∇ nic, co znamená, vynásobíme-li jej skalárem, např. T , na součin $T\nabla$? (Vektor lze násobit skalárem vždy.) To stále ještě nemá žádný význam. Jeho x -ová složka je

$$T \frac{\partial}{\partial x}, \quad (2.30)$$

což není číslo, ale opět nějaký operátor. Avšak shodně s vektorovou algebrou budeme i $T\nabla$ nazývat vektorem.

Vynásobme ∇ skalárem z druhé strany, abychom dostali součin (∇T) . V běžné algebře

$$TA = AT. \quad (2.31)$$

Ale musíme si uvědomit, že operátorová algebra je trochu odlišná od vektorové algebry. S operátory vždy musíme dodržovat správné pořadí, aby operace s nimi měly ten pravý smysl. Nebudete mít problémy, když si zapamatujete, že operátor ∇ podléhá stejné konvenci jako symbol derivování. Co se má derivovat, musí se umístit napravo od ∇ . Pořadí je důležité.

Uvědomíme-li si význam pořadí, pochopíme, že $T\nabla$ je operátorem, zatímco součin ∇T už není „hladovým“ operátorem, neboť už se nasytil. Je to opravdový fyzikální vektor v pravém slova smyslu. Představuje rychlost změny T v prostoru. x -ová složka ∇T udává, jak rychle se mění T ve směru x . Jaký směr má vektor ∇T ? Víme, že rychlost změny T v nějakém směru udává složka vektoru ∇T v tomto směru (viz vztah 2.15) Z toho vyplývá, že ∇T směřuje tam, kde má největší možnou složku – jinými slovy, směrem, v němž se T mění nejrychleji. Gradient T má směr nejrychlejšího zvětšování veličiny T .

2.5 OPERACE S OPERÁTOREM ∇

Je možné s vektorovým operátorem ∇ provádět nějaké jiné algebraické operace? Pokusme se kombinovat jej s nějakým vektorem. Dva vektory se kombinují vytvářením skalárního součinu. Mohli bychom vytvořit dva součiny

$$(\text{vektor}) \cdot \nabla \quad \text{nebo} \quad \nabla \cdot (\text{vektor}).$$

První součin zatím neznamená nic, protože je to stále pouhý operátor. Jeho konečný smysl by závisel na tom, na co se má aplikovat. Druhý součin je jakési skalární pole. ($A \cdot B$ je vždy skalárem.)

Prozkoumejme skalární součin operátoru ∇ s vektorovým polem, které známe, např. \mathbf{h} . Vypíšeme ho ve složkách

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = \nabla_x h_x + \nabla_y h_y + \nabla_z h_z \quad (2.32)$$

nebo

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z}. \quad (2.33)$$

Tento součet je invariantní vzhledem k transformaci souřadnic. Kdybychom zvolili jinou souřadnicovou soustavu (označenou čárkami), dostali bychom⁴⁾

$$\nabla' \cdot \mathbf{h} = \frac{\partial h_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial h_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial h_{z'}}{\partial z'}, \quad (2.34)$$

což je *totéž* číslo, které bychom dostali ze vztahu (2.33), přestože tento vztah vypadá jinak. To znamená, že

$$\nabla' \cdot \mathbf{h} = \nabla \cdot \mathbf{h} \quad (2.35)$$

pro každý bod prostoru. Tedy $\nabla \cdot \mathbf{h}$ je skalární pole, které musí reprezentovat nějakou fyzikální veličinu. Musíte si uvědomit, že kombinace derivací v $\nabla \cdot \mathbf{h}$ je dost specifická. Existují jiné rozmanité kombinace, např. $\partial h_y / \partial x$, které nejsou ani skaláry, ani složkami vektorů.

Skalární veličina $\nabla \cdot \mathbf{h}$ (vektor) je ve fyzice neobyčejně užitečná. Byla nazvána *divergencí* ($\text{div } \mathbf{h}$). Například

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = \text{div } \mathbf{h} = \text{„divergence } \mathbf{h}\text{“}. \quad (2.36)$$

Podobně jako v případě ∇T můžeme najít fyzikální význam i pro $\nabla \times \mathbf{h}$. Odložíme to však na později.

Nejdříve se chceme podívat, co můžeme ještě vymyslet pomocí vektorového operátoru ∇ . Jak je to s jeho vektorovým součinem? Je třeba očekávat, že

$$(\nabla \times \mathbf{h}) = \text{vektor}. \quad (2.37)$$

Složky tohoto vektoru můžeme rozepsat podle obvyčejného pravidla pro vektorové součiny (viz vzorec 2.2):

$$(\nabla \times \mathbf{h})_z = \nabla_x h_y - \nabla_y h_x = \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y}. \quad (2.38)$$

Podobně

⁴⁾ Na \mathbf{h} se díváme jako na fyzikální veličinu, která závisí na poloze v prostoru, a ne, přesně vzato, jako na matematickou funkci tří proměnných. Když je \mathbf{h} „derivováno“ podle x , y a z nebo podle x' , y' a z' , je třeba nejdříve vyjádřit matematický výraz pro \mathbf{h} jako funkci příslušných proměnných. Proto v této nové souřadnicové soustavě neoznačujeme \mathbf{h} čárkou.

$$(\nabla \times \mathbf{h})_x = \nabla_y h_z - \nabla_z h_y = \frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z} \quad (2.39)$$

$$(\nabla \times \mathbf{h})_y = \nabla_z h_x - \nabla_x h_z = \frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x}. \quad (2.40)$$

Kombinace $\nabla \times \mathbf{h}$ se nazývá *rotace h* (rot \mathbf{h}). O příčině tohoto pojmenování a o fyzikálním významu této kombinace pojednáme později.

Celkově tedy máme tři různé kombinace, v nichž vystupuje operátor ∇ :

Celkem

$$\nabla T = \text{grad } T = \text{vektor}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = \text{div } \mathbf{h} = \text{skalár}$$

$$\nabla \times \mathbf{h} = \text{rot } \mathbf{h} = \text{vektor.}$$

Pomocí těchto kombinací můžeme popsat prostorové změny polí ve vhodném tvaru, tj. obecném tvaru, nezávislém na nějaké souřadnicové soustavě.

Jako příklad použití našeho vektorového diferenciálního operátoru ∇ napíšeme soustavu vektorových rovnic obsahujících tytéž zákony elektromagnetizmu, které jsme slovně uvedli v kapitole 1. Nazývají se Maxwellovy rovnice.

Maxwellovy rovnice

$$1. \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$2. \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$3. \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

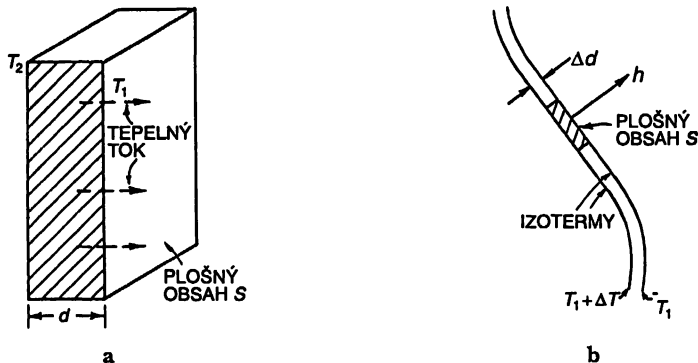
$$4. \quad c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}, \quad (2.41)$$

kde ρ (r6) je hustota elektrického náboje, tj. množství náboje v jednotce objemu, \mathbf{j} je hustota elektrického proudu, tj. množství náboje, které proteče jednotkovou plochou za sekundu. Tyto čtyři rovnice obsahují úplnou klasickou teorii elektromagnetického pole. Vidíte, jakého elegantního a jednoduchého zápisu můžeme dosáhnout pomocí naší nové symboliky.

2.6 DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE PROUDĚNÍ TEPLA

Uveďme jiný příklad fyzikálního zákona napsaného ve vektorové symbolice. Není to obecně platný zákon, ale pro mnohé kovy a mnoho dalších látek, jež jsou vodiči tepla, je dost přesný. Víte,

že vezmete-li kus materiálu v podobě desky a jeho čelní stěnu zahřejete na teplotu T_2 , zatímco protilehlou stěnu ochladíte na odlišnou teplotu T_1 , materiálem bude proudit teplo ve směru od T_2 k T_1 (obr. 2.7a).



Obr. 2.7 a) Tepelný tok deskou.

b) Infinitesimální destička rovnoběžná s izotermickou hladinou ve velkém kuse látky

Tepelný tok je přímo úměrný plošnému obsahu S stěn i rozdílu teplot $T_2 - T_1$ a nepřímo úměrný vzdálenosti d mezi stěnami. (Pro daný rozdíl teplot platí, že čím tenčí je deska, tím větší je tepelný tok.) Nechť P je tepelná energie, která projde deskou za jednotku času. Potom můžeme napsat

$$P = \lambda (T_2 - T_1) \frac{S}{d}. \quad (2.42)$$

Konstanta úměrnosti λ (lambda) se nazývá *součinitel tepelné vodivosti*.

Co se stane ve složitějším případě, řekněme v tělese nepravidelného tvaru, v jehož objemu se teplota různě mění? Uvažujme kousíček tělesa a představme si v něm takovou destičku, jaká je nakreslená na obr. 2.7a, ale v miniaturním měřítku. Nasměrujme její čelní stěny rovnoběžně s izotermickými hladinami (obr. 2.7b), takže pro destičku bude platit vztah (2.42).

Je-li plošný obsah čelní stěny destičky ΔS , je tepelný tok

$$\Delta P = \lambda \Delta T \frac{\Delta S}{\Delta d}, \quad (2.43)$$

kde Δd je tloušťka destičky. $\Delta P/\Delta S$ jsme definovali jako velikost vektoru h ležícího ve směru tepelného toku. Teplo bude proudit od $T_1 + \Delta T$ k T_1 a tudíž kolmo na izotermy (obr. 2.7b). $\Delta T/\Delta d$ udává dále právě rychlost změny T při změně polohy. Protože poloha se mění ve směru kolmém na izotermy, naše $\Delta T/\Delta d$ udává maximální rychlost změny T , a tedy velikost vektoru ∇T . Protože směr ∇T je opačný než směr h , vztah (2.43) zapsaný pomocí vektorů bude vypadat takto:

$$h = -\lambda \nabla T. \quad (2.44)$$

(Záporné znaménko je nutné, neboť teplo proudí ve směru poklesu teploty.) Vztah (2.44) je diferenciální rovnicí vedení tepla v masivních tělesech. Vidíte, že jde o skutečnou vektorovou

rovnici. Každá její strana je vektor, je-li λ jen číslo. Je zobecněním speciálního vztahu (2.42) pro pravoúhlé desky na libovolné případy. Později bychom se měli naučit psát všechny takové vztahy elementární fyziky jako (2.42) v obecné vektorové symbolice. Tato symbolika je užitečná nejen proto, že v ní rovnice *vypadají* jednodušeji, ale i proto, že nejjasněji ukazuje *fyzikální obsah* rovnic bez odvolávání na nějakou libovolně zvolenou souřadnicovou soustavu.

2.7 DRUHÉ DERIVACE VEKTOROVÝCH POLÍ

Dosud jsme měli pouze první derivace. Proč se však nezabývat i druhými derivacemi? Mohli bychom sestavit několik kombinací:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \nabla \cdot (\nabla T) \\ \text{b) } & \nabla \times (\nabla T) \\ \text{c) } & \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{h}) \\ \text{d) } & \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{h}) \\ \text{e) } & \nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Můžete se přesvědčit, že to jsou všechny možné kombinace.

Podívejme se nejdříve na druhou z nich, tj. na b). Má stejný tvar jako

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{A} T) = (\mathbf{A} \times \mathbf{A}) T = 0,$$

neboť $(\mathbf{A} \times \mathbf{A})$ je vždy 0. Z toho tedy vyplývá, že

$$\text{rot}(\text{grad } T) = \nabla \times (\nabla T) = 0. \quad (2.46)$$

Jak dochází k této rovnosti, můžeme vidět, když si výraz b) napíšeme ve složkách:

$$[\nabla \times (\nabla T)]_z = \nabla_x (\nabla T)_y - \nabla_y (\nabla T)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (2.47)$$

což je 0 podle rovnosti (2.8). Stejně je to pro další složky. $\nabla \times (\nabla T) = 0$ tedy platí pro jakékoliv rozdělení teploty – dokonce pro *jakoukoliv* skalární funkci.

Vezměme si jiný příklad. Podívejme se, zda se podaří dostat i jiný výraz rovný nule. Skalární součin vektoru s vektorovým součinem obsahující tentýž vektor dává nulu

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0, \quad (2.48)$$

neboť $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ je kolmé na \mathbf{A} a jeho složka ve směru \mathbf{A} je tedy nulová. Stejná kombinace se vyskytuje v (2.45d), a tak dostáváme

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{h}) = \text{div}(\text{rot } \mathbf{h}) = 0. \quad (2.49)$$

Snadno se opět ukáže, že je to 0, zapíšeli-li se naznačené operace ve složkách.

Nyní zformulujeme dvě matematické věty, které nebudeme dokazovat. Jsou to velice zajímavé věty a je pro fyziky užitečné je znát.

Ve fyzikálních úlohách často zjistíme, že rotace nějaké veličiny, řekněme vektorového pole A , je nula. Viděli jsme (rovnost 2.46), že rotace gradientu je rovna nule, což se vzhledem k vlastnostem vektorů dobře pamatuje. Bylo by tedy dobře možné, aby bylo A gradientem nějaké veličiny; jeho rotace by pak byla nutně nulová. Platí zajímavá věta, podle které, je-li $\text{rot } A$ rovna nule, je A *vždy* gradientem něčeho, a tedy existuje určité skalární pole ψ (psf) takové, že A je rovno grad ψ . Jinými slovy platí následující věta

VĚTA:

$$\text{Je-li } \nabla \times A = 0, \text{ existuje } \psi \text{ takové, že } A = \nabla \psi. \quad (2.50)$$

Podobná věta platí i v případě, že $\text{div } A$ je rovna nule. Rovnost (2.49) říká, že divergence rotace něčeho je vždy nula. Setkáte-li se s vektorovým polem D , přičemž $\text{div } D$ je rovna nule, můžete z toho usoudit, že D je rotací nějakého vektorového pole C .

VĚTA:

$$\text{Je-li } \nabla \cdot D = 0, \text{ existuje } C \text{ takové, že } D = \nabla \times C. \quad (2.51)$$

Při zkoumání možných kombinací dvou operátorů ∇ jsme zjistili, že dvě z nich dávají vždy nulu. Podívejme se nyní na ty, které nejsou nulové. Vezměme kombinaci $\nabla \cdot (\nabla T)$, která byla v našem záznamu napsaná jako první. Obecně nulu nedává. Vypíšeme složky:

$$\nabla T = (\nabla_x T, \nabla_y T, \nabla_z T).$$

Potom

$$\nabla \cdot (\nabla T) = \nabla_x (\nabla_x T) + \nabla_y (\nabla_y T) + \nabla_z (\nabla_z T) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad (2.52)$$

z čehož v obecném případě dostaneme nějaké číslo. Jde o skalární pole.

Vidíte, že není třeba ani dávat závorky a aniž bychom riskovali záměnu, můžeme psát

$$\nabla \cdot (\nabla T) = \nabla \cdot \nabla T = (\nabla \cdot \nabla) T = \nabla^2 T. \quad (2.53)$$

Na ∇^2 se díváme jako na nový operátor. Je to skalární operátor. Protože se ve fyzice vyskytuje často, dostal i zvláštní pojmenování – *Laplaceův operátor*.⁵⁾

$$\text{Laplaceův operátor} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.54)$$

Protože Laplaceův operátor je skalárním operátorem, můžeme jím působit i na vektor – myslíme tím tutéž operaci na každou složku vektoru v pravouhlé souřadnicové soustavě:

$$\nabla^2 \mathbf{h} = (\nabla^2 h_x, \nabla^2 h_y, \nabla^2 h_z).$$

⁵⁾ V naší literatuře se Laplaceův operátor („laplasián“) většinou označuje symbolem Δ . Nesmí se ovšem zaměňovat s malým přírůstkem Δ (delta). (Pozn. red.)

Podívejme se na další možnost, kterou je (2.45e), tj. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h})$. Vzhledem k vektorové rovnosti (2.6)

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (2.55)$$

můžeme rotaci vyjádřit jinak. Při použití (2.55) musíme \mathbf{A} a \mathbf{B} nahradit operátorem ∇ a položit $\mathbf{C} = \mathbf{h}$. Provedeme-li to, dostaneme

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) - \mathbf{h}(\nabla \cdot \nabla) \dots ???$$

Okamžik! Něco je špatně. První dva členy jsou totiž vektory, jak to má být (operátory v nich jsou „nasycené“), ale poslední člen není v pořádku. Má stále charakter operátoru. Chyba je v tom, že jsme nebyli dost pozorní při dodržování pořadí symbolů v zápisech našich členů. Když si znovu všimnete rovnosti (2.55), zjistíte, že bychom ji mohli stejně dobře napsat ve tvaru:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}. \quad (2.56)$$

Pořadí členů teď vypadá líp. Provedme naši substituci do (2.56). Dostáváme

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{h}.$$

Tento tvar se zdá být v pořádku. Skutečně je správný, o tom se můžete přesvědčit výpočtem složek. Poslední člen je Laplaceův operátor a tak můžeme stejně dobře napsat

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) - \nabla^2 \mathbf{h}. \quad (2.58)$$

Již jsme se zmínili o všech kombinacích v našem seznamu výrazů (2.45) s dvojitým operátorem ∇ s výjimkou případu c), tj. $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{h})$. To je přípustné vektorové pole, ale nic zvláštního se o něm říci nedá. Jde pouze o určité vektorové pole, které se může příležitostně vyskytnout.

Bude vhodné, když naše závěry shrneme:

- a) $\nabla \cdot (\nabla T) = \nabla^2 T =$ skalární pole
- b) $\nabla \times (\nabla T) = 0$
- c) $\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{h}) =$ vektorové pole
- d) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{h}) = 0$
- e) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) - \nabla^2 \mathbf{h}$
- f) $(\nabla \cdot \nabla) \mathbf{h} = \nabla^2 \mathbf{h} =$ vektorové pole. (2.59)

Snad jste si všimli, že jsme se nepokusili zavést nový operátor $\nabla \times \nabla$. Víte také proč?

2.8 NÁSTRAHY

Naši znalost obvyklé vektorové algebry jsme aplikovali na algebru operátoru ∇ . Musíme přitom však být opatrní, neboť se můžeme dostat na scesti. Zmíníme se o dvou nástrahách. V tomto kursu se však nevyskytnou. Co byste řekli následujícímu výrazu, který obsahuje dvě skalární funkce ψ a φ (fí):

$$(\nabla\psi) \times (\nabla\varphi)?$$

Asi byste chtěli prohlásit: musf to být nula, protože je to stejné jako

$$(Aa) \times (Ab),$$

což je rovno nule, neboť vektorový součin dvou *stejných* vektorů $A \times A$ je vždy nula. Ale v našem případě dva operátory ∇ nejsou stejné. První působí na jednu funkci, a to ψ , zatímco druhý působí na jinou funkci, tj. φ . Proto ačkoliv je označujeme tímtež symbolem ∇ , je třeba o nich uvažovat jako o odlišných operátorech. Je to pochopitelné, vždyť směr $\nabla\psi$ závisí na funkci ψ , a proto asi nebude rovnoběžný s $\nabla\varphi$.

$$(\nabla\psi) \times (\nabla\varphi) \neq 0 \text{ (obecně).}$$

My, naštěstí, nebudeme muset takové výrazy použít. (Co jsme právě řekli, nemění nic na faktu, že $\nabla \times \nabla\psi = 0$ pro jakékoli skalární pole, neboť zde působí oba operátory ∇ na stejnou funkci.)

Nástraha číslo dvě (které se opět v kurzu vyhneme) spočívá v tomto: Pravidla, která jsme tu uvedli, jsou jednoduchá a pěkná, když se použijí pravoúhlé souřadnice. Máme-li například $\nabla^2 h$ a potřebujeme složku x , hned píšeme

$$(\nabla^2 h)_x = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) h_x = \nabla^2 h_x. \quad (2.60)$$

Stejný výraz se však *nedá* napsat, kdybychom se ptali na *radiální* složku $\nabla^2 h$. Radiální složka $\nabla^2 h$ není rovna výrazu $\nabla^2 h_x$. Příčina je v tom, že máme-li co dělat s vektorovou algebrou, jsou směry všech vektorů plně určeny. Ale pokud jde o vektorová pole, jsou jejich směry v různých místech různé. Pokusíme-li se popsat vektorové pole, řekněme v polárních souřadnicích, to, co nazýváme radiálním směrem, se od bodu k bodu mění. Proto se můžeme dostat do velkých těžkostí, když začneme derivovat složky. Například i pro *konstantní* vektorové pole se radiální složka bod od bodu mění.

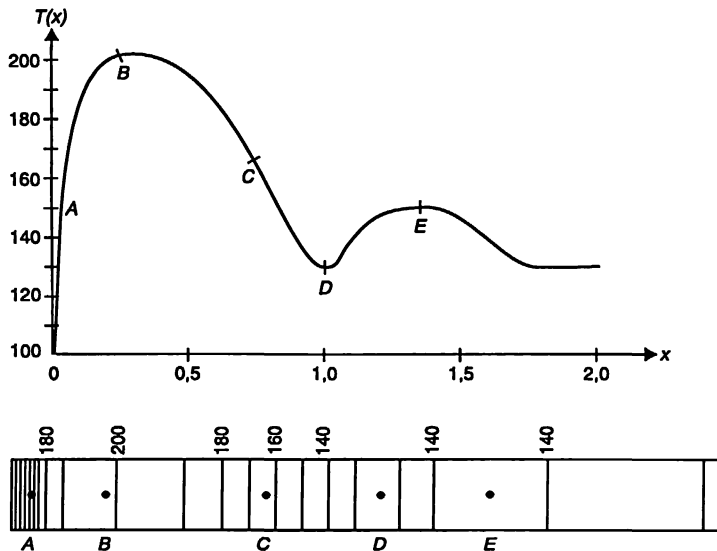
Obvykle je nejbezpečnější a nejjednodušší držet se pravoúhlých souřadnic a vyhnout se těžkostem. Je tu však jedna výjimka, která stojí za zmínku: Protože Laplaceův operátor ∇^2 je skalár, můžeme jej psát v souřadnicové soustavě jaké jen chceme (např. v polárních souřadnicích). Ale protože je to diferenciální operátor, smíme jej použít pouze na vektory, jejichž složky mají pevný směr, tj. na složky dané v pravoúhlé souřadnicové soustavě. Proto budeme-li naše vektorové diferenciální rovnice psát ve složkách, budeme všechna vektorová pole vyjadřovat pomocí jejich x -ových, y -ových a z -ových složek.

PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 2.1 ■ Měděný drát poloměru $a = 1$ mm je pokryt homogenní vrstvou izolace, jejíž vnější poloměr je roven b . Drát se zahřívá elektrickým proudem na teplotu T_1 , při čemž teplota vnějšího povrchu izolační vrstvy T_2 zůstává téměř rovna pokojové teplotě.
- a) Čemu je roven gradient teploty uvnitř vrstvy? Odpověď vyjádřete v proměnných a , b , T_1 a T_2 .
- b) Čemu je roven rozdíl teplot $T_1 - T_2$, protéká-li měděným drátem pokrytým vrstvou pryže o tloušťce 0,2 cm proud 20 A? Koeficient tepelné vodivosti izolační vrstvy je $\lambda = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ W} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.
- 2.2 ■ Výpočtem „spatru“ ukažte, že
- a) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
- b) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$
- 2.3 ■ Ukažte, že je-li R polohový vektor vedoucí z počátku souřadnic do bodu x, y, z , platí pro $R \neq 0$
- a) $\nabla \cdot \mathbf{R} = 3$,
- b) $\nabla \times \mathbf{R} = 0$,
- c) $\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) = 0$,
- d) $\nabla \times \left(\frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) = 0$,
- e) $\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\mathbf{R}}{R^2}$,
- f) Ze vztahu b) a rovnice (2.46) plyne, že vektor R lze vyjádřit jako $R = \nabla \varphi$. Určete funkci φ .
- 2.4 ■ Maxwellovy rovnice mají tvar
- $$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1)$$
- $$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2)$$
- $$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3)$$
- $$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{J}}{\epsilon_0}. \quad (4)$$
- Zákon zachování náboje lze zapsat jako $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$.
- a) Ukažte, že rovnice (3) a (2) jsou kompatibilní.
- b) Ukažte, že rovnice (5) může být získána tak, že provedeme operaci divergence na levé a pravé straně rovnice (4). Tím se přesvědčíte, že Maxwellovy rovnice platí pouze tehdy, je-li splněn zákon zachování elektrického náboje.
- c) Ukažte, že ve vakuu ($\mathbf{J} = 0$, $\rho = 0$) pole \mathbf{E} vyhovuje vlnové rovnici $\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$.
- d) Ukažte, že ve vakuu pole \mathbf{B} vyhovuje téže vlnové rovnici $\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0$.
- e) Ukažte, že podle rovnice (2) je pole \mathbf{E} možno vyjádřit jako $\mathbf{E} = -\nabla \varphi - (\partial \mathbf{A} / \partial t)$, kde \mathbf{A} je vektorový potenciál magnetického pole $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Proč se vektor \mathbf{B} dá takto vyjádřit?
- 2.5 ■ Nechť $\mathbf{v}(x, y, z)$ je pole rychlostí tuhého tělesa, které rotuje kolem nějaké osy. Ukažte, že
- a) $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$
- b) $\nabla \times \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}$, kde $\boldsymbol{\omega}$ je vektor úhlové rychlosti.
- 2.6 ■ Ukažte přímým výpočtem, že pro konstantní vektor \mathbf{A} a polohový vektor \mathbf{R} platí $\text{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{R}) = 2\mathbf{A}$. Dosadíme-li však do dobře známého vzorce $\mathbf{B} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})\mathbf{C}$ místo vektorů

B a C formálně ∇ a R , dostaneme nesprávný výsledek $\nabla \times (A \times R) = A(\nabla \cdot R) - (\nabla \cdot A)R = 3A$. Jak je to možné?

- 2.7 ■ Dlouhá ocelová tyč byla podrobena tepelnému zpracování a v určitém okamžiku poté, co začala chladnout, se podél tyče ustavilo rozložení teploty $T(x)$, jaké vidíme na horním obrázku. Izotermny v intervalech 10°C jsou zobrazeny na dolním obrázku



Předpokládejme, že teplota v každém místě tyče závisí jen na jeho vzdálenosti x od konce. Nakreslete v bodech A, B, C vektory jejichž směr a velikost souhlasí se směrem a velikostí gradientu teploty. V kterém z pěti vyznačených bodů je divergence hustoty tepelného toku h maximální? Ve kterých z těchto pěti bodů je $\nabla \times h = 0$?

Integrální počet vektorových polí

- 3.1 VEKTOROVÉ INTEGRÁLY. KŘIVKOVÝ INTEGRÁL $\nabla\psi$
- 3.2 TOK VEKTOROVÉHO POLE
- 3.3 TOK POVRCHEM KRYCHLE. GAUSSOVA VĚTA
- 3.4 TEPELNÁ VODIVOST. ROVNICE DIFÚZE
- 3.5 CIRKULACE VEKTOROVÉHO POLE
- 3.6 CIRKULACE PO OBVODU ČTVERCE.
STOKESOVA VĚTA
- 3.7 POLE S NULOVOU ROTACÍ A DIVERGENCÍ
- 3.8 SHRNUTÍ

3.1 VEKTOROVÉ INTEGRÁLY. KŘIVKOVÝ INTEGRÁL $\nabla\psi$

V kapitole 2 jsme viděli, že existují různé způsoby derivování polí. Některé vedou k vektorovým polím, jiné dávají pole skalární. Ačkoliv jsme odvodili mnoho různých vzorců, vše, co je v kapitole 2, lze shrnout do jediného pravidla: operátory $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ a $\partial/\partial z$ představují tři složky vektorového operátoru ∇ . Rádi bychom nyní trochu vnikli do významu derivací polí. Potom získáme lepší cit pro to, co znamená vektorová rovnice pole.

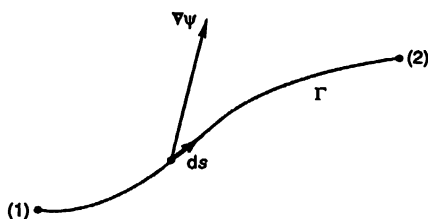
Již jsme se zmínili o významu operace gradient (∇ působí na skalár). Teď se budeme zajímat o význam operací divergence a rotace. Interpretovat tyto veličiny je možné nejlépe pomocí určitých vektorových integrálů a rovnic, které uvádějí tyto integrály do souvislosti. Bohužel, tyto rovnice nelze získat z vektorové algebry nějakou snadnou substitucí. Proto se je budete muset učit jako něco nového. Jeden z těchto integrálních vztahů je prakticky triviální, ale další dva nejsou. Odvodíme je a objasníme, co z nich vyplývá. Rovnice, které budeme studovat, představují vlastně matematické věty. Užitečné budou nejen při interpretování významu a obsahu divergence

a rotace, ale i při vypracování obecných fyzikálních teorií. Tyto matematické věty jsou pro teorii polí tím, čím je zákon zachování energie pro mechaniku částic. Takové obecné věty, jako jsou tyto, jsou důležité pro hlubší porozumění fyziky. Uvidíte však, že při řešení úloh z nich mnoho užítku není (s výjimkou nejjednodušších případů). I tak je potěšující, že na začátku našeho výkladu se setkáme s mnoha jednoduchými úlohami, řešitelnými pomocí těchto tří integrálních vzorců, které budeme nyní probírat. Uvidíme však, že sotva se úlohy stanou těžšími, nebudeme moci tyto jednoduché metody použít.

Nejdříve si vezměme integrální vzorec s gradientem. Obsahuje velmi jednoduchou myšlenku: Protože gradient představuje rychlost změny veličiny mající charakter pole, integrujeme-li tuto rychlost změny, dostaneme celkovou změnu. Předpokládejme, že máme skalární pole $\psi(x, y, z)$. Funkce ψ bude mít v nějakých dvou bodech (1) a (2) hodnoty $\psi(1)$, resp. $\psi(2)$. [Používáme pohodlnou symboliku, ve které (2) představuje bod (x_2, y_2, z_2) a $\psi(2)$ znamená totéž jako $\psi(x_2, y_2, z_2)$.] Je-li Γ (gama) nějaká křivka spojující body (1) a (2) (obr. 3.1), platí následující vztah:

VĚTA 1.

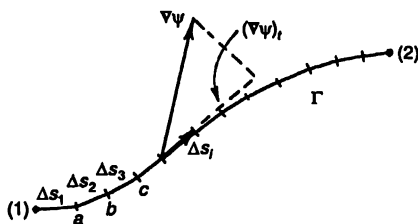
$$\psi(2) - \psi(1) = \int_{\text{po } \Gamma}^{(2)} (\nabla\psi) \cdot ds. \quad (3.1)$$



Obr. 3.1 Význam veličin vystupujících v rovnosti (3.1). Vektor $\nabla\psi$ se vztahuje k elementu ds .

Jde o *křivkový integrál* z (1) do (2) skalárního součinu $\nabla\psi$ (vektor) a ds [jiný vektor – infinitezimální element křivky Γ , orientovaný ve směru postupu z (1) do (2) po křivce Γ].

Nejdříve bychom měli vysvětlit, co rozumíme křivkovým integrálem. Uvažujme skalární funkci $f(x, y, z)$ a křivku Γ spojující dva body (1) a (2). Vyznačme na křivce nějaký počet bodů a sousední body spojujeme tak, jak ukazuje obr. 3.2. Délku jednotlivých úseček označme Δs_i , kde i je index, který nabývá hodnot 1, 2, 3, ...



Obr. 3.2 Křivkový integrál je limitou součtu

Křivkovým integrálem

$$\int_{\text{po } \Gamma}^{(2)} f ds$$

rozumíme limitu součtu

$$\sum_i f_i \Delta s_i,$$

kde f_i je hodnota funkce pro i -tou úsečkou. Limitní hodnota je to, čemu se součet blíží, přidáváme-li víc a víc úseček (takovým způsobem, aby největší $\Delta s_i \rightarrow 0$).

Integrál v naší větě (vztah 3.1) znamená totéž, ačkoli vypadá trochu jinak. Namísto f máme jiný skalár – složku $\nabla\psi$ ve směru Δs . Označíme-li tuto tangenciální složku $(\nabla\psi)_i$, je jasné, že

$$(\nabla\psi)_i \Delta s = (\nabla\psi) \cdot \Delta s. \quad (3.2)$$

Integrál v (3.1) představuje sumu takovýchto členů.

Nyní se podívejme na to, proč rovnost (3.1) platí. V kapitole 1 jsme ukázali, že složka $\nabla\psi$ ve směru malého posunutí Δr udává rychlost změny ψ v tomto směru Δr . Uvažujme o úsečce Δs z bodu (1) do bodu a na obr. 3.2. Podle naší definice

$$\Delta\psi_1 = \psi(a) - \psi(1) = (\nabla\psi)_1 \cdot \Delta s_1. \quad (3.3)$$

Taktéž

$$\psi(b) - \psi(a) = (\nabla\psi)_2 \cdot \Delta s_2, \quad (3.4)$$

kde $(\nabla\psi)_1$ znamená, samozřejmě, gradient počítaný na úsečce Δs_1 a $(\nabla\psi)_2$ gradient počítaný na úsečce Δs_2 . Výpočtem rovností (3.3) a (3.4) dostaneme

$$\psi(b) - \psi(1) = (\nabla\psi)_1 \cdot \Delta s_1 + (\nabla\psi)_2 \cdot \Delta s_2. \quad (3.5)$$

Můžete se přesvědčit, že postupným přidáváním takovýchto členů dostaneme

$$\psi(2) - \psi(1) = \sum_i (\nabla\psi)_i \cdot \Delta s_i. \quad (3.6)$$

Levá strana nezávisí na tom, jak volíme naše intervaly (zůstávají-li body (1) a (2) stejné) takže můžeme vzít limitu druhé strany. Tím jsme dokázali rovnost (3.1)

Z našeho důkazu můžete vidět, že tato rovnost nezávisí ani na tom, jak zvolíme body a, b, c, \dots , ani na volbě křivky Γ spojující (1) a (2). Naše věta platí pro *jakoukoliv* křivku vedenou z (1) do (2).

Ještě jedna poznámka o označování: Uvidíte, že nevznikne žádný zmatek, budeme-li – pro pohodlí – psát

$$(\nabla\psi) \cdot ds = \nabla\psi \cdot ds. \quad (3.7)$$

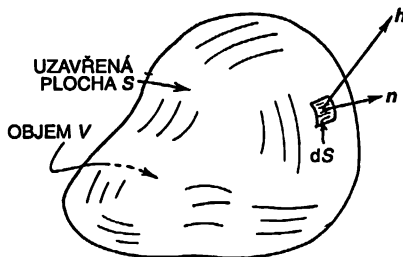
V tomto označení má naše věta tento tvar:

VĚTA 1.
$$\psi(2) - \psi(1) = \int_{(1)}^{(2)} \nabla\psi \cdot ds. \quad (3.8)$$
 jakákoli křivka od (1) do (2)

3.2 TOK VEKTOROVÉHO POLE

Dřív než se budeme zabývat naší další integrální větou, větou o divergenci, rádi bychom prozkoumali určitý pojem, jehož fyzikální význam je možno v případě tepelného toku snadno pochopit. Definovali jsme vektor h , představující teplo procházející jednotkovou plochou za

jednotkový čas. Předpokládejme, že uvnitř tělesa vyplněného látkou máme nějakou uzavřenou plochu S , která ohraničuje objem V (obr. 3.3). Chtěli bychom zjistit, kolik tepla vytéká z tohoto objemu. Můžeme to, pravda, dostat výpočtem celkového toku tepla plochou S .



Obr. 3.3 Uzavřená plocha S vymezuje objem V . Jednotkový vektor n udává vnější normálu k plošnému elementu dS a h je vektor hustoty tepelného toku pro uvažovaný plošný element.

Označme plošný obsah elementu plochy S jako dS . Tento symbol nahrazuje dvojrozměrný diferenciál. Kdyby šlo např. o plošku v rovině xy , platilo by

$$dS = dx dy.$$

Později se setkáme i s integrály počítanými přes objem. Pro ně je vhodné uvažovat diferenciální objem ve tvaru malého kvádru. Proto, když píšeme dV , myslíme tím

$$dV = dx dy dz.$$

Někteří lidé rádi píšou $d^2 S$ místo dS na znamení toho, že jde o veličinu dvojrozměrnou. Často píšou i $d^3 V$ místo dV . My budeme používat jednodušší označení v domnění, že si dokážete zapamatovat, že plocha má dva a objem tři rozměry.

Tok tepla elementární ploškou dS je roven jejímu plošnému obsahu vynásobenému složkou h kolmou na dS . Už jsme definovali n jako jednotkový vektor směřující pod pravým úhlem ven z plochy (obr. 3.3). Složka h , kterou potřebujeme, je

$$h_n = h \cdot n. \quad (3.9)$$

Tok ploškou dS pak je

$$h \cdot n dS. \quad (3.10)$$

Celkový tepelný tok jakoukoliv plochou dostaneme, sečteme-li příspěvky všech elementárních plošek vytvářejících plochu. Jinými slovy, integrujeme-li (3.10) přes celou plochu:

$$\text{Celkový tepelný tok plochou } S = \oint_S h \cdot n dS.^{6)} \quad (3.11)$$

Tento plošný integrál budeme také nazývat tokem plochou. Můžeme to chápat tak, že h je „hustota proudu“ tepelného toku a plošný integrál z ní je celkový proud tepla směřující ven z plochy za jednotku času (v joulech za sekundu).

⁶⁾ Malý kroužek na znaku integrálu znamená, že integrujeme přes uzavřenou plochu. (Pozn. red.)

Rádi bychom tuto ideu zobecnili na případ, kdy vektor nepředstavuje tok ničeho konkrétního; mohlo by jít například o elektrické pole. Kdybychom chtěli, jistě bychom mohli integrovat normálovou složku elektrického pole plochou. Ačkoli tu nejde o tok ničeho, nazýváme tuto veličinu „tokem“.

Říkáme:

$$\text{Tok vektoru } \mathbf{E} \text{ plochou } S = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (3.12)$$

Slovo tok zde používáme v obecném významu jako plošný integrál normálové složky vektoru. Stejnou definici budeme používat i tehdy, když uvažovaná plocha nebude uzavřená jako v tomto případě.

Vraťme se k případu tepelného toku a uvažujme situaci, v níž se *teplo zachovává*. Například si představme nějakou látku, ve které se po počátečním ohřevu tepelná energie dále ani neregeneruje, ani neabsorbuje. Existuje-li pak tok tepla uzavřenou plochou, musí tepelný obsah objemu vymezeného plochou klesat. Tedy v podmínkách, ve kterých se teplo zachovává, tvrdíme, že

$$\oint_S \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{dQ}{dt}, \quad (3.13)$$

kde Q je teplo uvnitř plochy. Tok tepla plochou S je roven rychlosti změny celkového tepla Q uvnitř S za čas, vzaté se záporným znaménkem. Takováto interpretace je možná, neboť hovoříme o tepelném toku a kromě toho jsme udělali předpoklad, že teplo se zachovává. O celkovém teple uvnitř nějakého objemu bychom nemohli hovořit, kdyby se v tomto objemu teplo generovalo.

Nyní poukážeme na zajímavou vlastnost toku jakéhokoliv vektoru. Chcete-li, můžete mít na mysli vektor tepelného toku, ale řekněme, bude platit pro jakékoliv vektorové pole \mathbf{C} . Představte si, že máme uzavřenou plochu S , která ohraničuje objem V . Rozdělme nyní objem V jakýmsi „řezem“ na dvě části (obr. 3.4). Dostaneme tím dvě uzavřené plochy a dva objemy. Objem V_1 ohraničuje plocha S_1 , která se skládá ze zbytku původní plochy S_a a plochy řezu S_{ab} . Objem V_2 ohraničuje plocha S_2 , která se skládá ze zbytku původní plochy S_b doplněné řezem S_{ab} . Položme si následující otázku: Předpokládejme, že vypočítáme tok z plochy S_1 a přičteme ho k toku z plochy S_2 . Je roven tento součet toku z celé plochy S , s níž jsme původně začínali? Odpověď zní, ano. Tok částí ploch S_{ab} , společnou oběma plochám S_1 a S_2 se přesně vyruší. Pro tok vektoru \mathbf{C} z objemu V_1 můžeme psát

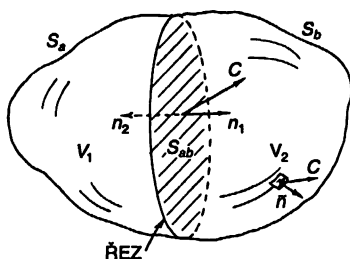
$$\text{tok plochou } S_1 = \int_{S_a} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_{ab}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_1 dS \quad (3.14)$$

a pro tok V_2

$$\text{tok plochou } S_2 = \int_{S_b} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_{ab}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_2 dS. \quad (3.15)$$

Všimněte si, že ve druhém integrálu jsme psali \mathbf{n}_1 pro vnější normálu k S_{ab} , patří-li tato k S_1 a \mathbf{n}_2 patří-li k S_2 , jak ukazuje obr. 3.4. Zřejmě $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$ takže

$$\int_{S_{ab}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_1 dS = -\int_{S_{ab}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}_2 dS. \quad (3.16)$$



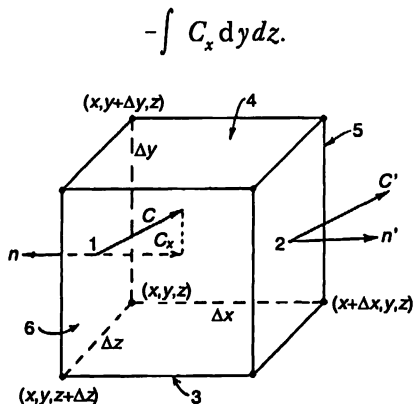
Obr. 3.4 Objem V uvnitř plochy S se řezem S_{ab} rozdělí na dvě části. Dostáváme tím objem V_1 vymezený plochou $S_1 = S_a + S_{ab}$ a objem V_2 vymezený plochou $S_2 = S_b + S_{ab}$.

Sečteme-li rovnosti (3.14) a (3.15), přesvědčíme se, že součet toku přes S_1 a S_2 je dán součtem dvou integrálů, které spolu dávají tok původní plochou $S = S_a + S_b$.

Vidíme, že o toku úplnou vnější plochou S je možné uvažovat jako o součtu toků dvou částí, na které se objem V rozdělil. Podobně můžeme dělit dále – například V_1 na dva objemy – a udělat stejné úvahy. Takto pro jakýkoliv způsob dělení původního objemu musí obecně platit, že tok vnější plochou, daný původním integrálem, je roven součtu toků ze všech jeho malých vnitřních částí.

3.3 TOK POVRCHEM KRYCHLE. GAUSSOVA VĚTA

Nyní si vezměme speciální případ malé krychle⁷⁾ a pro tok z ní najdeme zajímavý vzorec. Uvažujme krychli, jejíž hrany mají směr souřadnicových os tak, jako na obr. 3.5. Předpokládejme, že souřadnice vrcholu nejbližšího začátku souřadnicové soustavy jsou x, y, z . Necht Δx je délka hrany krychle ve směru osy x , Δy délka hrany ve směru osy y a Δz délka hrany ve směru osy z . Chceme najít tok vektorového pole C povrchem krychle. Dostaneme jej sečtením toků každou ze šesti stěn. Nejdříve uvažujme stěnu, na obrázku označenou jako 1. Tok směřující touto stěnou ven z krychle je dán integrálem záporně vzaté x -ové složky C plochou stěny:



Obr. 3.5 Výpočet toku pole C z malé krychle

⁷⁾ Následující odvození je možno použít stejně dobře pro jakýkoliv pravouhlý rovnoběžnostěn.

Protože máme *malou* krychli, můžeme tento integrál aproximovat hodnotou C_x ve středu stěny (označíme její jako bod 1) vynásobenou plošným obsahem stěny, tj. $\Delta y \Delta z$:

$$\text{tok z 1} = -C_x(1) \Delta y \Delta z.$$

Podobně napíšeme pro tok stěnou 2:

$$\text{tok z 2} = C_x(2) \Delta y \Delta z.$$

Obecně se $C_x(1)$ a $C_x(2)$ trochu liší. Je-li Δx dostatečně malé, můžeme psát

$$C_x(2) = C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x.$$

Na pravé straně tohoto vztahu bychom ve skutečnosti měli uvést víc členů. Všechny však budou obsahovat druhé a vyšší mocniny Δx , a proto, uvažujeme-li pouze limitní případ malého Δx , budou zanedbatelné. Takovým způsobem pro tok stěnou 2 vychází

$$\text{tok z 2} = \left[C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x \right] \Delta y \Delta z.$$

Sečtením toků stěnami 1 a 2 dostaneme

$$\text{tok z 1 a 2} = \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Derivace by se měla ve skutečnosti počítat ve středu stěny 1, tj. v bodu $[x, y + (\Delta y/2), z + (\Delta z/2)]$. Ale v limitním případě infinitezimální krychle uděláme pouze zanedbatelnou chybu, počítáme-li ji ve vrcholu (x, y, z) .

Provedeme-li stejné úvahy pro každý z dvou párů stěn, dostaneme

$$\text{tok z 3 a 4} = \frac{\partial C_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

a

$$\text{tok z 5 a 6} = \frac{\partial C_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Celkový tok všemi stěnami je součtem těchto členů. Dostáváme tedy

$$\int_{\text{krychle}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} \, dS = \left(\frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Součet derivací je právě $\nabla \cdot \mathbf{C}$ a dále $\Delta x \Delta y \Delta z = \Delta V$, tj. objem krychle. Takovýmto způsobem můžeme *pro infinitezimální krychli* psát

$$\int_{\text{krychle}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} \, dS = (\nabla \cdot \mathbf{C}) \Delta V. \quad (3.17)$$

Ukázali jsme, že tok z povrchu infinitezimální krychle ven je roven divergenci vektoru násobené objemem krychle. Nyní vidíme význam divergence vektoru. Divergence vektoru v bodu P je tok – vycházející „proud“ vektoru \mathbf{C} – připadající na jednotkový objem v okolí P .

Divergenci \mathbf{C} jsme uvedli do souvislosti s tokem \mathbf{C} z každého infinitezimálního objemu. V případě konečného objemu můžeme využít fakt, který jsme už dokázali, že celkový tok z objemu je součtem toků z každé jeho části. To znamená, že divergenci můžeme integrovat přes celý objem. Z toho vyplývá věta, že integrál normálové složky každého vektoru přes jakoukoliv uzavřenou plochu je možné zapsat jako integrál divergence tohoto vektoru přes objem uzavřený touto plochou. Tato věta byla pojmenována po Gaussovi.

GAUSSOVA VĚTA:

$$\oint_S \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{C}) \, dV, \quad (3.18)$$

kde S je jakákoliv uzavřená plocha a V je objem jí vymezený.

3.4 TEPELNÁ VODIVOST. ROVNICE DIFÚZE

Abychom se lépe seznámili s Gaussovou větou, uveďme nějaký případ jejího použití. Vezměme opět případ tepelného toku, například v kovu. Předpokládejme, že máme jednoduchou situaci, kdy všechno teplo bylo přivedeno už dříve a těleso se nyní pouze ochlazuje. Žádné zdroje tepla nejsou, takže teplo se zachovává. Kolik je potom tepla uvnitř určitého zvoleného objemu v libovolném čase? Množství tepla se musí *zmenšovat*, a to právě o množství, které vytéká z objemu jeho povrchem. Kdyby byl náš objem malou krychlí, podle vztahu (3.17) bychom napsali

$$\text{tok tepla} = \int_{\text{krychle}} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} \, dS = \nabla \cdot \mathbf{h} \Delta V. \quad (3.19)$$

Tato hodnota však musí být rovnat rychlosti, kterou se teplo ztratí z vnitřku krychle. Je-li q teplo připadající na jednotkový objem, $q \Delta V$ je teplo v krychli a rychlost jeho *úbytku* je

$$-\frac{d}{dt}(q \Delta V) = -\frac{dq}{dt} \Delta V. \quad (3.20)$$

Z porovnání (3.19) a (3.20) vidíme, že

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = -\frac{dq}{dt}. \quad (3.21)$$

Dobře si všimněte tvaru této rovnice, neboť ve fyzice se vyskytuje často. Vyjadřuje zákon zachování, v tomto případě zákon zachování tepla. Ve vztahu (3.13) jsme tentýž fyzikální jev vyjádřili jiným způsobem. Zde máme *diferenciální* tvar zákona zachování, zatímco rovnost (3.13) představuje jeho *integrální* tvar.

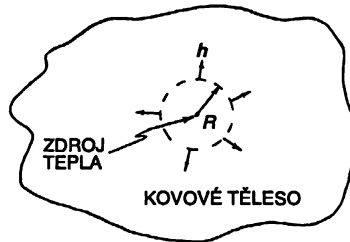
Rovnici (3.21) jsme odvodili použitím vztahu (3.13) na infinitezimální krychli. Můžeme postupovat i obráceně. Pro velký objem V ohraničený plochou S vyplývá z Gaussovy věty

$$\oint_S \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int \nabla \cdot \mathbf{h} \, dV. \quad (3.22)$$

Dosadíme-li sem z (3.21), zjistíme, že integrál na pravé straně je právě $-dQ/dt$ a opět dostaneme vztah (3.13).

Nyní uvažujme jiný případ. Představme si, že máme těleso vyplněné látkou s malou dutinou uvnitř. Nechť v ní dochází k nějaké chemické reakci generující teplo. Nebo bychom si to mohli představit tak, že tam jsou nějaké vodiče vedoucí k miniaturnímu odporu, který je zahříván elektrickým proudem. Budeme předpokládat, že teplo se generuje prakticky v jednom bodě. Nechť P označuje energii uvolněnou v tomto bodě za jednu sekundu. Dále budeme předpokládat, že ve zbytku objemu se teplo zachovává a že generování tepla probíhalo velmi dlouho, takže se teplota už nikde nemění. Otázka zní: Jak vypadá tepelný vektor \mathbf{h} na různých místech kovu? Jaká je hustota tepelného toku v každém bodě?

Víme, že integrujeme-li normálovou složku vektoru \mathbf{h} po uzavřené ploše, která obklopuje zdroj, vždy dostaneme P . Všechno teplo, které se generuje v bodovém zdroji, musí vyjít povrchem, neboť jsme předpokládali, že tok je stálý. Máme těžkou úlohu najít vektorové pole, které integrováno přes jakoukoliv plochu, dá vždy P . Toto pole však můžeme najít docela snadno, vezmeme-li speciálnější plochu. Vezmeme kulovou plochu s poloměrem R a se středem ve zdroji a budeme předpokládat, že proudění tepla je radiální (obr. 3.6). Intuice nám napovídá, že vektor \mathbf{h} by měl směřovat radiálně, jde-li o velké těleso a nejsme-li blízko stěn, a že ve všech bodech kulové plochy by měl mít stejnou velikost. Vidíte, že na to, abychom našli odpověď, přidáváme k naší matematice jisté množství dohadů – obyčejně nazývané „fyzikální intuice“.



Obr. 3.6 V oblasti blízko bodového zdroje proudí teplo radiálně směrem ven.

Když je pole \mathbf{h} radiální a kulově symetrické, je integrál normálové složky vektoru \mathbf{h} kulovou plochou velmi jednoduchý, protože tehdy je normálová složka vektoru rovna velikosti vektoru \mathbf{h} a je konstantní. Obsah plochy, přes kterou integrujeme, je $4\pi R^2$. Potom dostaneme

$$\oint_S \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} \, dS = h \cdot 4\pi R^2 \quad (3.23)$$

(kde h je velikost vektoru \mathbf{h}). Tento integrál má být roven P , tedy rychlosti, se kterou teplo ve zdroji vzniká. Dostáváme

$$h = \frac{P}{4\pi R^2}$$

nebo

$$\mathbf{h} = \frac{P}{4\pi R^2} \mathbf{e}_r \quad (3.24)$$

kde, jako obvykle, \mathbf{e}_r představuje jednotkový vektor v radiálním směru. Podle našeho výsledku je \mathbf{h} přímo úměrné P a mění se nepřímo úměrně s druhou mocninou vzdálenosti od zdroje.

Výsledek, který jsme právě dostali, se hodí na proudění tepla v blízkosti bodového zdroje tepla. Pokusme se nyní najít rovnice pro nejobecnější případ proudění tepla, platí-li jediná podmínka, že teplo se zachovává. Budeme se zabývat pouze tím, co se stane v prostoru bez jakýchkoliv zdrojů nebo absorbátorů tepla.

Diferenciální rovnice pro vedení tepla byla odvozena v kapitole 2. Podle rovnice (2.44) platí

$$\mathbf{h} = -\lambda \nabla T \quad (3.25)$$

(vzpomeňte si, že tento vztah platí sice přibližně, ale pro takové látky jako jsou kovy, docela dobře.) Dá se použít, samozřejmě, jen v těch oblastech látky, ve kterých nedochází ke generování nebo absorpci tepla. Už jsme odvodili jiný vztah, rovnici (3.21), který platí, když se teplo zachovává. Když v (3.21) vektor \mathbf{h} vyjádříme podle (3.25), dostaneme

$$-\frac{dq}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{h} = -\nabla \cdot (\lambda \nabla T)$$

nebo

$$\frac{dq}{dt} = \lambda \nabla \cdot \nabla T = \lambda \nabla^2 T \quad (3.26)$$

je-li λ konstanta. Vzpomínáte si, že q je množství tepla v jednotkovém objemu a $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ je Laplaceův operátor

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Uděláme-li ještě jeden předpoklad, můžeme dostat velmi zajímavou rovnici. Budeme předpokládat, že teplota látky je přímo úměrná tepelnému obsahu jednotkového objemu, tj. že látka má určitou měrnou tepelnou kapacitu. Platí-li tento předpoklad (což bývá často), můžeme psát

$$\Delta q = c_V \Delta T$$

nebo

$$\frac{dq}{dt} = c_V \frac{dT}{dt}. \quad (3.27)$$

Rychlost změny tepla je přímo úměrná rychlosti změny teploty. Součinitel úměrnosti c_V je tu měrná tepelná kapacita jednotky objemu látky. Ze vztahů (2.27) a (3.26) dostáváme

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\lambda}{c_V} \nabla^2 T. \quad (3.28)$$

Zjišťujeme, že časová rychlost změny T v každém bodě je přímo úměrná Laplaceově operátoru teploty T , tj. druhé derivaci její závislosti na poloze v prostoru. Dostáváme diferenciální rovnici – s proměnnými x, y, z a t – pro teplotu T .

Diferenciální rovnice (3.28) se nazývá *rovnici difúze tepla*. Často je psána ve tvaru

$$\frac{dT}{dt} = D \nabla^2 T, \quad (3.29)$$

kde D je koeficient *difúze tepla* a zde je roven hodnotě λ / c_p .

Rovnice difúze se objevuje v mnoha fyzikálních úlohách – při difúzi plynů, neutronů a v dalších případech. Fyzikou některých z těchto jevů jsme se již zabývali v 43. kapitole 1. dílu. Nyní však máte úplnou rovnici, která popisuje difúzi v nejobecnější možné situaci. Později probereme způsoby řešení rovnice difúze, abychom našli, jak se v konkrétních případech mění teplota. Nyní se vrátíme zpět k výkladu dalších vět o vektorových polích.

3.5 CIRKULACE VEKTOROVÉHO POLE

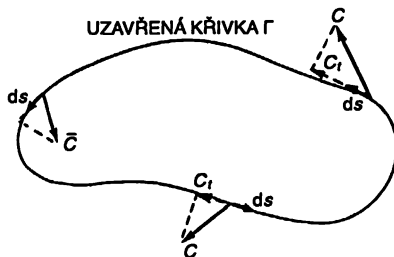
Podobným způsobem, jakým jsme to udělali v případě divergence, chceme nyní prozkoumat rotaci. Gaussovu větu jsme odvodili analýzou plošného integrálu, ačkoli zpočátku nebylo zřejmé, že se chystáme zabývat divergencí. Jak jsme věděli, že máme integrovat přes celou plochu, abychom dostali divergenci? Vůbec nebylo jasné, že vyjde tento výsledek. A právě bez zjevného opodstatnění teď vypočítáme pomocí vektoru ještě cosi a ukážeme, že to souvisí z rotací. Tentokrát budeme počítat to, co se nazývá *cirkulace* vektorového pole. Je-li C nějaké vektorové pole, vezmeme jeho složku podél nějaké křivky a vypočítáme integrál této složky po celé uzavřené křivce. Tento integrál se nazývá *cirkulací* vektorového pole po (uzavřené) křivce. Už dříve v této kapitole jsme uvažovali křivkový integrál vektoru $\nabla\psi$. Nyní provedeme totéž pro jakékoliv vektorové pole C .

Nechť je Γ nějaká uzavřená křivka v prostoru – pouze myšlená (obr. 3.7). Křivkový integrál tangenciální složky vektoru C po této křivce bude

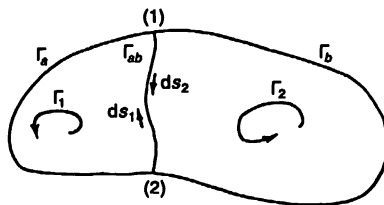
$$\oint_{\Gamma} C_t ds = \oint_{\Gamma} C \cdot ds. \quad (3.30)$$

Je nutné, abyste si všimli, že integrujeme po celé křivce kolem dokola, nejen z jednoho bodu do druhého, jako jsme to dělali předtím. To, že je třeba integrovat po celé dráze dokola, nám má připomenout malý kroužek na znaku integrování. Tento integrál se nazývá *cirkulace* vektorového pole po křivce Γ . Název se převzal ze zkoumání cirkulace kapaliny a podobně jako tok se rozšířil a použil na jakékoliv pole, i když tam není žádná „cirkulující“ látka.

Stejnou hrou, jakou jsme předvedli v případě toku, můžeme ukázat, že cirkulace po křivce je součtem cirkulací po dvou dílčích křivkách. Předpokládejme, že jsme naši křivku na obr. 3.7 rozdělili na dvě uzavřené křivky spojením dvou bodů (1) a (2) na původní křivce nějakou čarou napříč (obr. 3.8). Nyní existují dvě uzavřené křivky Γ_1 a Γ_2 . Γ_1 je vytvořena z Γ_a -té části původní křivky, která je vlevo od (1) a (2) plus zkratka Γ_{ab} . Křivku Γ_2 vytváří zbytek původní křivky plus zkratka.



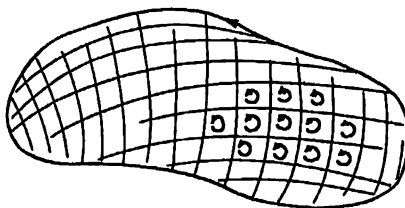
Obr. 3.7 Cirkulace vektorového pole C po křivce Γ je křivkový integrál C_t , tj. tangenciální složky vektoru C .



Obr. 3.8 Cirkulace po celé křivce $\Gamma_a + \Gamma_b$ je rovna součtu cirkulací po dvou křivkách: $\Gamma_1 = \Gamma_a + \Gamma_{ab}$ a $\Gamma_2 = \Gamma_a + \Gamma_{ab}$.

Cirkulace po Γ_1 je součtem integrálů po Γ_a a po Γ_{ab} . Podobně cirkulace po Γ_2 je součtem dvou částí, jedné související s Γ_b a druhé související s Γ_{ab} . Integrál po Γ_{ab} bude mít v případě křivky Γ_2 opačné znaménko než v případě Γ_1 , protože směr oběhu bude opačný – vždyť oba naše křivkové integrály musíme počítat ve stejném smyslu oběhu.

Toutéž úvahou, jakou jsme provedli dříve, se můžete přesvědčit, že součet obou těchto cirkulací dá právě křivkový integrál po původní křivce Γ . Příspěvky pocházející od Γ_{ab} se ruší. Cirkulace po jedné části plus cirkulace po druhé části je rovna cirkulaci po vnější křivce. S procesem rozdělování původní křivky můžeme pokračovat do jakéhokoliv počtu menších uzavřených drah. Sečteme-li cirkulace po menších dráhách, dojdeme vždy k rušení příspěvků od jejich společných částí, takže součet je ekvivalentní s cirkulací po původní křivce.



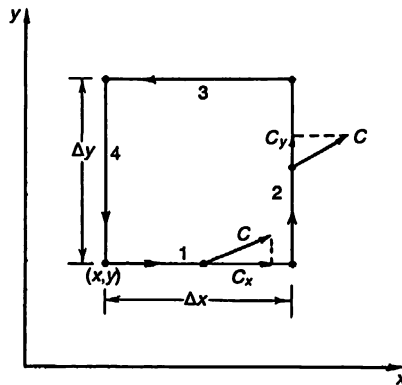
Obr. 3.9 Je zvolena nějaká plocha ohraničená uzavřenou křivkou Γ . Plocha se rozdělí na množství malých přibližně čtvercových plošek. Cirkulace po Γ je rovna sumě cirkulací po malých uzavřených křivkách.

Nyní předpokládejme, že původní uzavřená křivka ohraničuje nějakou plochu. Ve skutečnosti existuje nekonečně mnoho ploch, jež všechny mají původní křivku jako svoji hranici. Naše výsledky však nebudou záviset na tom, kterou plochu zvolíme. Nejdříve rozdělíme naši původní

křivku na mnoho malých uzavřených křivek, jež všechny budou ležet na námi zvolené ploše, jak je vidět na *obr. 3.9*. Zvolíme-li naše křivky dostatečně malé, můžeme, bez ohledu na tvar plochy, předpokládat, že každá z nich utváří v podstatě rovinnou plošku. Kromě toho můžeme křivky vybrat tak, že každá bude velmi blízká obvodu čtverce. Cirkulaci po velké křivce Γ nyní můžeme vypočítat tak, že najdeme cirkulace po obvodech všech malých čtverců a ty sečteme.

3.6 CIRKULACE PO OBVODU ČTVERCE. STOKESOVA VĚTA

Jak najít cirkulaci pro každý z malých čtverečků? Závisí to na tom, jak je čtvereček orientovaný v prostoru. Kdyby měl speciální orientaci, například kdyby ležel v některé ze souřadnicových rovin, bylo by možné výpočet provést snadno. Protože jsme dosud o orientaci souřadnicových os neudělali žádný předpoklad, můžeme si osy dobře zvolit tak, aby ten čtvereček, na který je v té chvíli soustředěna naše pozornost, ležel v rovině xy (*obr. 3.10*).



Obr. 3.10 Výpočet cirkulace C po obvodu malého čtverečku

Vyjádříme-li náš výsledek ve vektorové symbolice, můžeme tvrdit, že bude pro všechny konkrétní orientace roviny tentýž.

Nyní chceme najít cirkulaci pole C po obvodu našeho malého čtverce. Křivkový integrál se snadno vypočte, uděláme-li čtvereček tak malý, že podél jakékoliv jeho strany se vektor C moc nemění. (Tento předpoklad platí tím lépe, čím menší je čtvereček, takže v podstatě mluvíme o infinitezimálních čtverečcích.) Vydeme z bodu (x, y) – levého dolního rohu obrázku – a budeme postupovat ve směru vyznačeném šipkami. V případě první strany, označené 1, nechť je tangenciální složka $C_x(1)$, délka dráhy nechť je Δx . První příspěvek k integrálu tedy bude $C_x(1) \Delta x$. V případě druhé strany dostaneme $C_y(2) \Delta y$, v případě třetí $-C_x(3) \Delta x$ a v případě čtvrté strany to bude $-C_y(4) \Delta y$. Záporná znaménka jsou nutná, neboť tangenciální složku musíme vyjadřovat vzhledem ke směru postupu po obvodu. Celý křivkový integrál pak bude

$$\oint C \cdot ds = C_x(1) \Delta x + C_y(2) \Delta y - C_x(3) \Delta x - C_y(4) \Delta y. \quad (3.31)$$

Všimněme si prvního a třetího členu na pravé straně. Spolu dávají

$$[C_x(1) - C_x(3)] \Delta x. \quad (3.32)$$

Mohli byste se domnívat, že podle naší aproximace je rozdíl v hranaté závorce roven nule. Je to tak, ale pouze v nulovém přiblížení. Můžeme však být přesnější a vzít v úvahu i rychlost změny C_x . Když to uděláme, můžeme psát

$$C_x(3) = C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial y} \Delta y. \quad (3.33)$$

Kdybychom zahrnuli následující přiblížení, vystoupily by v něm i členy obsahující $(\Delta y)^2$. Protože však nakonec přejdeme k limitě pro $\Delta y \rightarrow 0$, je možno takové členy zanedbat. Dosadíme-li (3.33) do (3.32), zjistíme, že

$$[C_x(1) - C_x(3)] \Delta y = -\frac{\partial C_x}{\partial y} \Delta x \Delta y. \quad (3.34)$$

Souhlasně s naší aproximací je možno tuto derivaci počítat v bodě (x, y) .

Podobně můžeme vyjádřit zbývající dva členy ve výrazu (3.31) pro cirkulaci

$$C_y(2) \Delta y - C_y(4) \Delta y = \frac{\partial C_y}{\partial x} \Delta x \Delta y. \quad (3.35)$$

Cirkulace po obvodu čtverečku pak bude

$$\left(\frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y, \quad (3.36)$$

což je zajímavé, neboť rozdíl v závorkách představuje právě z -ovou složku rotace. Kromě toho si všimněme, že $\Delta x \Delta y$ je plošný obsah našeho čtverečku. Takovýmto způsobem můžeme naši cirkulaci (3.36) psát jako

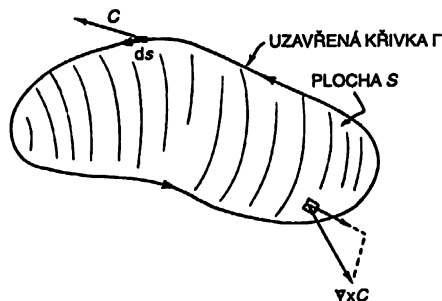
$$(\nabla \times \mathbf{C})_z \Delta S.$$

Ale z -ová složka ve skutečnosti znamená normálovou složku vzhledem k plošnému elementu. Cirkulaci po obvodu diferenciálního čtverečku proto můžeme vyjádřit v invariantním vektorovém tvaru:

$$\oint \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s} = (\nabla \times \mathbf{C})_n \Delta S = (\nabla \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{n} \Delta S. \quad (3.37)$$

Náš výsledek zní: cirkulace jakéhokoliv vektoru \mathbf{C} po obvodu infinitezimálního čtverečku je rovna normálové (vzhledem k rovině, v níž leží čtvereček) složce vektoru $\text{rot } \mathbf{C}$ vynásobené plošným obsahem čtverečku.

Cirkulaci po jakékoliv uzavřené křivce Γ je možné nyní lehce uvést do souvislosti s rotací vektorového pole. Křivku „vyplníme“ nějakou vhodnou plochou S (obr. 3.11) a vypočítáme cirkulace po obvodech množiny infinitezimálních čtverečků tvořících tuto plochu. Tento součet je možno zapsat jako integrál. Naším výsledkem je velmi užitečná věta, nazvaná Stokesova věta (podle G. G. Stokese).



Obr. 3.11 Cirkulace C po Γ je rovna plošnému integrálu normálové složky vektoru $\nabla \times C$

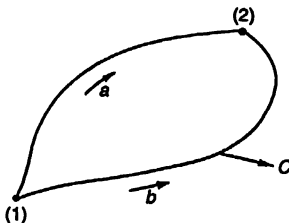
STOKESOVA VĚTA:
$$\oint_{\Gamma} C \cdot ds = \int_S (\nabla \times C)_n dS \quad (3.38)$$

kde S je jakákoliv plocha ohraničená křivkou Γ .

Nyní musíme něco říci o znaménkové konvenci. Na *obr. 3.10* směřuje osa z k vám v „obyčejné“, tj. pravotočivé soustavě. Kdybychom náš křivkový integrál počítali při kladné orientaci oběhu, zjistili bychom, že cirkulace je rovna z -ové složce vektoru $\nabla \times C$. Kdybychom postupovali opačným směrem, dostali bychom opačné znaménko. Jak tedy budeme obecně vědět, který směr zvolit za kladný pro normálovou složku vektoru $\nabla \times C$? Kladná normála musí souviset se smyslem rotace vždy tak, jak je to na *obr. 3.10*. Obecný případ je vyznačen na *obr. 3.11*.

Jedním ze způsobů, jak si tento vztah zapamatovat, je *pravidlo pravé ruky*. Přiložíte-li *pravou* ruku podél křivky Γ tak, že prsty ukazují kladný smysl ds , palec ukazuje směr kladné normály k ploše S .

3.7 POLE S NULOVOU ROTACÍ A DIVERGENCÍ



Obr. 3.12 Je-li $\nabla \times C$ rovno nule, cirkulace po uzavřené křivce Γ je také rovna nule. Křivkový integrál $C \cdot ds$ z (1) do (2) po křivce a proto musí být stejný jako tentýž křivkový integrál po křivce b .

Nyní bychom se rádi zabývali některými důsledky našich nových vět. Nejdřív vezměme příklad vektoru, jehož *rotace* je všude rovna nule. Pak je podle Stokesovy věty jeho cirkulace po každé křivce také rovna nule. Z toho vyplývá, že zvolíme-li na uzavřené křivce dva body (1) a (2) (*obr. 3.12*), křivkový integrál tangenciální složky z (1) do (2) nezávisí na tom, po které ze dvou možných drah se vypočítá. Můžeme udělat závěr, že integrál z (1) do (2) bude záviset pouze na poloze těchto bodů, tj. je pouze nějakou funkcí polohy. Stejnou logiku jsme použili ve 14. kapitole 1. dílu, když jsme dokázali, že když je integrál nějaké veličiny po uzavřené dráze vždy roven nule, lze vyjádřit jako rozdíl funkce polohy dvou bodů. Tento fakt nám umožnil zavést pojem potenciálu. Dále jsme dokázali, že vektorové pole je gradientem této potenciálové funkce (viz vztah 14.13 v 1. dílu).

Z toho vyplývá, že každé vektorové pole s nulovou rotací je rovno gradientu nějaké skalární funkce. To je užitečný poznatek: je-li $\nabla \times \mathbf{C} = 0$, existuje skalární pole ψ (psi), že $\mathbf{C} = \nabla \psi$. Tento zvláštní druh vektorového pole tedy můžeme, chceme-li, popsat pomocí skalárního pole.

Ukážeme ještě něco. Předpokládejme, že máme *libovolné* skalární pole φ (fi). Vytvoříme-li jeho gradient $\nabla \varphi$, musí být integrál tohoto vektoru po jakékoli uzavřené křivce roven nule. Jeho křivkový integrál z bodu 1 do bodu 2 bude $\varphi(2) - \varphi(1)$. Představují-li 1 a 2 tentýž bod, bude podle věty 1 (vztah 3.8) křivkový integrál roven nule:

$$\oint \nabla \varphi \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

jakákoliv
uzavřená
křivka

Na základě Stokesovy věty můžeme udělat závěr, že

$$\int \nabla \times (\nabla \varphi) dS = 0$$

pro *jakoukoliv* plochu. Je-li tento integrál roven nule pro každou plochu, musí být roven nule i jeho integrand. Vždy tedy platí

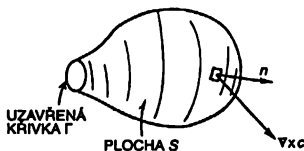
$$\nabla \times (\nabla \varphi) = 0.$$

Tentýž výsledek jsme dokázali v článku 2.7 pomocí vektorové algebry.

Nyní se podívejme na zvláštní případ, kdy malou uzavřenou křivku Γ vyplníme velkou plochou S , jako na *obr. 3.13*. Rádi bychom se vlastně dozvěděli, co se stane, když se uzavřená křivka „scvrkne“ na bod, takže ohraničená plocha zmizí. tj. plocha se stane uzavřenou. Je-li vektor \mathbf{C} všude konečný, musí se při „scvrkávání“ křivky Γ křivkový integrál po Γ blížit nule (integrál je přibližně přímo úměrný délce Γ , která se blíží nule). Podle Stokesovy věty se musí plošný integrál veličiny $(\nabla \times \mathbf{C})_n$ také blížit nule. Když plochu uzavíráme, jako bychom přidávali příspěvky, které postupně vyruší to, co bylo předtím. Dospěli jsme k nové větě

$$\int (\nabla \times \mathbf{C})_n dS = 0. \tag{3.39}$$

jakákoliv
uzavřená
plocha



Obr. 3.13 Přejdem k limitnímu případu uzavřené plochy zjistíme, že plošný integrál veličiny $(\nabla \times \mathbf{C})_n$ musí konvergovat k nulové hodnotě.

Nyní je to zajímavé, neboť jednu větu o plošném integrálu uzavřenou plochou už máme. Takový plošný integrál je podle Gaussovy věty (vztah 3.18) roven objemovému integrálu divergence vektorového pole. Z Gaussovy věty použité na vektor $\nabla \times \mathbf{C}$ vyplývá

$$\int (\nabla \times \mathbf{C})_n dS = \int \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{C}) dV. \tag{3.40}$$

uzavřená
plocha objem uvnitř
plochy

Z toho usuzujeme, že druhý integrál musí být též roven nule:

$$\int_{\text{jakýkoli objem}} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{C}) \, dV = 0. \quad (3.41)$$

To také platí pro každé vektorové pole \mathbf{C} . Protože však rovnost (3.41) je správná pro *každý objem*, musí platit, že v každém bodě prostoru je integrand roven nule. Dostáváme, že vždy

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{C}) = 0.$$

To je však stejný výsledek, jaký jsme dostali v článku 2.7 z vektorové algebry. Nyní začínáme chápat, jak jedno souvisí s druhým.

3.8 SHRNU TÍ

Shrňme, co jsme se dozvěděli o vektorovém počtu. Skutečně významné výsledky kapitol 2 a 3 jsou tyto:

1. Operátory $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ a $\partial/\partial z$ je možno považovat za tři složky vektorového operátoru:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Zachází-li se s tímto operátorem jako s vektorem, vzorce, které pro něj vyplývají z vektorové algebry, jsou správné.

2. Rozdíl hodnot skalárního pole ve dvou bodech je roven křivkovému integrálu tangenciální složky gradientu tohoto skaláru po jakékoli křivce spojující oba body:

$$\psi(2) - \psi(1) = \int_{(1)}^{(2)} \nabla \psi \cdot d\mathbf{s}. \quad (3.42)$$

jakákoli
křivka

3. Plošný integrál normálové složky libovolného vektoru po uzavřené ploše je roven integrálu divergence tohoto vektoru přes vnitřní objem ohraničený plochou:

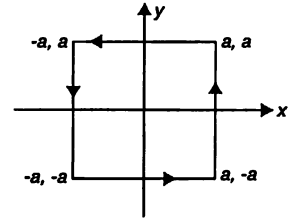
$$\int_{\text{uzavřená plocha}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\text{objem uvnitř plochy}} \nabla \cdot \mathbf{C} \, dV. \quad (3.43)$$

4. Křivkový integrál tangenciální složky libovolného vektoru po uzavřené křivce je roven plošnému integrálu normálové složky rotace tohoto vektoru po jakékoli ploše, která je touto křivkou ohraničena:

$$\int_{\text{hranice}} \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\text{plocha}} (\nabla \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (3.44)$$

PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 3.1 ■ a) Maxwellovy rovnice byly v 1. kapitole zformulovány v integrálním tvaru (pomocí slovního vyjádření) a v 2. kapitole v diferenciálním tvaru. Ukažte, že obě tyto formulace jsou ekvivalentní.
- b) Ukažte, že rovnice $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$, kde ρ je hustota náboje a \mathbf{j} vektor proudové hustoty, není nic jiného než zákon zachování elektrického náboje.
- 3.2 ■ Povrch koule je rovnoměrně pokryt vrstvou radioaktivní látky, která vyzařuje částice alfa s vysokou energií. Představme si, že alfa částice vylétají pouze v radiálním směru ven z povrchu. Z povrchu koule tedy vycházejí elektrické náboje a vytéká elektrický proud. Bude tento proud vytvářet magnetické pole?
- 3.3 ■ Intenzita elektrického pole bodového náboje umístěného v počátku souřadnic má tvar $E = \frac{K}{r^3} \mathbf{r}$, $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, $\mathbf{r} = lx + jy + kz$, kde K je určitá konstanta.
- a) Vypočtete tok intenzity elektrického pole povrchem koule poloměru a , která má střed v bodě, kde je umístěn náboj.
- b) S použitím Gaussovy věty vyjádřete tento tok jako objemový integrál $\nabla \cdot \mathbf{E}$. Můžete objasnit získaný výsledek?
- c) Vypočtete cirkulaci vektoru \mathbf{E} podél uzavřeného obvodu v rovině x, y znázorněného na obrázku. Ověřte získaný výsledek pomocí Stokesovy věty.
- 3.4 ■ Na základě výsledku úlohy 2.3 (a) odvoďte výraz (prakticky bez užítu) pro libovolný objem v podobě integrálu po povrchu tohoto objemu. Vyzkoušejte správnost svého výsledku pro kouli a kvádr.



Elektrostatika

4.1 STATIKA

4.2 COULOMBŮV ZÁKON. SUPERPOZICE

4.3 ELEKTRICKÝ POTENCIÁL

4.4 $E = -\nabla\varphi$

4.5 TOK POLE E

4.6 GAUSSŮV ZÁKON. DIVERGENCE POLE E

4.7 POLE NABITÉ KOULE

4.8 SILOČÁRY. EKVIPOTENCIÁLNÍ PLOCHY

4.1 STATIKA

Přečtěte si znovu: kapitoly 13 a 14, díl 1, Práce a potenciální energie

Nyní začněme s podrobným studiem teorie elektromagnetizmu. Celý elektromagnetizmus je obsažen v Maxwellových rovnicích.

Maxwellovy rovnice:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.2)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} \quad (4.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4.4)$$

Situace popsané těmito rovnicemi mohou být velice složité. Nejdříve budeme uvažovat o poměrně jednoduchých situacích a učit se, jak s nimi zacházet. Složitější situace probereme až potom. Nejsnáze se pracuje ve *statickém* případě,⁸⁾ kdy nic nezávisí na čase. Tehdy mají všechny náboje trvale pevnou polohu v prostoru anebo, pohybují-li se, pak pouze jako ustálený proud v obvodu (takže se ρ a \mathbf{j} v čase nemění). V těchto podmínkách všechny členy, které jsou časovými derivacemi pole, jsou rovny nule a Maxwellovy rovnice získají tento tvar.

Elektrostatika:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (4.6)$$

Magnetostatika:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2} \quad (4.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4.8)$$

Na soustavě těchto čtyř rovnic si všimněte zajímavé věci. Soustavu lze rozdělit na dva páry rovnic. Přitom elektrické pole \mathbf{E} se objevuje pouze v prvních dvou a magnetické pole \mathbf{B} pouze v druhých dvou rovnicích soustavy. Obě pole spolu vzájemně nesouvisí. Znamená to, že *dokud jsou proudy a náboje statické, jsou elektřina a magnetismus oddělené jevy*. Vzájemná závislost \mathbf{E} a \mathbf{B} se neobjeví, pokud nedochází k takovým změnám nábojů anebo proudů jako při nabíjení kondenzátoru anebo při pohybu magnetu. \mathbf{E} a \mathbf{B} budou na sobě navzájem záviset pouze v případech dostatečně rychlých změn, když v Maxwellových rovnicích dostanou význam časové derivace.

Podíváte-li se na rovnice statiky, uvidíte, že studium obou těchto předmětů, které nazýváme elektrostatika a magnetostatika, je ideální pro seznámení se s matematickými vlastnostmi vektorových polí. Elektrostatika je čistým příkladem vektorového pole s *nulovou rotací a nenulovou divergencí*. Magnetostatika je čistým příkladem pole s *nulovou divergencí a nenulovou rotací*. Častější, a snad si myslíte, že i lepší, způsob přednášení teorie elektromagnetizmu je začít nejdříve elektrostatikou, a tak se poučit o divergenci. Magnetostatika a rotace budou probrány později. Poté se elektřina a magnetismus spolu zkombinují. My jsme se rozhodli začít úplnou teorií vektorového počtu. Nyní ji budeme aplikovat na speciální případ, na elektrostatiku, tj. na pole \mathbf{E} , dané prvním párem rovnic (4.5) a (4.6).

Začněme nejjednoduššími situacemi, tedy těmi, v nichž jsou dány polohy všech nábojů. Kdybychom měli studovat elektrostatiku pouze na této úrovni (což budeme dělat ve dvou následujících kapitolách), bylo by to velmi jednoduché, téměř banální. Jak uvidíte, vše je možné získat z Coulombova zákona a několika integrací. V mnoha reálných elektrostatických úlohách však zpočátku nevíme, kde náboje jsou. Víme pouze, že se mezi sebou rozdělily podle vlastností látky. Polohy, jež náboje zaujaly, závisí na poli \mathbf{E} , a to zase závisí na polohách nábojů. Tím se věci značně komplikují. Umístíme-li například do blízkosti vodiče nebo izolátoru nabitě těleso, elektrony a protony ve vodiči nebo v izolátoru se přemísť. Hustota náboje ρ v rovnici (4.5) pak bude mít jednu část, kterou určíme z velikosti přeneseného náboje, ale i další části, pocházející od nábojů, které se přemísťily ve vodiči. Je nutné započítat všechny náboje. Přitom je možné

⁸⁾ Vlastně stacionárním případě. O elektrostatice mluvíme obvykle tehdy, když jsou náboje nehybné. (Pozn. red.)

dospět k některým záladným a zajímavým problémům. Ačkoli se má tato kapitola zabývat elektrostatikou, její hezcí a náročnější partie neobsáhne. Budeme v ní rozebrat situaci, kdy polohy všech nábojů můžeme pokládat za známé. Přirozeně, měli byste být schopni zvládnout tuto situaci dřív, než se pokusíte řešit složitější problémy.

4.2 COULOMBŮV ZÁKON. SUPERPOZICE

Bylo by logické vyjít z rovnic (4.5) a (4.6). Jednodušší však bude, začneme-li někde jinde a vrátíme se k těmto rovnicím. Výsledky budou ekvivalentní. Začneme zákonem, o němž jsme již hovořili dříve, tzv. Coulombovým zákonem. Podle něho působí mezi dvěma nepohybujícími se náboji síla, která je přímo úměrná součinu nábojů a nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti mezi nimi. Síla má směr přímky spojující oba náboje.

$$\text{Coulombův zákon:} \quad F_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} e_{12} = -F_2, \quad (4.9)$$

kde F_1 je síla působící na náboj q_1 , e_{12} je jednotkový vektor směřující od q_2 k q_1 a r_{12} je vzdálenost mezi q_1 a q_2 . Síla F_2 působící na náboj q_2 je stejně velká jako F_1 , ale má opačný směr.

Konstanta úměrnosti se z historických důvodů píše jako $1/4\pi\epsilon_0$. V soustavě jednotek SI, kterou používáme, je rovna přesně $10^{-7}c^2$ (10^{-7} -krát druhá mocnina rychlosti světla ve vakuu). Protože rychlost světla ve vakuu je přibližně $3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, konstanta má hodnotu zhruba $9 \cdot 10^9 \text{ m} \cdot \text{F}^{-1}$ (metr/farad) a její rozměr vzhledem k základním veličinám soustavy SI je $\text{m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-4} \cdot \text{A}^{-2}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} &= 10^{-7}c^2 \quad (\text{z definice}) \\ &\approx 9,0 \cdot 10^9 \quad (\text{z experimentu}). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Jednotka: metr/farad
nebo newton · metr²/coulomb²
nebo metr³ · kilogram/(sekunda⁴ · ampér²)
nebo volt · metr/coulomb

Jde-li o víc než dva náboje – a pouze takové případy jsou opravdu zajímavé – musíme Coulombův zákon doplnit ještě jedním přírodním zákonem: síla působící na jakýkoliv náboj je vektorovým součtem Coulombových sil pocházejících od všech ostatních nábojů. Tento zákon se nazývá princip superpozice. To je vše, co se týká elektrostatiky. Kombinujeme-li Coulombův zákon a princip superpozice, není nic víc třeba. Rovnice (4.5) a (4.6) – rovnice elektrostatiky – neříkají nic více, nic méně.

Při používání Coulombova zákona je vhodné zavést pojem elektrického pole. Říkáme, že pole E (1) je rovno síle působící na náboj q_1 (ze strany všech ostatních nábojů) a připadající na jednotku náboje (tj. vektor působící síly, dělený velikostí náboje q_1). Vydělíme-li rovnost (4.9) q_1 , dostaneme pro účinek nábojů jiných než q_1 , že

$$E(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{12}^2} e_{12}. \quad (4.11)$$

Chápeme to tak, že $E(1)$ udává cosi pro bod 1 i tehdy, kdyby tam náboj q_1 nebyl – za předpokladu, že všechny ostatní náboje zachovají své původní polohy. Říkáme, že $E(1)$ je elektrické pole v bodě 1.

Elektrické pole $E(1)$ je vektor, takže rovnicí (4.11) myslíme ve skutečnosti tři rovnice – pro každou složku jednu. Explicitně vypíšeme x -ovou složku, pro kterou z rovnice (4.11) vyplývá, že

$$E_x(x_1, y_1, z_1) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_1 - x_2}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{3/2}}. \quad (4.12)$$

Podobně pro ostatní složky.

Je-li víc nábojů, je pole E v nějakém bodě 1 součtem příspěvků od každého z ostatních nábojů. Každý člen součtu bude mít tvar (4.11), resp. (4.12). Bude-li q_j označovat velikost j -tého náboje a r_{1j} je vektor posunutí z polohy q_j do bodu 1, píšeme

$$E(1) = \sum_{j \neq 1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{1j}^2} e_{1j}, \quad (4.13)$$

což, samozřejmě, znamená, že

$$E_x(x_1, y_1, z_1) = \sum_{j \neq 1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j(x_1 - x_j)}{[(x_1 - x_j)^2 + (y_1 - y_j)^2 + (z_1 - z_j)^2]^{3/2}} \quad (4.14)$$

a analogicky pro další složky.

Často je pohodlnější nebrat v úvahu fakt, že náboje existují jako diskrétní objekty – protony a elektrony – a pokládat je za rozptýlené v nějakém spojitým útvaru anebo, jak se to nazývá, v nějakém „rozdělení“. Tento přístup je v pořádku, pokud nás nezajímá, co se děje ve velmi malých rozměrech. Rozdělení náboje charakterizujeme „hustotou náboje“ $\rho(x, y, z)$. Nachází-li se v malém objemu ΔV_2 v okolí bodu 2 množství náboje Δq_2 , pak je ρ definováno vztahem

$$\Delta q_2 = \rho(2) \Delta V_2. \quad (4.15)$$

Při používání Coulombova zákona při takovém přístupu nahradíme sumy ve vztazích (4.13) a (4.14) integrály přes všechny objemy obsahující náboje. Pak bude platit

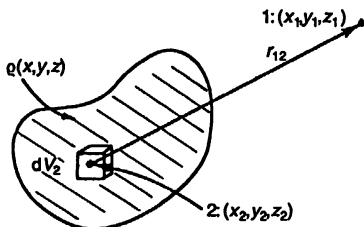
$$E(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{celý prostor}} \frac{\rho(2) e_{12} dV_2}{r_{12}^2}. \quad (4.16)$$

Někteří lidé přisou raději

$$e_{12} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}$$

kde \mathbf{r}_{12} je vektor posunutí z 2 do 1 (obr. 4.1). Integrál udávající E je pak zapsán takto

$$E(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{celý prostor}} \frac{\rho(2) r_{12} dV_2}{r_{12}^3}. \quad (4.17)$$



Obr. 4.1 Elektrické pole E v bodě 1 nějakého rozdělení nábojů získáme integrálem přes toto rozdělení. Bod 1 se může nacházet i uvnitř rozdělení

Chceme-li pomocí těchto integrálů něco vypočítat, musíme je obvykle podrobně rozepsat. Pro x -ovou složku rovností (4.16) nebo (4.17) bychom pak psali

$$E_x(x_1, y_1, z_1) = \int_{\text{celý prostor}} \frac{(x_1 - x_2) \rho(x_2, y_2, z_2) dx_2 dy_2 dz_2}{4\pi\epsilon_0 [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{3/2}}. \quad (4.18)$$

Tento vzorec nebudeme používat často. Napsali jsme jej sem pouze proto, abychom zdůraznili fakt, že jsme úplně vyřešili všechny ty elektrostatické úlohy, ve kterých známe polohy všech nábojů. Jsou dány náboje. Jaká jsou pole? *Odpověď:* vypočtete tento integrál. Nic víc k tomu není potřeba; pouze výpočet složitých trojrozměrných integrálů – přesně vzato, je to práce pro počítače.

Pomocí našich integrálů můžeme najít pole vytvářená nabitým rovinným nebo lineárním útvarem, nabitou kulovou plochou anebo jiným udaným rozdělením náboje. Je důležité uvědomit si, že i když budeme kreslit siločáry, hovořit o potenciálech nebo počítat divergence, výsledek už máme. Závisí pouze na tvaru tohoto integrálu. Někdy je snadnější jej vypočítat nějakým důvtipným trikem než jeho skutečným výpočtem. Ovládat takovéto postupy však vyžaduje naučit se mnohé neobyčejné věci. V praxi je možná jednodušší nesnažit se dělat chytrého, a namísto toho vypočítat vždy integrál přímo. I přesto se však nyní pokusíme být v této záležitosti důvtipnými a budeme pokračovat analýzou některých jiných vlastností elektrického pole.

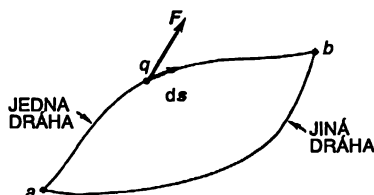
4.3 ELEKTRICKÝ POTENCIÁL

Nejdříve probereme pojem elektrického potenciálu, který souvisí s prací vykonanou při přenášení náboje z jednoho bodu do druhého. Mějme nějaké rozdělení náboje, které vytváří elektrické pole. Ptejme se, kolik práce je třeba vynaložit na přenos malého náboje z jednoho místa na druhé. Práce, která se vykonává přenášením náboje po nějaké dráze *proti* elektrickým silám, je rovna *záporně* vzatému integrálu po této dráze ze složky elektrické síly ve směru pohybu.

Přenášíme-li náboj z bodu a do bodu b , bude platit

$$W = - \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

kde \mathbf{F} je elektrická síla působící na náboj v každém bodě a $d\mathbf{s}$ je diferenciální vektor posunutí podél dráhy (obr. 4.2).



Obr. 4.2 Práce konaná při přenesení náboje z a do b je rovna záporně vzatému integrálu ze skalárního součinu $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ po dráze z a do b

Pro naše účely je zajímavější uvažovat práci, která by se konala při přenášení *jedné jednotky* náboje. Tehdy síla působící na náboj je číselně rovna intenzitě elektrického pole. Označíme-li práci vykonanou proti elektrickým silám v tomto případě W_{jedn} můžeme psát

$$W_{\text{jedn}} = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (4.19)$$

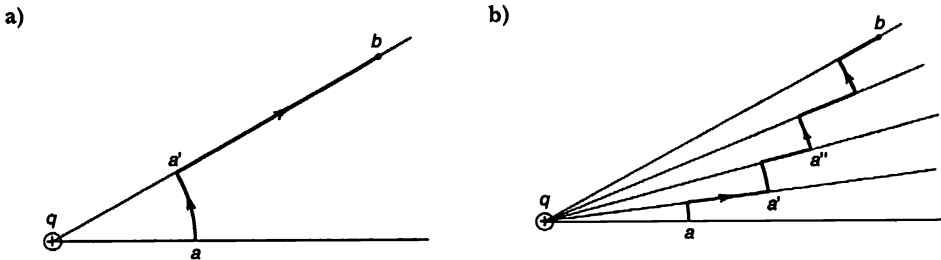
To, co dostaneme pomocí takového integrálu, obecně závisí na dráze, po které integrujeme. Jestliže by integrál (4.19) závisel na dráze od a do b , mohli bychom z pole získávat práci přenášením náboje do b po jedné dráze a pak zpět do a po jiné. Do b bychom šli po dráze, pro kterou je W menší, a *zpět* po jiné dráze, odčerpávající *víc* práce, než vkládáme.

Získávat energii z pole – na tom není v principu nic nemožného. Opravdu se setkáme s poli, kde to možné je. Může se stát, že když pohybuje nábojem, působíte silami na jinou část „mechanizmu“. Pohybuje-li se mechanismus proti síle, ztrácí energii, přičemž celková energie v přírodě se nemění. Avšak v *elektrostaticce* takový „mechanismus“ není. Víme, jaké síly působí zpětně na zdroje pole. Jsou to coulombovské síly působící na náboje, které jsou původci pole. Mají-li ostatní náboje v prostoru pevné polohy, což předpokládáme pouze v *elektrostaticce*, nevykonávají tyto zpětné síly při působení práci. Neexistuje žádný způsob, jak z nich získat energii, samozřejmě za předpokladu, že v elektrostatických situacích platí princip zachování energie. Věříme, že platí, ale teď ukážeme, že to musí vyplývat z Coulombova zákona pro sílu.

Uvažujme nejdříve, co se stane v poli vyvolaném jediným nábojem q . Nechť je bod a ve vzdálenosti r_1 od q a bod b ve vzdálenosti r_2 . Nyní z a do b přenesme jiný náboj, který budeme nazývat „zkušební“ nábojem a jehož velikost zvolíme rovnu jedné jednotce. Začneme s tou dráhou, která je ze všech možných drah pro výpočet nejjednodušší. Náš zkušební náboj přeneseme nejdříve po oblouku kružnice a pak podél poloměru, jak to znázorňuje obr. 4.3a. Najít práci vykonanou na této speciální dráze je dětskou hrou (jinak bychom ji nebyli zvolili). Především vůbec žádná práce se nevykoná na dráze z a do a' . Pole je radiální (podle Coulombova zákona), takže jeho intenzita je kolmá na směr pohybu. Dále na dráze z a' do b má intenzita pole

směr pohybu a mění se jako $1/r^2$. Práce vykonaná přenosem zkušebního náboje z a do b bude

$$-\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{a'}^b \frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right). \quad (4.20)$$



Obr. 4.3 Přenášením zkušebního náboje z a do b po obou těchto drahách se koná stejná práce

Vezměme nyní jinou jednoduchou dráhu, např. takovou, jaká je znázorněná na obr. 4.3b. Chvilku vede po oblouku kružnice, potom chvíli radiálně, potom opět po oblouku a potom radiálně atd. Předně, když jdeme po oblouku kružnice, práci nevykonáváme. Když jdeme po radiálním úseku, musíme integrovat $1/r^2$. Na prvním radiálním úseku integrujeme z r_a do $r_{a'}$, na druhém úseku z $r_{a'}$ do $r_{a''}$ atd. Součet všech těchto integrálů dá totéž jako jediný integrál přímo z r_a do r_b . Pro tuto dráhu dostáváme stejný výsledek, jaký jsme dostali v případě první dráhy. Je zřejmé, že tentýž výsledek bychom dostali pro jakoukoliv dráhu, která se skládá z libovolného počtu takovýchto úseků.

Jak to bude v případě hladkých drah? Dostali bychom tentýž výsledek? O této otázce jsme hovořili už ve 13. kapitole 1. dílu. Na základě stejných důvodů, které jsme použili tam, můžeme udělat závěr, že práce vykonaná při přenášení jednotkového náboje z a do b nezávisí na dráze.

$$W_{\text{jedn}}^{a-b} = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad \text{jakákoliv dráha}$$

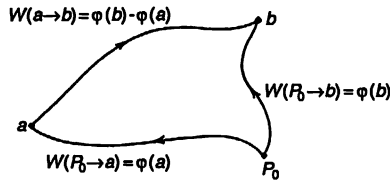
Protože vykonaná práce závisí pouze na koncových bodech, je možné ji udat jako rozdíl dvou čísel. Přesvědčíme se o tom následujícím způsobem. Zvolme vztažný bod P_0 a domluvme se, že budeme počítat náš integrál použitím dráhy, která bude vždy procházet bodem P_0 . Nechť $\varphi(a)$ označuje práci vykonanou proti poli při přechodu z P_0 do bodu a a $\varphi(b)$ práci vykonanou při přechodu z P_0 do bodu b (obr. 4.4). Práce vykonaná při přechodu z a do P_0 (cestou do b) je záporně vzaté $\varphi(a)$, takže bude platit

$$-\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \varphi(b) - \varphi(a). \quad (4.21)$$

Protože tu bude vždy vystupovat pouze rozdíl hodnot funkce φ ve dvou bodech, ve skutečnosti nepotřebujeme ani specifikovat polohu bodu P_0 . Jakmile jsme však zvolili nějaký referenční bod,

$$E = -\nabla\varphi$$

hodnota φ je už určena pro každý bod v prostoru; φ je tedy *skalární pole*. Je funkcí x, y, z . Tuto skalární funkci nazýváme *elektrostatickým potenciálem* v libovolném bodě.



Obr. 4.4 Práce vykonaná při postupu po jakékoliv dráze z a do b je rovna záporně vzaté práci z nějakého bodu P_0 do a zvětšené o práci z P_0 do b

Elektrostatický potenciál

$$\varphi(P) = -\int_{P_0}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (4.22)$$

Často je pohodlné volit vztahný bod v nekonečnu. V případě jednotlivého náboje nacházejícího se v počátku souřadnicové soustavy pak s ohledem na vztah (4.20) pro potenciál φ v nějakém bodě (x, y, z) dostaneme

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}. \quad (4.23)$$

Elektrické pole několika nábojů je možné napsat jako součet elektrického pole prvního, druhého, třetího atd. náboje. Integrujeme-li součet, abychom našli potenciál, dostaneme součet integrálů. Každý z těchto integrálů představuje potenciál jednoho z nábojů. Usuzujeme tak proto, že potenciál φ množiny nábojů je součtem potenciálů jednotlivých nábojů. Princip superpozice platí tedy i pro potenciály. Stejnými úvahami, kterými jsme našli elektrické pole skupiny nábojů a rozdělení nábojů, můžeme dostat úplné vzorce i pro potenciál φ v nějakém bodě, který označíme 1:

$$\varphi(1) = \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{1j}} \quad (4.24)$$

$$\varphi(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2) dV_2}{r_{12}}. \quad (4.25)$$

Zapamatujte si, že potenciál φ má fyzikální význam: je to potenciální energie, kterou by měl jednotkový náboj, přenesl-li by se z nějakého vztahného bodu do daného bodu v prostoru.

4.4 $E = -\nabla\varphi$

Kdo potřebuje potenciál φ ? Vždyť síly působící na náboje jsou určeny hodnotami E – elektrickým polem. Vtip je v tom, že E je možné snadno dostat z φ – tak jednoduše jako vypočítat derivaci. Uvažujme dva body, jeden v x a druhý v $(x + dx)$, ale u obou při stejných y a z , a ptejme

se, jak velká práce se vykoná při přenášení jednotkového náboje z jednoho bodu do druhého. Jde o dráhu podél horizontály z x do $x + dx$. Vykonaná práce je dána rozdílem potenciálů v obou bodech:

$$\Delta W = \varphi(x + \Delta x, y, z) - \varphi(x, y, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta x.$$

Ale práce vykonaná po téže dráze proti poli je

$$\Delta W = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -E_x \Delta x.$$

Vidíme, že

$$E_x = - \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (4.26)$$

Podobně $E_y = - \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $E_z = - \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ nebo, napsané souborně symbolikou vektorové analýzy,

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi. \quad (4.27)$$

Tato rovnice představuje diferenciální tvar vztahu (4.22). Jakoukoliv úlohu, v níž jsou dány náboje, je možné řešit výpočtem potenciálu pomocí (4.24) nebo (4.25) a použitím vztahu (4.27) pro výpočet pole. Vztah (4.27) souhlasí i s tím, co jsme zjistili o vektorovém počtu: pro každé skalární pole platí

$$\int_a^b \nabla\varphi \cdot d\mathbf{s} = \varphi(b) - \varphi(a). \quad (4.28)$$

Podle vztahu (4.25) je skalární potenciál φ dán trojrozměrným integrálem podobným tomu, který jsme měli pro \mathbf{E} . Je proto vůbec výhodné počítat φ místo \mathbf{E} ? Ano. Pro φ máme jen jeden integrál, zatímco pro \mathbf{E} jsou zapotřebí tři integrály, neboť jde o vektor. Kromě toho $1/r$ je obvykle jednodušší integrovat než x/r^3 . V mnoha praktických případech se ukazuje, že je poněkud jednodušší vypočítat φ a pak najít elektrické pole pomocí gradientu, než počítat tři integrály pro \mathbf{E} . Je to čistě praktická záležitost.

Potenciál φ má kromě toho i hlubší fyzikální význam. Ukázali jsme, že \mathbf{E} v Coulombově zákoně je odvozeno z $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$, kdy φ je dáno vztahem (4.22). Ale z vektorového počtu víme, že je-li \mathbf{E} rovno gradientu skalárního pole, pak $\text{rot } \mathbf{E}$ musí být rovna nule:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (4.29)$$

Toto je však právě naše druhá základní rovnice elektrostatiky (4.6). Ukázali jsme tak, že Coulombův zákon definuje pole \mathbf{E} , které splňuje tuto podmínku. Dosud je vše v pořádku.

Ve skutečnosti jsme dokázali, že $\nabla \times \mathbf{E}$ je rovno nule, dřív než jsme definovali potenciál. Ukázali jsme, že práce vykonaná na uzavřené dráze je rovna nule, tj. že

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

pro každou dráhu. V kapitole 3 jsme se přesvědčili, že pro každé takové pole musí být $\nabla \times \mathbf{E}$ všude rovno nule. Elektrické pole v elektrostace je tedy příkladem pole s nulovou rotací.

Můžete se pocvičit ve vektorovém počtu tím, že dokážete tvrzení, že $\nabla \times E$, a to výpočtem složek vektoru $\nabla \times E$ pro pole bodového náboje dané vztahem (4.11). Bude-li výsledkem výpočtu nula, pak podle principu superpozice byste dostali nulu pro jakékoliv rozdělení náboje.

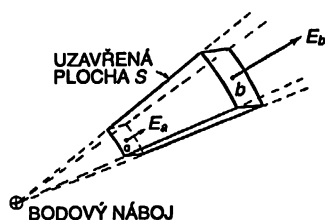
Je třeba poukázat na důležitou skutečnost. Pro libovolnou *radiální* sílu nezávisí vykonaná práce na dráze a existuje potenciál. Přemýšleli-li o tom, přesvědčíte se, že všechny úvahy, které jsme provedli výše, abychom ukázali, že integrál práce nezávisí na dráze, byly postaveny pouze na faktu, že síla jednotlivého náboje je radiální a kulově symetrická. Při těchto úvahách jsme nevyužívali skutečnost, že závislost síly na vzdálenosti je dána vztahem $1/r^2$, mohlo by tedy jít o libovolnou závislost na r . Existence potenciálu a skutečnost, že $\text{rot } E$ je rovna nule, pramení opravdu jen ze *symetrie a směru* elektrostatických sil. Proto vztahy (4.28) nebo (4.29), mohou obsahovat pouze část zákonů elektřiny.

4.5 TOK POLE E

Nyní odvodíme rovnici pole, která závisí právě a přímo na skutečnosti, že ve jmenovateli zákona síly vystupuje druhá mocnina vzdálenosti. To, že se pole mění nepřímo úměrně s druhou mocninou vzdálenosti, se někomu zdá být „jedině přirozeným“, neboť „je to způsob, kterým se šíří všechno“. Vezměme si světelný zdroj, z něhož vychází světlo: množství světla procházející základnou kužele s vrcholem ve zdroji je stejné bez ohledu na to, jak daleko je základna od zdroje. Tak to musí být, má-li se světelná energie zachovávat. Množství světla připadající na jednotku plochy, tedy intenzita osvětlení, se musí měnit přímo úměrně plošnému obsahu základny kužele, tj. nepřímo úměrně druhé mocnině vzdálenosti od zdroje. Ze stejného důvodu by se zajisté mělo měnit i elektrické pole. Ale nic takového jako „stejný“ důvod neexistuje. Nikdo nemůže říci, že elektrické pole je mírou toku něčeho podobného jako světlo, které se musí zachovávat. Kdybychom měli takový „model“ elektrického pole, v němž by vektor pole udával směr a rychlost, tj. představoval by tok nějakých drobných vylétujících „kulek“, a kdyby náš model vyžadoval, aby se tyto kulky zachovávaly a žádná by nemohla zmizet, pokud už byla vystřelena, tak bychom řekli, že můžeme nevyhnutelnost zákona nepřímé úměrnosti druhé mocnině vzdálenosti „pochopit“. Na druhé straně nevyhnutelně musí existovat nějaký matematický způsob, jak tuto fyzikální představu vyjádřit. Kdyby elektrické pole *bylo* něčím takovým jako zachovávající se vylétující kulky, měnilo by se nepřímo úměrně s druhou mocninou vzdálenosti, a takové chování bychom byli schopni popsat rovnicí – což je čistě matematická záležitost. Není tedy nic špatného na tom, když se této představy podržíme, pokud ovšem nebudeme tvrdit, že elektrické pole se opravdu *skládá* z kulek, ale budeme si vědomi toho, že používáme model, který nám pomáhá najít správné matematické vyjádření.

Předpokládejme, že jsme si na chvíli představili elektrické pole jako proud něčeho, co se zachovává – všude, tj. mimo místa, kde se nacházejí náboje. (Proudění musí někde začínat.) Představujeme si, že něco, ať už je to cokoli, vytéká z náboje do okolního prostoru. Byl-li by E vektor takového toku (jako je h v případě tepelného toku), v blízkosti bodového zdroje by se vyznačoval závislostí $1/r^2$. Tento model chceme nyní použít k tomu, abychom našli způsob, jak dojít k zákonu nepřímé úměrnosti na druhé mocnině vzdálenosti principiálnější nebo abstraktnější cestou místo toho, aby se prostě konstatovalo: „nepřímo úměrné druhé mocnině“. (Snad se divíte, proč se chceme vyhnout přímému zformulování takového jednoduchého zákona, a místo toho chceme dosáhnout téhož jinou cestou. Ale mějte trpělivost! Ukáže se, že je to užitečné.)

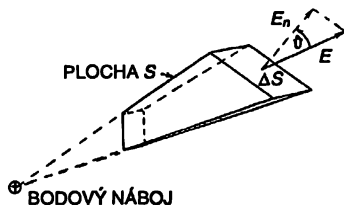
Ptáme se: Jaký je tok pole E ven z libovolné uzavřené plochy v okolí bodového náboje? Nejdříve vezměme jednoduchou plochu, jakou ukazuje *obr. 4.5*.


 Obr. 4.5 Tok vektoru E z plochy S je roven nule

Má-li pole E charakter toku, musí být celkový tok z takové krabičky roven nule. Tento výsledek opravdu dostaneme, rozumíme-li „tokem“ z této plochy plošný integrál normálové složky vektoru E , tj. veličinu, kterou jsme nazvali tokem pole E . V případě radiálních (rovnoběžných se spojnicí k náboji) stěn je normálová složka E nulová. V případě kulových čelních stěn je normálová složka E_n rovna velikosti vektoru E – se záporným znaménkem u menší a s kladným u větší stěny. Velikost vektoru E klesá jako $1/r^2$, ale plošný obsah stěny je přímo úměrný veličině r^2 , takže jejich součin na r nezávisí. Tok vektoru E do stěny a se právě ruší tokem ze stěny b . Celkový tok z S je roven nule, což je rovnocenné s tvrzením, že pro tuto plochu je

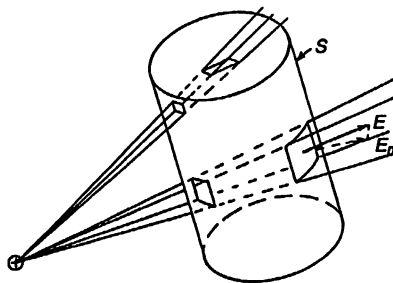
$$\oint_S E_n dS = 0. \quad (4.30)$$

Dále ukážeme, že obě koncové plochy mohou být skloněny vzhledem k radiální přímce a integrál (4.30) se přitom nezmění. Ačkoli to platí obecně, pro naše účely postačí ukázat, že to platí, jsou-li koncové plochy malé, takže se ze zdroje jeví pod malým úhlem, přesněji pod infinitezimálním úhlem. Na obr. 4.6 vidíme plochu S s radiálními „stěnami“ a šikmými „konci“. Na obrázku nejsou koncové plochy malé, ale máte si představit podobnou situaci s velmi malými koncovými plochami. Pak bude pole E na každé ploše dostatečně homogenní, abychom mohli pracovat pouze s jeho hodnotou ve středu plochy. Skloníme-li plošku o úhel ϑ , její plošný obsah se zvětší $1/\cos \vartheta$ krát. Ale E_n složka vektoru E normálová k plošce, se změní úměrně $\cos \vartheta$. Součin $E_n \Delta S$ se tedy nezmění. Tok z celé plochy S zůstává nulový.

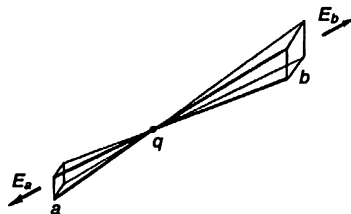

 Obr. 4.6 Tok vektoru E z plochy S je roven nule

Nyní se snadno přesvědčíme, že tok z objemu vymezeného *jakoukoliv* plochou S musí být roven nule. Každý objem je totiž možné si představit, jako kdyby se skládal z částí, podobných útvaru znázorněnému na obr. 4.6. Celá plocha S se přitom rozdělí do párů koncových plošek, a protože vtoky a výtoky z těchto koncových plošek se v jednotlivých párech navzájem ruší, celkový tok z plochy S bude roven nule. Tuto představu ilustruje obr. 4.7. Dostáváme úplně obecný výsledek, že celkový tok pole E ven z *jakékoliv* plochy S v poli bodového náboje je roven nule.

Ale pozor! Náš důkaz platí pouze tehdy, *neobklopuje-li* plocha S náboj. Co by se stalo, kdyby se bodový náboj nacházel *uvnitř* plochy? Opět můžeme naši plochu rozdělit na páry plošek, které jsou vymezeny radiálními přímkami procházejícími nábojem tak, jak to ukazuje *obr. 4.8*. Opět jsou tu toky oběma ploškami stejně velké, z týchž důvodů jako dříve, pouze teď mají *stejně* znaménko. Tok z plochy, která *obklopuje* náboj, *není* nulový. Jaký tedy je? Můžeme ho najít malým trikem. Předpokládejme, že náboj „odstraníme“ z „vnitřku“ tím, že ho obalíme malou plochou S' uloženou úplně uvnitř původní plochy S (*obr. 4.9*)

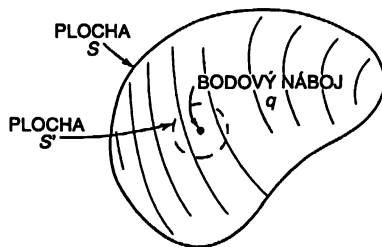


Obr. 4.7 Každý objem lze považovat za úplně složený z infinitezimálních komolých kuželů. Tok E z jednoho konce kuželového segmentu se rovná zápornému toku z druhého konce. Celkový tok z plochy S je proto roven nule.



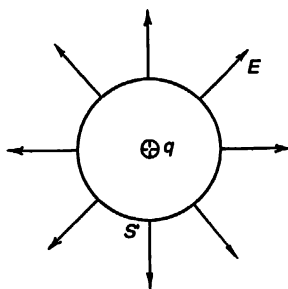
Obr. 4.8 Nachází-li se náboj uvnitř plochy, tok z ní není roven nule.

Pak se v objemu *mezi* oběma plochami S a S' žádný náboj nenachází. Celkový tok z tohoto objemu (včetně toku plochou S') je roven nule na základě úvah, jež jsme již uvedli. Z těchto úvah vlastně vyplývá, že tok *do* objemu plochou S' je stejný jako tok z něj ven plochou S .



Obr. 4.9 Tok přes S je stejný jako tok přes S'

Za S' můžeme zvolit plochu jakéhokoliv tvaru. Zvolme tedy kulovou plochu se středem v náboji (*obr. 4.10*). Pak dokážeme snadno vypočítat tok touto plochou.



Obr. 4.10 Tok kulovou plochou obsahující uvnitř bodový náboj q je roven q/ϵ_0 .

Je-li poloměr malé koule r , má E všude na jejím povrchu velikost

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

a směr normály k povrchu. Celkový tok S' dostaneme, vynásobíme-li tuto normálovou složku plošným obsahem plochy S' :

$$\text{Tok plochou } S' = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \right) (4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (4.31)$$

je tedy roven hodnotě, která nezávisí na poloměru koule! Z toho vidíme, že tok ven z plochy S je také roven q/ϵ_0 – hodnotě, jež nezávisí na tvaru plochy S , pokud náboj q zůstává uvnitř.

Naše výsledky můžeme napsat takto:

$$\int_{\substack{\text{jakákoliv} \\ \text{uzavřená} \\ \text{plocha } S}} E_n dS = \begin{cases} 0; & q \text{ vně } S \\ \frac{q}{\epsilon_0}; & q \text{ uvnitř } S. \end{cases} \quad (4.32)$$

Vraťme se k naší analogii s kulkami a podívejme se, zda má smysl. Podle naší věty je celkový tok kulek nějakou plochou roven nule, neobklopuje-li plocha zbraň vystřelující kulky. Je-li zbraň obklopena plochou, ať má jakýkoliv tvar a velikost, počet kulek jí proletujících je stejný – určuje její rychlost, jakou zbraň kulky vystřeluje. Pro zachovávající se kulky vypadá všechno celkem rozumně. Ale poskytuje nám tento model něco víc, než dostáváme napsáním vztahu (4.32)? Nikomu se nepodařilo dosáhnout toho, aby tyto kulky dokázaly něco víc, než zformulovat tento jediný zákon. Kromě toho už nevedou k ničemu, jen k omylům. Proto dnes dáváme přednost čistě abstraktní představě elektromagnetického pole.

4.6 GAUSSŮV ZÁKON. DIVERGENCE POLE E

Náš překrásný výsledek, tj. vztah (4.32), jsme dokázali pro jediný bodový náboj. Nyní předpokládejme, že jsou dva náboje, náboj q_1 v jednom bodě a náboj q_2 v jiném bodě. Tato úloha vypadá

těžší. Elektrické pole, jehož normálovou složku při toku integrujeme, je polem pocházejícím od obou nábojů, tj. představuje-li E_1 elektrické pole, které by vytvořil samotný náboj q_1 , a E_2 elektrické pole, které by vytvořil samotný náboj q_2 , celkové elektrické pole $E = E_1 + E_2$. Tok každou uzavřenou plochou S je

$$\oint_S (E_{1n} + E_{2n}) dS = \oint_S E_{1n} dS + \oint_S E_{2n} dS. \quad (4.33)$$

V případě obou nábojů je roven toku vyvolanému prvním nábojem plus tok vyvolaný druhým nábojem. Jsou-li oba náboje na vnější straně S , tok plochou S je nulový. Je-li q_1 uvnitř S a q_2 mimo, první integrál dává q_1/ϵ_0 a druhý nulu. Obklopuje-li plocha oba náboje, bude každý dávat svůj příspěvek a dostáváme, že tok je $(q_1 + q_2)/\epsilon_0$. Obecné pravidlo je zřejmé: celkový tok z uzavřené plochy je roven celkovému náboji uvnitř, dělenému ϵ_0 .

Náš výsledek představuje důležitý obecný zákon elektrostatického pole, nazvaný Gaussův zákon.

Gaussův zákon:

$$\int_{\substack{\text{jakákoliv} \\ \text{uzavřená} \\ \text{plocha } S}} E_n dS = \frac{\text{součet nábojů uvnitř}}{\epsilon_0} \quad (4.34)$$

nebo

$$\int_{\substack{\text{jakákoliv} \\ \text{uzavřená} \\ \text{plocha } S}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{Q_{\text{uvnitř}}}{\epsilon_0}, \quad (4.35)$$

kde

$$Q_{\text{uvnitř}} = \sum_{\text{uvnitř } S} q_i. \quad (4.36)$$

Popíšeme-li rozmístění nábojů pomocí hustoty náboje ρ , můžeme to chápat tak, že každý infinitezimální objem dV obsahuje „bodový“ náboj ρdV . Součet všech nábojů pak bude dán integrálem

$$Q_{\text{uvnitř}} = \int_{\substack{\text{objem} \\ \text{uvnitř } S}} \rho dV. \quad (4.37)$$

Z našeho odvození vidíte, že Gaussův zákon vyplývá ze skutečnosti, že mocnitél v Coulombově zákoně je roven přesně dvěma. Pole se zákonem $1/r^3$ nebo jakékoliv pole se zákonem $1/r^n$, kde $n \neq 2$, by ke Gaussovu zákonu nevedlo. Gaussův zákon tedy není právě ničím jiným než vyjádřením (v odlišném tvaru) Coulombova zákona síly, která působí mezi dvěma náboji. Opravdu, zpětným postupem můžete z Gaussova zákona odvodit Coulombův zákon. Oba tyto zákony jsou zcela ekvivalentní, máme-li na paměti, že síly působící mezi náboji jsou radiální.⁹⁾

Nyní bychom rádi napsali Gaussův zákon pomocí derivací. Abychom to udělali, použijeme Gaussův zákon na povrch infinitezimální krychle. V kapitole 3 jsme ukázali, že tok vektoru E z takovéto krychle je roven hodnotě $\nabla \cdot E$ vynásobené objemem krychle dV . Náboj uvnitř dV je

⁹⁾ A kulově symetrické neboli centrální. (Pozn. red.)

podle definice roven ρdV , takže z Gaussova zákona dostaneme

$$\nabla \cdot \mathbf{E} dV = \frac{\rho dV}{\epsilon_0}$$

nebo

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (4.38)$$

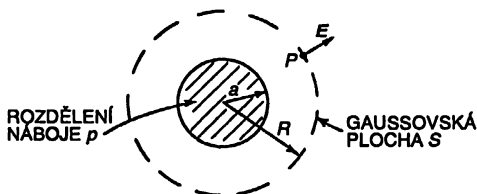
Diferenciální tvar Gaussova zákona představuje první z našich fundamentálních rovnic pole v případě elektrostatiky (rovnice 4.5). Ukázali jsme tím, že obě rovnice elektrostatiky (rovnice 4.5 a 4.6) jsou ekvivalentní Coulombovu zákonu síly. Dále se budeme zabývat jedním příkladem použití Gaussova zákona. (Později se dostaneme k mnohem většímu množství takových příkladů.)

4.7 POLE NABITÉ KOULE

Jednou z těžkých úloh, s nimiž jsme se setkali, když jsme studovali teorii gravitace, bylo dokázat, že síla pocházející z pevné koule je na jejím povrchu taková, jako kdyby všechna látka byla soustředěna ve středu koule. Newton po mnoho let svou teorii gravitace nepublikoval, protože si nebyl jistý, zda je toto tvrzení pravdivé. Dokázali jsme jej ve 13. kapitole 1. dílu tak, že jsme vypočítali integrál potenciálu a pak jsme pomocí gradientu našli gravitační sílu. Nyní můžeme tuto větu dokázat jednodušším způsobem. Tentokrát budeme dokazovat její odpovídající větu pro homogenně elektricky nabitou kouli. (Protože zákony elektrostatiky jsou stejné jako zákony gravitace, mohl by být tentýž důkaz proveden i pro gravitační pole.)

Ptáme se: Jaké je elektrické pole \mathbf{E} v bodě P , který se nachází někde mimo kouli s rovnoměrným rozdělením náboje? Protože tam není žádný význačný směr, můžeme předpokládat, že \mathbf{E} směřuje od středu koule. Uvažujme myšlenou kulovou plochu, která je koncentrická s nabitou koulí a prochází bodem P (obr. 4.11). Tok směrem ven z této plochy je

$$\int E_n dS = E \cdot 4\pi R^2.$$



Obr. 4.11 Použití Gaussova zákona na odvození pole homogenní nabitě koule

Podle Gaussovy věty je tento tok roven celkovému náboji koule Q (dělenému ϵ_0):

$$E \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

neboli

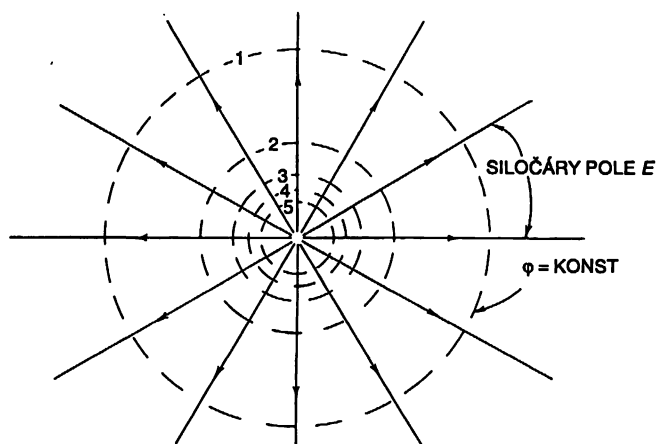
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}, \quad (4,39)$$

což je stejný vzorec, jaký bychom měli pro bodový náboj Q . Newtonovu úlohu jsme dokázali snáze než pomocí integrálu. To je, pravda, jen zdánlivě jednodušší – nějaký čas vám trvalo, než jste porozuměli Gaussovu zákonu, takže se můžete domnívat, že ve skutečnosti jste ani žádný čas neušetřili. Když však budete používat tuto větu stále častěji, začne se to splácet. Je to otázka efektivnosti.

4.8 SILOČÁRY. EKVIPOTENCIÁLNÍ PLOCHY

Nyní bychom rádi uvedli geometrický popis elektrostatického pole. Oba zákony elektrostatiky – první, že tok je přímo úměrný náboji uvnitř, a druhý, že elektrické pole je gradientem potenciálu – je rovněž možno interpretovat geometricky. Ilustrujeme to těmito dvěma příklady.

Nejdříve mějme pole bodového náboje. Nakreslíme křivky ve směru pole, tj. křivky, jejichž tečny mají všude směr vektoru pole (obr. 4.12). Jsou to tzv. *siločáry*.



Obr. 4.12 Siločáry a ekvipotenciální plochy v případě kladného bodového náboje.

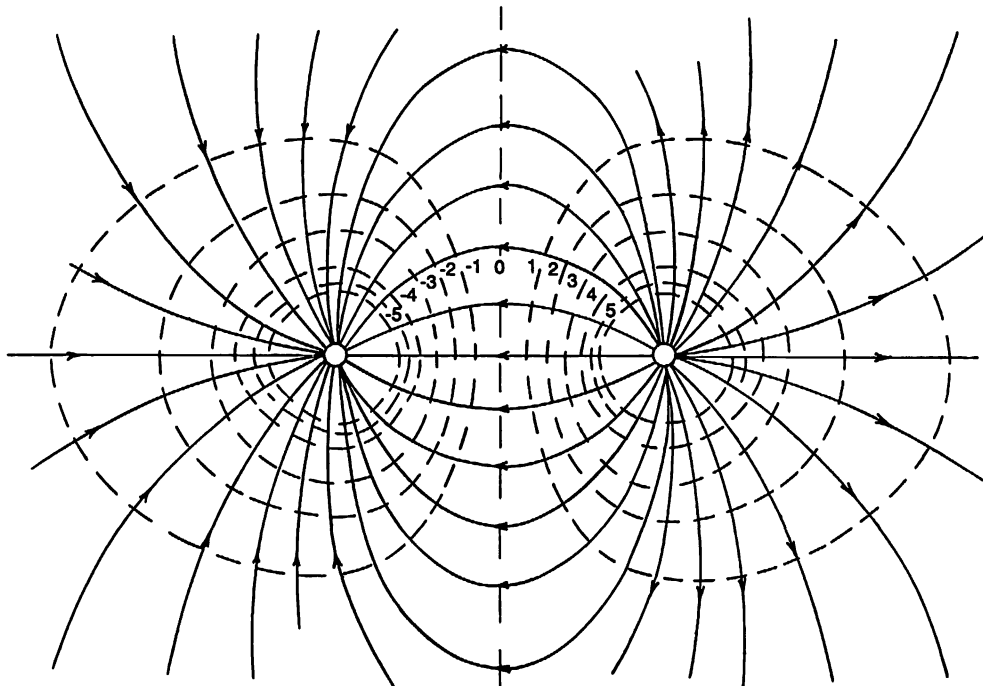
V každém bodě ukazují směr elektrického vektoru. Chceme však znázornit i jeho velikost. Můžeme proto zavést pravidlo, že intenzitu elektrického pole bude reprezentovat „hustota“ siločar. Hustotou siločar rozumíme počet siločar připadajících na jednotku plochy v rovině kolmé na siločáry. Pomocí těchto pravidel můžeme vytvořit obraz elektrického pole. V případě bodového náboje se musí hustota siločar zmenšovat podle zákona $1/r^2$. Ale plošný obsah kulové plochy kolmé na siločáry při každém poloměru r *vzrůstá* s r^2 . Zachováme-li tedy tentýž počet siločar ve *všech* vzdálenostech od náboje, jejich hustota zůstane přímo úměrná velikosti pole. Stejný počet siločar v každé vzdálenosti můžeme zabezpečit tak, že budeme trvat na tom, aby siločáry byly *souvislé*, tj. aby siločára, pokud už jednou z náboje vyšla, nikde nekončila. Gaussův zákon vyjádřený jazykem siločar říká, že siločáry mají začínat pouze v kladných nábojích a končit pouze v záporných nábojích. Počet siločar *vycházejících* z náboje q musí být roven q/ϵ_0 .

Podobný geometrický obraz můžeme nyní najít i pro potenciál φ . Nejjednodušší způsob jak znázornit potenciál, je nakreslit plochy, na nichž je φ stálé. Říkáme jim *ekvipotenciální* plochy (hladiny), tj. plochy se stejným potenciálem. Jaký je geometrický vztah ekvipotenciálních ploch k siločarám? Elektrické pole je gradientem potenciálu. Gradient udává směr nejrychlejší změny potenciálu, a proto je kolmý na ekvipotenciální plochu (v každém bodě). Kdyby totiž E *nebylo* kolmé na ekvipotenciální plochu, mělo by v ní nenulovou složku. Pak by se potenciál na ploše měnil a nebyla by ekvipotenciální plochou. Ekvipotenciální plochy tedy musí všude svírat se siločárami elektrického pole pravý úhel.

V případě osamocené bodové náboje jsou ekvipotenciálními plochami kulové plochy se středem v náboji. Na *obr. 4.12* jsme ukázali řez těmito kulovými plochami procházejícími nábojem.

Jako druhý příklad uvažujme pole v blízkosti dvou stejně velkých nábojů, jednoho kladného a druhého záporného. Najít toto pole je snadné. Jde o superpozici polí pocházejících od každého z těchto nábojů. Můžeme tedy dva obrázky, jako je *obr. 4.12*, položit jeden na druhý, ale to nejde. Dostali bychom tak siločáry, které se navzájem protínají, a to není možné, neboť E nemůže mít v jednom bodě *dva* různé směry. Nevýhoda popisu pole pomocí siločar je nyní očividná. Geometrickými úvahami nelze snadno dospět k tomu, jaký průběh budou mít nové siločáry. Ze dvou nezávislých obrazů siločar nemůžeme dostat jejich složený obraz. Princip superpozice – jednoduchý a zároveň hluboký princip teorie elektrických polí – nemá v popisu pole pomocí siločar jednoduchou reprezentaci.

Představa siločar má však své použití, a proto bychom přece rádi nakreslili jejich obraz pro dvojici nábojů stejné velikosti a opačných znamének.



Obr. 4.13 Siločáry a ekvipotenciální plochy v případě dvou stejně velkých bodových nábojů s opačným znaménkem

Vypočítáme-li pole ze vztahu (4.13) a potenciály z (4.23), můžeme siločáry a ekvipotenciální hladiny nakreslit. Výsledkem je *obr. 4.13*. Tuto úlohu jsme však museli řešit nejdříve matematicky.

Poznámka k jednotkám:

Veličina	Symbol	Jednotka	Značka	Vyjádření pomocí základních jednotek SI
Délka	l	metr	m	m
Hmotnost	m	kilogram	kg	kg
Čas	t	sekunda	s	s
Elektrický proud	I	ampér	A	A
Síla	F	newton	N	$\text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$
Energie	W	joule	J	$\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$
Hustota elektrického proudu	j	ampér/metr ²	$\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$	$\text{m}^{-2} \cdot \text{A}$
Elektrický náboj	Q, q	coulomb	C	$\text{s} \cdot \text{A}$
Objemová hustota náboje	ρ	coulomb/metr ³	$\text{C} \cdot \text{m}^{-3}$	$\text{m}^{-3} \cdot \text{s} \cdot \text{A}$
Elektrický potenciál	φ	volt	V	$\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-1}$
Intenzita elektrického pole	E	volt/metr	$\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$	$\text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-1}$
Magnetická indukce	B	tesla	T	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}$

$$c = 2,9979 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

– rychlost světla ve vakuu

$$\mu_0 = \frac{4\pi}{10^7} \frac{\text{henry}}{\text{metr}} = 1,2566 \cdot 10^{-6} \text{ A}^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

– permeabilita vakua

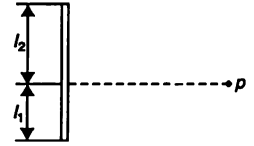
$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = \frac{10^7}{4\pi c^2} \frac{\text{farad}}{\text{metr}} = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ A}^2 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^4$$

– permitivita vakua

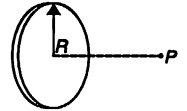
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{c^2}{10^7} \frac{\text{metr}}{\text{farad}} = 8,9876 \cdot 10^9 \text{ A}^{-2} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-4}$$

PŘÍKLADY A CVIČENÍ

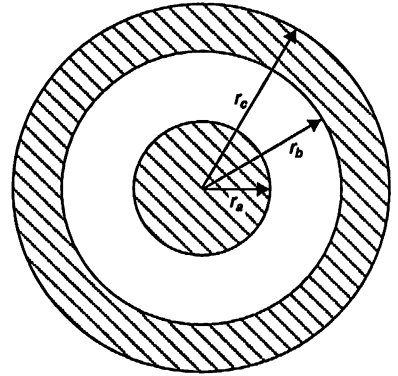
- 4.1 ■ Najděte potenciál φ v bodě P ve vzdálenosti r od vlákna délky $l_1 + l_2$ nabitého s lineární hustotou náboje τ a umístěného podle obrázku. Porovnejte získaný výsledek s tím, co je možno očekávat v limitě $r \gg l_1 + l_2$. Ověřte také případ $r \ll l_1 + l_2$, kdy lze určit intenzitu a potenciál pole z Gaussova zákona.



- 4.2 ■ Vypočítejte intenzitu elektrického pole v bodě P na ose tenkého rovnoměrně nabitého kotouče poloměru R ve vzdálenosti r od jeho středu (viz obrázek).



- 4.3 ■ Dvě kovové koule mají společný střed a poloměry ukázané na obrázku. Vnitřní koule je nabitá nábojem q , vnější nábojem q .
- Najděte závislost potenciálu elektrického pole na velkých vzdálenostech r od středu.
 - Najděte závislost intenzity elektrického pole na vzdálenosti od středu.
 - Čemu je roven potenciál na povrchu vnitřní koule?
 - Jak se změní elektrické pole na vzdálenostech $r > r_c$ a $r_b < r < r_c$, jestliže se středy obou koulí mírně posunou?



5 Použití

Gaussova zákona

5.1 ELEKTROSTATIKA JE GAUSSŮV ZÁKON PLUS ...

5.2 ROVNOVÁHA V ELEKTROSTATICKÉM POLI

5.3 ROVNOVÁHA S VODIČI

5.4 STABILITA ATOMŮ

5.5 POLE NABITÉ PŘÍMKY

5.6 NABITÁ ROVINA

5.7 NABITÁ KOULE. KULOVÁ SLUPKA

5.8 JE POLE BODOVÉHO NÁBOJE PŘESNĚ ÚMĚRNÉ
VELIČINĚ $1/r^2$?

5.9 POLE VODIČE

5.10 POLE V DUTINĚ VODIČE

5.1 ELEKTROSTATIKA JE GAUSSŮV ZÁKON PLUS ...

V elektrostatice platí dva zákony: tok elektrického pole z objemu je přímo úměrný náboji v něm – Gaussův zákon, a cirkulace elektrického pole je rovna nule, tj. E je gradientem. Z těchto dvou zákonů vyplývají v elektrostatice všechny předpovědi. Ale vyjádřit tyto zákony matematicky je jedna věc a používat je snadno a s určitou dávkou důvtipu je věc druhá. V této kapitole probereme řadu výpočtů, které je možné provést pomocí Gaussova zákona. Dokážeme některé věty a popíšeme některé jevy, zejména ve vodičích, které je možno na základě tohoto zákona velmi snadno pochopit. Samotný Gaussův zákon však nemůže poskytnout řešení žádné úlohy,

neboť je třeba respektovat ještě druhý zákon. Proto, když budeme používat Gaussův zákon k řešení konkrétních úloh, musíme k němu ještě něco přidat: Budeme muset například udělat nějaký předpoklad o tom, jak vypadá pole, založený například i na požadavcích symetrie. Anebo budeme muset explicitně zavést představu, že pole je gradientem potenciálu.

5.2 ROVNOVÁHA V ELEKTROSTATICKÉM POLI

Uvažujme nejdříve o tomto problému: Kdy může být bodový náboj ve stabilní mechanické rovnováze v elektrickém poli jiných nábojů? Jako příklad si představme tři záporné náboje umístěné ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka ve vodorovné rovině. Zůstal by kladný náboj, který se nachází ve středu trojúhelníka, na tomto místě? (Bude jednodušší, když na okamžik zapomeneme na gravitaci, ačkoliv její zahrnutí výsledky stejně nezmění) Síla působící na kladný náboj je nulová, ale je to stabilní rovnováha? Vrátil by se náboj do rovnovážné polohy, kdyby se trochu posunul? Odpověď zní: ne.

V žádném elektrostatickém poli *neexistují* žádné body stabilní rovnováhy (s výjimkou poloh, ve kterých jsou už jiné náboje). Z Gaussova zákona je snadno vidět proč. Za prvé, má-li být náboj v rovnováze v nějakém konkrétním bodě P_0 , musí tam být pole nulové. Za druhé, má-li být rovnováha stabilní, požadujeme, aby při vysunutí náboje z P_0 v *jakémkoliv* směru vznikla zpětná síla směřující opačně než posunutí. Elektrické pole tedy musí ve všech okolních bodech směřovat dovnitř – k bodu P_0 . Nejsou-li v P_0 žádné náboje, bylo by to v rozporu s Gaussovým zákonem. Snadno se můžeme přesvědčit.

Představme si malou myšlenou plošku, obklopující P_0 (obr. 5.1). Směřuje-li všude v okolí elektrické pole do P_0 , jistě není plošný integrál normálové složky roven nule. V případě ukázaném na obrázku musí tok ploškou mít zápornou hodnotu. Podle Gaussova zákona tok elektrického pole z libovolné plochy je přímo úměrný celkovému náboji uvnitř. Není-li v P_0 žádný náboj, je existence takového pole, jako jsme právě popsali, v rozporu s Gaussovým zákonem. Vyvážit kladný náboj v prázdném prostoru, tj. v bodě, v němž se nenachází žádný záporný náboj, se nepodaří. Kladný náboj *může* být v rovnováze jen tehdy, nachází-li se ve středu rozdělení záporného náboje. Samozřejmě, v takovém případě by rozdělení záporného náboje muselo být udržováno na místě jinými než elektrickými silami.



Obr. 5.1 Kdyby bod P_0 představoval polohu stabilní rovnováhy kladného náboje, směřovalo by elektrické pole všude v okolí k P_0 .

Náš výsledek jsme získali pro bodový náboj. Platí tentýž závěr i pro složité uspořádání nábojů udržovaných pohromadě v pevných vzájemných polohách, řekněme tyčemi? Prozkoumáme tento problém pro dva stejné náboje upevněné na tyči. Může být v elektrostatickém poli takový útvar v rovnováze? Opět zní odpověď ne. *Celková* síla působící na tyč nemůže mít zpětný účinek pro posunutí v každém směru.

Označme celkovou sílu působící na tyč v jakémkoliv poloze F ; F je pak vektorovým polem. Budeme-li uvažovat jako předtím, dojdeme k závěru, že v poloze stabilní rovnováhy musí mít

divergence F zápornou hodnotu. Celková síla působící na tyč je rovna prvnímú náboji krát pole v jeho poloze, plus druhý náboj krát pole v jeho poloze:

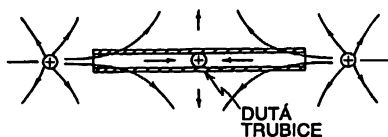
$$F = q_1 E_1 + q_2 E_2. \quad (5.1)$$

Pro divergenci F z toho vyplývá

$$\nabla \cdot F = q_1 (\nabla \cdot E_1) + q_2 (\nabla \cdot E_2).$$

Je-li každý z těchto nábojů ve vakuu, jsou $\nabla \cdot E_1$ stejně jako $\nabla \cdot E_2$ rovny nule a divergence $\nabla \cdot F$ je také rovna nule – není tedy záporná, jak by bylo žádoucí pro rovnováhu. Sami můžete rozšířit tuto úvahu a přesvědčit se, že vůbec žádný pevný útvar skládající se z jakéhokoliv počtu nábojů nemůže mít v elektrostatickém poli polohu stabilní rovnováhy ve volném prostoru.

Nedokázali jsme však, že rovnováha je zakázána, existují-li úchyty nebo jiná mechanická omezení. Jako příklad nám poslouží dutá trubice, v níž se může náboj volně pohybovat dopředu a dozadu, ale ne do stran. V tomto případě je možno velmi snadno navrhnout elektrické pole, které na obou koncích směřuje dovnitř, připustí-li se, že v blízkosti středu trubice může směřovat ven do stran. Prostě na každý konec trubice umístíme kladné náboje, jak ukazuje obr. 5.2. Nyní může existovat rovnovážný bod i tehdy, když je divergence rovna nule. Náboj by, samozřejmě, nebyl ve stabilní rovnováze pro pohyb do stran, kdyby nepůsobily „neelektrické“ síly stěn trubice.



Obr. 5.2 Existují-li mechanické vazby, náboj může být v rovnováze.

5.3 ROVNOVÁHA S VODIČI

V poli soustavy fixovaných nábojů neexistuje pro náš zkušební náboj žádná stabilní poloha. Jak je to v soustavě nabitých vodičů? Může soustava nabitých vodičů vytvořit takové pole, které bude mít bod stabilní rovnováhy pro bodový náboj? (Myslíme, samozřejmě, bod jinde než na povrchu vodiče.) Víte, že vodiče se vyznačují tím, že náboje v nich se mohou volně pohybovat. Je možné, že posune-li se trochu náš zkušební náboj, polnou se ostatní náboje na vodičích tak, že na něj budou působit návratovou silou? Odpověď se stále stejná: Ne, ačkoliv z důkazu, který jsme podali výše, to není patrné. V tomto případě je důkaz těžší a my pouze naznačíme postup.

Nejprve poznamenejme, že když se náboje na vodičích přerozdělují, může se to dít pouze tehdy, zmenšuje-li se tím jejich potenciální energie. (Při pohybu ve vodiči se část jejich energie ztrácí na teplo). Už jsme ukázali, že jsou-li náboje vytvářející pole *stacionární*, v blízkosti každého bodu P_0 , v němž je pole rovno nule, existuje takový směr, že posune-li se jím z P_0 , energie systému se *zmenší* (neboť síla směřuje od P_0). Jakékoliv přerozdělení nábojů na vodičích může pouze ještě víc zmenšit potenciální energii, takže (podle principu virtuální práce) jejich pohyb jen *zvětší* sílu ve zmíněném směru orientovanou od P_0 , ale neobrátí ji.

Naše závěry neznamenaají, že náboj není možné dostat do rovnováhy elektrickými silami. Je to možné, budou-li polohy nebo velikosti oporných nábojů regulovány pomocí vhodných zařízení.

Vyvíte, že tyč postavená na hrot je v gravitačním poli nestabilní, ale to nedokazuje, že není možné ji vyvážit na konci prstu. Podobně je možné náboj udržovat v nějaké poloze elektrickými silami, jsou-li *proměnné*. Ale ne pasivní, tj. *statickou* soustavou sil.

5.4 STABILITA ATOMŮ

Nelze-li náboje trvale udržovat ve svých polohách, zajisté nebude adekvátní představovat si látku, jako kdyby se skládala ze statických *bodových* nábojů (elektronů a protonů), řídících se pouze zákony elektrostatiky. Taková elektrostatická konfigurace je nemožná, zhroutila by se.

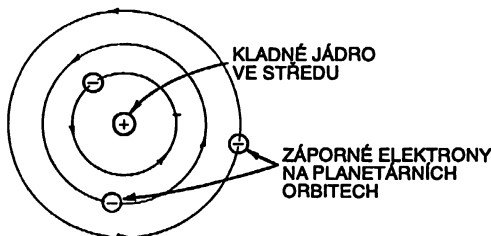
Svého času bylo navrženo, že kladný náboj atomu může být rozdělen homogenně v kouli a záporné náboje – elektrony mohou být v klidu uvnitř kladného náboje, jak je to znázorněno na *obr. 5.3*. To byl první model atomu, navržený Thomsonem. Na základě Geigerových a Marsdenových pokusů však dospěl Rutherford k závěru, že kladné náboje jsou velmi silně soustředěny v tom, co nazval jádrem. Thomsonův statický model byl zavržen.



Obr. 5.3 Thomsonův model atomu

Rutherford a Bohr pak navrhli, že půjde o dynamickou rovnováhu s elektrony obíhajícími na orbitách, jako na *obr. 5.4*. Orbitální pohyb by zabraňoval elektronům spadnout k jádru. Již známe nejméně jeden problém spojený s touto představou. Při takovém pohybu by elektrony měly zrychlení (v důsledku jejich kruhového pohybu), a vyzařovaly by proto energii.

Tím by ztrácely kinetickou energii potřebnou na to, aby zůstaly na orbitě a spirálově by se blížily k jádru. Opět nestabilita!



Obr. 5.4 Rutherfordův-Bohrův model atomu

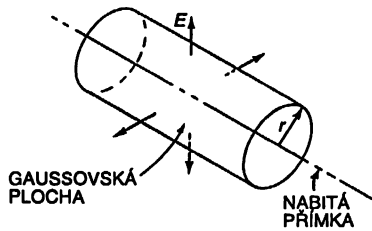
Nyní se stabilita atomů vysvětluje pomocí kvantové mechaniky. Elektrostatické síly přitahují elektron těsně k jádru, jak je to jen možné, přičemž ten je však přinucen zůstat rozptýlen v prostoru do vzdálenosti vyplývající z principu neurčitosti. Byl-li by totiž omezen na příliš malý prostor, měl by velkou neurčitost v hybnosti. Ale to znamená, že by měl velkou střední energii, která by

mu umožňovala vymanit se z elektrické přitažlivosti jádra. Konečným výsledkem je taková elektrická rovnováha, která se ani příliš neliší od Thomsonovy představy – pouze je to *záporný* náboj, který je rozptýlen (neboť hmotnost elektronu je mnohokrát menší než hmotnost protonu).

5.5 POLE NABITÉ PŘÍMKY

Gaussův zákon je možno použít na řešení mnoha úloh o elektrostatickém poli vyznačujících se speciálními symetrií – obvykle kulovou, válcovou nebo rovinnou. Ve zbývající části této kapitoly použijeme Gaussův zákon v několika takových úlohách. Snadnost, s jakou lze tyto úlohy takto řešit, může vést ke klamnému dojmu, že jde o velmi účinnou metodu umožňující postupovat tak i v mnoha dalších úlohách. Naneštěstí tomu tak není. Seznam úloh, které lze pomocí Gaussova zákona snadno řešit, bude brzy vyčerpán. V dalších kapitolách vypracujeme účinnější metody ke zkoumání elektrostatických polí.

Jako náš první příklad budeme uvažovat soustavu s válcovou souměrností. Předpokládejme, že máme velmi dlouhou, homogenně nabitou tyč. Myslíme tím, že elektrické náboje jsou rovnoměrně rozděleny podél nekonečně dlouhé přímky, přičemž na jednotkovou délku připadá náboj τ . Chceme vědět, jaké bude elektrické pole. Úlohu je jistě možno řešit integrováním příspěvků každé části přímky k poli. My to však dokážeme bez integrování, pomocí Gaussova zákona a důvtipu. Především snadno vytušíme, že elektrické pole bude směřovat radiálně od přímky. Jakákoli osová složka nábojů na jedné straně by se totiž anulovala stejně velkou osovou složkou pocházející od nábojů na straně druhé. Výsledkem může být pouze radiální pole. Také se zdá být odůvodněné, že pole by mělo mít tutéž velikost pro všechny body ve stejné velké vzdálenosti od přímky. Je to zřejmé. (Asi to není snadno dokazatelné, ale je to pravda, je-li prostor symetrický – a věříme, že je.)



Obr. 5.5 Válcová gaussovská plocha s nabitou přímkou v ose

Gaussův zákon můžeme použít následujícím způsobem. Mějme *myslenou* válcovou plochu koaxiální s naší přímkou, jak to znázorňuje obr. 5.5. Podle Gaussova zákona je celkový tok pole z této plochy roven náboji uvnitř válce, dělenému ϵ_0 . Protože pole je na válcovou plochu kolmé, normálová složka pole je rovna velikosti pole. Označíme ji E . Dále nechť poloměr válce je r . Je výhodné brát jeho délku jako jednu jednotku. Tok válcovou plochou je roven součinu E a jejího plošného obsahu, tj. $2\pi r$. Tok oběma čelními stěnami je roven nule, protože elektrické pole je s nimi rovnoběžné. Celkový náboj uvnitř naší válcové plochy je přesně τ , neboť délka části přímky uzavřené uvnitř válce je rovna jedné jednotce. Z Gaussova zákona pak vyplývá, že

$$E \cdot 2\pi r = \frac{\tau}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (5.2)$$

Elektrické pole nabitě přímky je nepřímo úměrně *první* mocnině vzdálenosti od přímky.

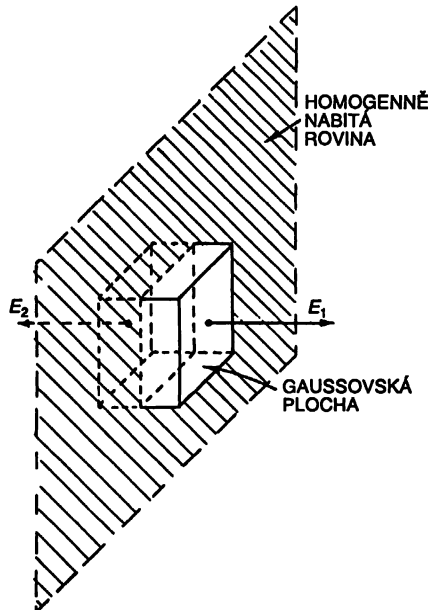
5.6 NABITÁ ROVINA. DVĚ ROVINY

V dalším příkladě budeme počítat pole homogenně nabitě roviny. Předpokládejme, že rovina se rozprostírá do nekonečna a na její plošnou jednotku připadá náboj σ . Teď provedeme další dohad. Důvody souměrnosti nás totiž vedou k přesvědčení, že směr pole je všude kolmý na rovinu a že *neexistuje-li pole jiných nábojů*, musí být pole na obou stranách roviny stejné (co do velikosti). Tentokrát zvolme jako naši gaussovskou plochu pravoúhlu krabičku, která protíná uvažovanou rovinu (obr. 5.6). Stěny krabičky rovnoběžné s rovinou budou mít stejný plošný obsah S . Pole je na tyto dvě stěny kolmé a se zbývajcími čtyřmi stěnami je rovnoběžné. Celkový tok je roven E -krát plošnému obsahu první stěny plus E -krát plošný obsah protilehlé stěny, přičemž zbývajcí čtyři stěny nepřispívají ničím. Celkový náboj uvnitř krabičky je σS . Když jej uvedeme do vztahu s tokem stěnami krabice, dostaneme rovnost

$$ES + ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0},$$

z něž vyplývá jednoduchý, ale důležitý výsledek

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (5.3)$$



Obr. 5.6 Elektrické pole v blízkosti homogenně nabitě roviny je možno najít použitím Gaussova zákona na myšlenou krabici.

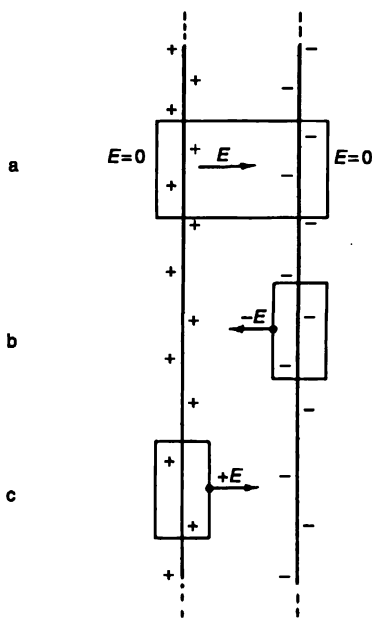
Snad si pamatujete, že tentýž výsledek jsme dostali už dříve integrováním po celé ploše. Gaussův zákon nám dává odpověď v tomto příkladě o mnoho rychleji (ačkoli nemá takovou obecnou použitelnost jako dřívější metoda).

Zdůrazňujeme, že tento výsledek se vztahuje *pouze* na pole vytvořené náboji rozmístěnými v rovině. Nacházejí-li se někde v blízkosti ještě další náboje, bude celkové pole v okolí roviny rovno součtu pole (5.3) a pole pocházejícího od těchto nábojů.

Úloha se dvěma rovnoběžnými rovinami se stejnými plošnými hustotami nábojů, které mají opačná znaménka $+\sigma$ a $-\sigma$, je také jednoduchá, předpokládáme-li opět, že vnější svět je zcela souměrný. Superpozicí obou řešení pro jednotlivé roviny nebo sestrojením gaussovske krabice, která by protála obě roviny, je možno jednoduše ozřejmit, že na *vnější* straně rovin je pole rovno nule (obr. 5.7a). Kdybychom uvažovali krabici, která protíná jen jednu z rovin částí *b*, *c* (obrázku), mohli bychom se přesvědčit, že pole mezi deskami musí být dvakrát větší než v případě jedné desky. Podle Gaussova zákona by pak platilo, že

$$E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (5.4)$$

kde E_1 a E_2 jsou pole na každé straně roviny směřující od ní.



Obr. 5.7 Pole mezi dvěma nabitými rovinami je rovno σ/ϵ_0 .

Máme tedy výsledek: E (mezi deskami) = σ/ϵ_0 (5.5)

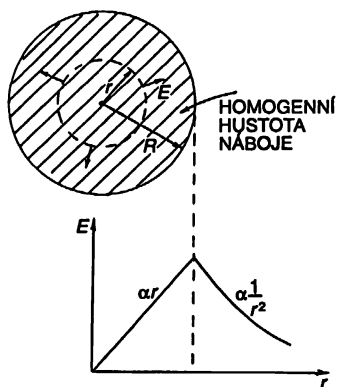
E (venku) = 0. (5.6)

5.7 NABITÁ KOULE. KULOVÁ SLUPKA

V kapitole 4 jsme již použili Gaussův zákon k nalezení pole v okolí homogenně nabité kulové slupky. Touž metodou je možné získat pole i ve *vnitřních* bodech koule. Tento výpočet je například možné použít k získání dobrého přiblížení pole uvnitř atomového jádra. Přesto, že se protony v jádře navzájem odpuzují, jsou působením velkých jaderných sil v objemu jádra rozptýlené zhruba homogenně.

Mějme kouli s poloměrem R , homogenně vyplněnou nábojem. Nechť ρ je náboj v jednotce objemu. Na základě souměrnosti opět předpokládejme, že pole bude radiální, a ve všech bodech stejně vzdálených od středu koule bude mít tutéž velikost. Abychom našli pole ve vzdálenosti r od středu, vložíme dovnitř koule soustřednou gaussovskou plochu s poloměrem r ($r < R$), jak to ukazuje obr. 5.8. Tok z této plochy je

$$4 \pi r^2 E.$$



Obr. 5.8 Gaussův zákon je možno použít k nalezení pole uvnitř homogenně nabité koule.

Náboj uvnitř plochy je roven jí uzavřenému objemu vynásobenému hustotou ρ :

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \rho.$$

Z Gaussova zákona pak pro velikost pole vyplývá vztah:

$$E = \frac{\rho r}{3 \epsilon_0} \quad (r < R). \quad (5.7)$$

Můžete se přesvědčit, že tento vztah dává správný výsledek i pro $r = R$. Elektrické pole je *přímo úměrné* vzdálenosti od středu koule, má směr poloměru a je orientované směrem ven od středu.

Úvahy, které jsme právě dělali pro homogenně nabitou kouli, je možno aplikovat i na tenkou nabitou kulovou slupku. Uděláme-li předpoklad, že pole je všude radiální a kulově symetrické, z Gaussova zákona okamžitě vyplne, že pole na vnější straně slupky je podobné poli bodového náboje, zatímco všude uvnitř je rovno nule. (Gaussovská plocha uvnitř slupky nebude obklopotvat žádný náboj.)

5.8 JE POLE BODOVÉHO NÁBOJE PŘESNĚ PŘÍMO ÚMĚRNÉ VELIČINĚ $1/r^2$?

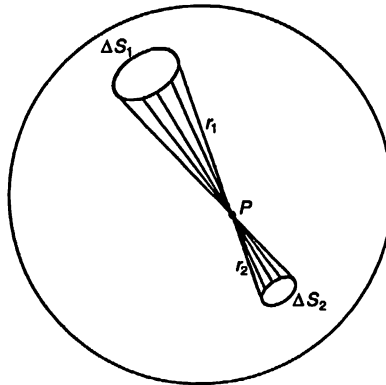
Podíváme-li se trochu podrobněji, jak se pole uvnitř kulové slupky stává nulovým, lépe si ozřejmíme, proč platnost Gaussova zákona vyplývá právě jen z přesné závislosti Coulombovy síly na druhé mocnině vzdálenosti. Uvažujme nějaký bod P uvnitř homogenně nabité kulové plochy. Představme si úzký kužel, který má vrchol v P a sahá po kulovou plochu, na které vytíná malou plošku s plošným obsahem ΔS_1 (obr. 5.9). S ním přesně souměrný kužel vycházející z P na opačnou stranu by na kulové ploše vyřízl plošku s obsahem ΔS_2 . Jsou-li vzdálenosti od P k těmto dvěma ploškám r_1 a r_2 , jsou jejich plošné obsahy v poměru

$$\frac{\Delta S_2}{\Delta S_1} = \frac{r_2^2}{r_1^2}.$$

(To můžete dokázat pomocí geometrie pro jakýkoliv bod P uvnitř koule).

Je-li povrch koule homogenně nabitý, je náboj Δq na každé vyříznuté plošce přímo úměrný její velikosti, tedy

$$\frac{\Delta q_2}{\Delta q_1} = \frac{\Delta S_2}{\Delta S_1}.$$



Obr. 5.9 V každém bodě P uvnitř nabité kulové plochy je pole nulové.

Podle Coulombova zákona velikosti polí vytvořených těmito dvěma ploškami v bodě P jsou v poměru

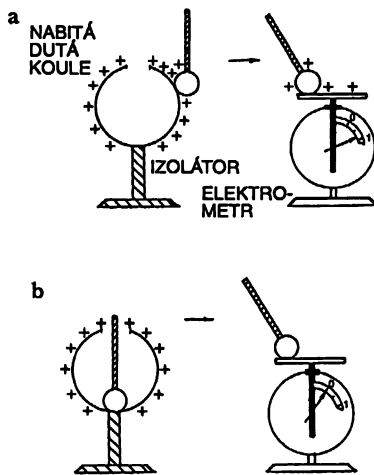
$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{q_2/r_2^2}{q_1/r_1^2} = 1.$$

Obě pole se přesně ruší. Protože takové dvojice plošek je možné vytvořit ze všech částí kulové plochy, je výsledné pole v P rovno nule. Můžete se však přesvědčit, že by to tak nebylo, kdyby mocnina r v Coulombově zákoně nebyla rovna přesně dvěma.

Platnost Gaussova zákona je podmíněna nepřímou úměrností druhé mocnině vzdálenosti v Coulombově zákoně. Neobsahoval-li by zákon ve jmenovateli přesně druhou mocninu, neplatilo by, že pole uvnitř homogenně nabité kulové plochy je přesně rovno nule. Kdyby se například pole měnilo rychleji, řekněme nepřímo úměrně třetí mocnině r , ta část plochy, která je blíž k uvažovanému vnitřnímu bodu, by v něm vytvářela větší pole než ta část, která je od něho dál. Výsledkem by bylo radiální pole směřující v případě kladného náboje do středu koule. Tyto závěry nám napovídají elegantní způsob jak zjistit, zda zákon o nepřímé úměrnosti druhé mocnině platí přesně. Potřebujeme pouze zjistit, zda je pole uvnitř homogenně nabité kulové plochy přesně rovno nebo nerovno nule.

Je štěstí, že taková metoda existuje. Obvykle je těžké změřit fyzikální veličinu s vysokou přesností. Dosáhnout výsledku s chybou jedno procento by asi příliš těžké nebylo, ale jak měřit, řekněme, Coulombův zákon s přesností na jednu miliardtinu? Téměř jistě není možné ani pomocí nejlepších existujících přístrojů měřit s *takovou* přesností sílu mezi dvěma nabitými tělesy. Ale budeme-li určovat pouze to, zda jsou elektrická pole uvnitř nabité koule *menší* než nějaká hodnota, můžeme tím udělat velmi přesné měření platnosti Gaussova zákona a tedy závislosti na druhé mocnině vzdálenosti ve jmenovateli Coulombova zákona. Efektivně se tím provede *porovnání* zákona síly s ideální nepřímou úměrností druhé mocnině vzdálenosti. Na takových porovnávacích stejných nebo přibližně stejných věcí se obvykle zakládají ta nejpřesnější fyzikální měření.

Jak pozorovat pole uvnitř nabité koule? Jeden způsob je zkusit nabít nějaké těleso tak, že se jím dotkneme nitra kulového vodiče. Víte, že dotkneme-li se nabitého tělesa kovovou kuličkou a pak se jí dotkneme elektrometru, ten se nabije a jeho ručička se vychýlí z nulové polohy (*obr. 5.10a*). Kulička nabírá náboj, neboť elektrické síly v okolí nabité koule ženu náboje na kuličku (nebo z ní). Provedete-li pokus tak, že se kuličkou dotýkáte *nitra* nabité koule, zjistíte, že na elektrometr se nepřenáší žádný náboj. Pomocí takového pokusu můžete také snadno dokázat, že pole uvnitř dosahuje nanejvýš několika procent vnějšího pole a že Gaussov zákon je alespoň přibližně správný.



Obr. 5.10 Uvnitř uzavřené kulové plochy je elektrické pole všude rovno nule.

Zdá se, že prvním, kdo zjistil, že pole uvnitř vodivé slupky je rovno nule, byl Benjamin Franklin. Připadalo mu to divné. Když svůj poznatek oznámil Priestleyovi, ten navrhl, že by to

mohlo souviset se zákonem nepřímé úměrnosti druhé mocnině vzdálenosti, neboť bylo známo, že kulová hmotná slupka uvnitř nevytváří žádné gravitační pole. Ale Coulomb naměřil nepřímou úměrnost druhé mocnině vzdálenosti až o 18 let později a Gaussův zákon byl objeven ještě později.

Gaussův zákon byl pečlivě prověřován. Za tímto účelem se elektrometr umístil uvnitř velké koule a sledovalo se, zda se neobjeví nějaké výchylky, když se koule nabije na vysoké napětí. Vždy bylo dosaženo záporného výsledku. Z geometrie aparatury a citlivosti elektrometru je možné vypočítat, jaké nejmenší pole by se projevilo. Z této hodnoty lze stanovit horní ohraničené odchylky mocnitele od dvou. Například-li, že elektrostatická síla je úměrná $r^{-2+\epsilon}$, můžeme určit horní hranici pro ϵ . Touto metodou Maxwell určil, že ϵ je méně než $1/10\,000$. V roce 1936 Plimpton a Laughton experiment zopakovali a zdokonalili. Zjistili, že mocnitel se liší od dvou o méně než jednu miliardtinu.

To nás přivádí k zajímavé otázce: Do jaké míry víme, jak přesně platí Coulombův zákon v různých situacích? Právě popsané pokusy měří závislost pole na vzdálenosti řekněme několika desítek centimetrů. Ale co třeba vzdálenosti uvnitř atomu, například vodíkového atomu, v němž, jak předpokládáme, je elektron přitahován k jádru podle téhož zákona nepřímé úměrnosti druhé mocnině vzdálenosti? Je pravda, že k popisu mechanické stránky chování elektronu musí být použita kvantová mechanika, ale přitom jde o obyčejnou elektrostatickou sílu. Při formulování úlohy o atomu vodíku je potřeba znát potenciální energii elektronu jako funkci vzdálenosti od jádra. Coulombův zákon dává potenciál, který se mění nepřímo úměrně první mocnině vzdálenosti. S jakou přesností je znám mocnitel pro takové malé vzdálenosti? Z velmi pečlivých měření relativních poloh energetických hladin vodíku, které provedli Lamb a Retherford r. 1947, víme, že v rozměrech atomu, tj. ve vzdálenostech řádově desetin nanometru (10^{-10} m), souhlasí mocnitel opět s přesností jedné miliardtiny.

Přesnost Lambova-Retherfordova měření znovu umožnila fyzikální „náhoda“. Ze stavů atomu vodíku by dva měly mít téměř stejné energie, ale *jen* tehdy, mění-li se potenciál přesně jako $1/r$. Tento velmi malý rozdíl jejich energií se měřil zjišťováním úhlové frekvence ω fotonů emitovaných nebo absorbovaných při přechodech mezi těmito dvěma stavy na základě vztahu pro rozdíl energie $\Delta E = \hbar\omega$. Výpočty ukázaly, že ΔE by se zřetelně odlišovalo od naměřené hodnoty, kdyby se mocnitel v zákoně síly $1/r^2$ lišil od dvou už o víc než jednu miliardtinu.

Je tentýž mocnitel správný i pro kratší vzdálenosti? Z měření v jaderné fyzice se zjistilo, že v typických jaderných vzdálenostech, zhruba 10^{-15} m, se uplatňují elektrostatické síly a také se mění jako převrácená hodnota druhé mocniny vzdálenosti. Na některé z důkazů, které o tom svědčí, se podíváme později. Víme tedy, že Coulombův zákon ještě platí, alespoň v takové míře, i pro vzdálenosti řádu 10^{-15} m.

A co při 10^{-16} m? Tento dosah je možné zkoumat ostřelováním protonů elektrony s velmi vysokou energií a pozorováním jejich rozptylu. Jak se zdá, získané údaje naznačují, že při těchto vzdálenostech zákon selže. Elektrická síla se ukazuje být ve vzdálenostech menších než 10^{-16} m asi 10-krát slabší. Jsou dvě možná vysvětlení. Jedno je, že v takových malých vzdálenostech Coulombův zákon neplatí. Druhé je, že naše „tělesa“, tj. protony a elektrony, nepředstavují bodové náboje. Možná že elektron nebo proton nebo oba jsou nějak rozmazány. Většina fyziků se domnívá, že rozmazán je náboj protonu. Víme, že protony silně interagují s mezony. To předpokládá, že proton čas od času existuje jako neutron s mezonem π^+ kolem sebe. V průměru bude takováto konfigurace působit jako malá kulička kladného náboje. Víme, že pole nabitě koule se při postupu do jejího středu nemění stále jako $1/r^2$. Je docela pravděpodobné, že náboj protonu je rozmazaný, ale i teorie π -mezonů je ještě dost nedokonalá, takže možná i Coulombův

zákon selže na velmi malých vzdálenostech. Otázka zůstává otevřená.¹⁰⁾

Ještě jedna věc: zákon nepřímé úměrnosti druhé mocnině vzdálenosti platí pro vzdálenosti řádu 1 m, ale i pro 10^{-10} m; zůstává však činitel $1/4 \pi \epsilon_0$ stále stejným? Odpověď je ano, alespoň s relativní přesností 15 miliontin.

Nyní se vraťme k důležitému problému, který jsme přešli mlčením, když jsme hovořili o experimentálním potvrzení Gaussova zákona. Možná, že jste se podivili, jak mohl být výsledek experimentu Maxwella nebo Plimptona a Laughltona tak přesný, když přitom kulový vodič, který použili, nebyl dokonalou koulí. Vždyť dosáhnout přesnosti na jednu miliardtinu je už opravdu něco a právem byste se mohli ptát, zda dokázali udělat tak přesnou kouli. Každá reálná koule má určitě malé nepravidelnosti. Existují-li nepravidelnosti, nebudou uvnitř vytvářet pole? Nyní chceme ukázat, že není třeba mít dokonalou kouli. Opravdu lze dokázat, že uvnitř uzavřené vodičové plochy jakéhokoli tvaru není žádné pole. Jinými slovy, výsledek zmíněných experimentů závisel na $1/r^2$, ale vůbec ne na tom, zda je plocha kulová (až na to, že pro kouli je snazší vypočítat, jaká *by byla* pole, kdyby Coulombův zákon neplatil), a tak se nyní vracíme znovu k našemu problému. Abychom to ukázali, je nevyhnutelné poznat některé vlastnosti elektrických vodičů.

5.9 POLE VODIČE

Elektrickým vodičem je pevné těleso, které obsahuje mnoho „volných“ elektronů. Elektrony se mohou v tělese volně pohybovat, ale nemohou projít jeho povrchem. V kovu je tolik volných elektronů, že jakékoliv elektrické pole jich uvede do pohybu velké množství. Takto vzniklý proud elektronů se pak musí buď udržovat vnějšími zdroji energie, nebo se pohyb elektronů zastaví, jakmile elektrony vybijí zdroje, které vytvořily původní pole. V elektrostatice nepracujeme se stálými zdroji proudu (jimi se budeme zabývat později, až budeme hovořit o magnetostatice), takže elektrony se pohybují jen dokud se neuspořádají tak, aby všude uvnitř vodiče vytvořily nulové elektrické pole. (Obvykle se to stane v malém zlomku sekundy). Kdyby totiž ještě nějaké pole zůstalo, uvedlo by do pohybu další elektrony; jediným možným řešením v elektrostatice je, že je pole uvnitř vodiče je všude nulové.

Nyní si všimněme *vnitřku* nabitého vodivého tělesa. („Vnitřkem“ rozumíme prostor v objemu kovu.) Protože kov je vodič, vnitřní pole, a tedy gradient potenciálu φ musí být roven nule. Každý vodič tak představuje ekvipotenciální oblast a jeho povrch je ekvipotenciální plochou. Protože všude ve vodivé látce je elektrické pole rovno nule, je nule rovna i divergence E a podle Gaussova zákona musí být rovna nule i hustota náboje *uvnitř* vodiče.

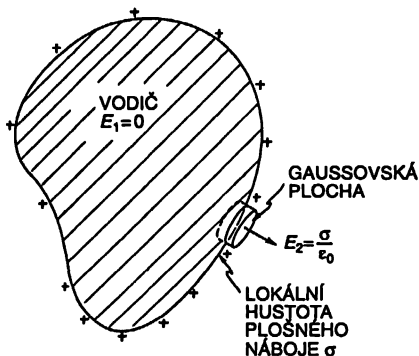
Nemohou-li být ve vodiči žádné náboje, jak je možné jej nabít? Co máme na mysli, když říkáme, že je vodič „nabit“? Kde tedy náboje jsou? Odpověď je, že se nacházejí na povrchu vodiče, kde působí velké síly, které jim zabraňují uniknout, tedy náboje nejsou zcela „volné“. Budeme-li studovat fyziku pevných látek, dozvíme se, že přebytečný náboj se v každém vodiči nachází v jedné – dvou atomových vrstvách povrchu. Pro naše současné účely je dostačující přesnost říkat, že převede-li se nějaký náboj na vodič nebo do něj, celý se shromáždí na jeho povrchu; uvnitř vodiče žádné náboje nejsou.

Kromě toho si všimněte, že na vnější straně v *těsné blízkosti* povrchu vodiče musí být elektrické pole kolmé na povrch. Nemůže existovat žádná tečná složka. Kdyby totiž existovala, elektrony by

¹⁰⁾ Experimenty, které Feynman popisuje, postupně vedly k dnešní představě, podle níž protony, neutrony i mezony skutečně nejsou bodové částice, ale mají vnitřní strukturu tvořenou kvarky. Kvarky přitom nemohou existovat samostatně. (Pozn. red.)

se pohybovaly *podél* povrchu; neexistují žádné síly, které by jim v tom zabraňovaly. Jinými slovy víme, že elektrické siločáry musí vždy svírat s ekvipotenciální plochou pravý úhel.

Na základě Gaussova zákona můžeme také uvést do vztahu intenzitu pole blízko povrchu vodiče s lokální hustotou náboje na jeho povrchu. Jako gaussovskou plochu vezmeme malou válcovou krabičku jednou polovičkou pod a druhou polovičkou nad povrchem (*obr. 5.11*). K celkovému toku E přispívá pouze ta strana krabičky, která je mimo vodič. Pole těsně při povrchu vodiče z jeho vnější strany je potom



Obr. 5.11 Elektrické pole těsně při povrchu vodiče je přímo úměrné lokální plošné hustotě náboje na povrchu.

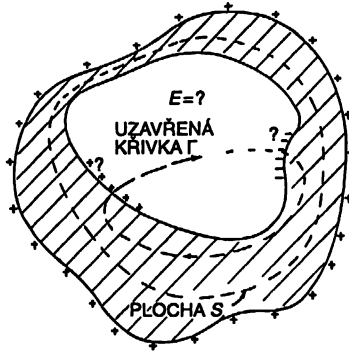
VNĚ VODIČE:
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (5.8)$$

kde σ je lokální plošná hustota náboje.

Proč nabitá vrstva na povrchu náboje vytváří jiné pole než samotná nabitá rovina? Jinými slovy, proč je (5.8) dvakrát větší než (5.3)? Důvod spočívá, samozřejmě, v tom, že v případě vodiče jsme *netvrídili*, že se v okolí nenacházejí žádné „jiné“ náboje. Opravdu nějaké ještě musí být, aby ve vodiči bylo $E = 0$. Náboje, nacházející se v bezprostředním sousedství bodu P na povrchu vodiče, ve skutečnosti vytvářejí pole $E_{\text{lok}} = \sigma_{\text{lok}} / 2 \epsilon_0$ jak z vnitřní tak i z vnější strany povrchu. Ale všechny ostatní náboje na vodiči se „spikly“, aby vytvořily v bodě P dodatkové pole s velikostí E_{lok} . Výsledné vnitřní pole je pak nulové a vnější je rovno $2 E_{\text{lok}} = \sigma / \epsilon_0$.

5.10 POLE V DUTINĚ VODIČE

Nyní se vrátíme k problému duté schránky – vodiči s dutinou. Uvnitř *kovu* není žádné pole, ale jak tomu bude v *dutině*? Ukážeme, že je-li dutina *prázdná*, pak v ní pole nejsou bez ohledu na to, jaký *tvár má vodič nebo dutina*. Ukážeme to například pro tvár na *obr. 5.12*. Uvažujme gaussovskou plochu takového tvaru, jaký má plocha S vyznačená na *obr. 5.12*, která obklopuje dutinu, ale všude zůstává ve vodivé látce. Všude na S je pole rovno nule, takže není žádný tok S a *celkový* náboj uvnitř S je roven nule. Kdyby šlo o kulovou plochu, by bylo možno ze souměrnosti usoudit, že v jejím nitru by nemohl být žádný náboj. Ale obecně můžeme pouze tvrdit, že na vnitřním povrchu vodiče je stejné množství kladného a záporného náboje. Kladný povrchový náboj *by mohl* být v jedné jeho části a záporný někde jinde, jako na *obr. 5.12*. Gaussovým zákonem není možné něco takového vyloučit.



Obr. 5.12 Jaké pole je v prázdné dutině ve vodiči při jakémkoliv tvaru vodiče a dutiny?

Ve skutečnosti však jakékoliv stejně velké a opačné náboje, nacházející se na vnitřním povrchu, k sobě sklouznou a úplně se vyruší. To, že musí být vyrušeny úplně, můžeme ukázat použitím zákona, že cirkulace pole E je vždy rovna nule (v elektrostatice). Předpokládejme, že by se v některých částech vnitřního povrchu nacházely náboje. Víme, že někde jinde na povrchu by se muselo nacházet stejné množství opačných nábojů. Jakékoliv siločáry pole E by nyní musely vycházet z kladných nábojů a končit v záporných nábojích (neboť uvažujeme pouze o případě, že v dutině nejsou volné náboje). Představme si nyní uzavřenou křivku Γ , která prochází napříč dutinou podél některé siločáry od nějakého kladného k některému zápornému náboji a vodičem se vrací zpět do svého výchozího bodu. (jako na obr. 5.12). Integrál po takové siločáře vedoucí od kladného k zápornému náboji nebude roven nule. Integrál po křivce uvnitř kovu dá však nulu, neboť $E = 0$. Dostali jsme tedy že

$$\oint E \cdot ds \neq 0 \quad ???$$

Křivkový integrál pole E po každé uzavřené křivce je však v elektrostatickém poli roven nule. Z toho vyplývá, že uvnitř prázdné dutiny nemohou existovat žádná pole ani žádné náboje na jejím povrchu.

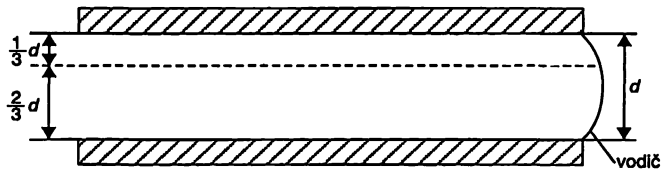
Měli byste si pečlivě všimnout důležité výhrady, kterou jsme uvedli. Vždy jsme říkali „uvnitř prázdné“ dutiny. Umístili se totiž nějaké náboje do některých pevných poloh v dutině, ať už v izolantu, nebo na malém vodiči izolovaném od hlavního vodivého tělesa, pak se v dutině mohou objevit pole. Ale pak už to není „prázdná“ dutina.

Ukázali jsme, že je-li dutina úplně obklopena vodičem, žádné statické rozdělení nábojů *mimo ni* nikdy nemůže vytvořit pole v jejím nitru. Tím se vysvětluje princip „stínění“ elektrického zařízení, které je uloženo v kovovém obalu. Stejně úvahy můžeme použít i v důkazu, že žádné statické rozdělení nábojů *uvnitř* uzavřeného vodiče nemůže vytvořit nějaká pole ve *vnějším* prostoru. Stínění funguje v obou směrech. V elektrostatice – ne však při proměnných polích – pole na obou stranách uzavřené vodivé plochy jsou úplně nezávislá.

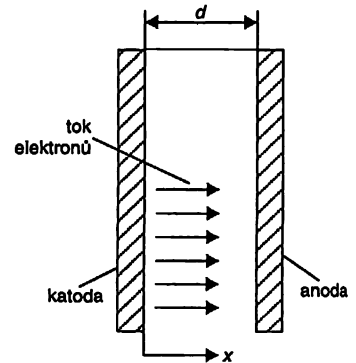
Nyní chápeme, proč bylo možné prověřit Coulombův zákon s tak velkou přesností. Tvar duté schránky je bezvýznamný. Nemusí být kulový, mohla by to být krychle. Je-li Gaussův zákon přesný, je pole uvnitř vždy nulové. Teď také chápeme, proč je bezpečné sedět uvnitř vysokonapěťové elektrody megavoltového van de Graaffova generátoru bez obavy ze zásahu elektřinou. Umožňuje to Gaussův zákon.

PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 5.1 ■ Ukažte, že elektrický potenciál φ má následující zajímavou vlastnost: střední hodnota $\bar{\varphi}$ na myšlené kulové ploše je rovna hodnotě $\varphi(0)$ ve středu této plochy, za podmínky, že uvnitř plochy nejsou žádné náboje. Co myslíte, v jakých úlohách se může tato vlastnost ukázat užitečnou?
- 5.2 ■ Najděte intenzitu elektrického pole ve vnitřních bodech velmi dlouhého rovnoměrně objemově nabitého válce dostatečně vzdálených od jeho konců. Čím se liší tento výsledek od situace rovnoměrně nabitě koule?
- 5.3 ■ Dvě široké rovnoběžné kovové destičky jsou umístěny jedna nad druhou ve vzdálenosti d . Okraje těchto destiček jsou spojeny kovovým vodičem. Mezi destičkami ve vzdálenosti $d/3$ pod horní destičkou je natažena tenká blána z umělé hmoty rovnoměrně nabitá s plošnou hustotou σ (viz obrázek). Najděte intenzitu elektrického pole E_1 a E_2 v blízkosti horní a dolní destičky.



- 5.4 ■ Najděte výraz pro x -vou složku elektrického pole, jestliže hustota nábojů ρ v prostoru závisí jen na souřadnici x .
- 5.5 ■ V elektronce vylétují elektrony z rozžhavené kovové katody v podobě destičky a dopadají na deskovou kovovou anodu umístěnou rovnoběžně s katodou ve vzdálenosti d . Vzdálenost d je malá ve srovnání s rozměry elektrod (viz obrázek). Potenciál elektrického pole mezi destičkami se mění v závislosti na vzdálenosti x od katody jako $\varphi = kx^{4/3}$.
- a) Čemu je rovna povrchová hustota náboje na katodě a na anodě?
- b) Jak se mění hustota objemového náboje $\rho(x)$ v prostoru mezi elektrodami, tj. při $0 < x < d$?



- 5.6 ■ Na povrchu vodiče jsou náboje rozloženy obecně nerovnoměrně s proměnnou povrchovou hustotou σ . Ukažte, že síla, která působí na malou nabitou část povrchu dS je kolmá k povrchu vodiče a rovna $1/2(\sigma^2/\epsilon_0)dS$. Odkud se vzal koeficient $1/2$?
- 5.7 ■ Maximální hodnota intenzity elektrického pole na povrchu vodiče hraničícího s vakuem je řádově 10 V/m. Za předpokladu, že povrchový náboj vytvářející toto pole je záporný, porovnejte počet nadbytečných elektronů připadajících na jednotku plochy s počtem atomů na této ploše. Porovnejte sílu působící na elektron v tomto poli, s velikostí síly, kterou na elektron působí proton ve vzdálenosti rozměru atomu.
- 5.8 ■ Záporný mion má náboj rovný náboji elektronu a hmotnost 207-krát větší. Při průchodu látkou může být mion zachycen jádrem nějakého atomu a nahradit jeden z elektronů. Vznikne tak „mezoatom“. Protože hmotnost mionu je velká, rozměry jeho orbity jsou mnohem menší než

u orbit atomových elektronů. U těžkých jader se mion nacházející se v nejnižším energetickém stavu pohybuje dokonce uvnitř jádra. Mion přitom interaguje s jadernou látkou nikoli jadernými, ale elektrickými silami a pociťuje působení jádra jako rovnoměrně nabitá koule. Z nezávislých pokusů bylo zjištěno, že poloměr atomového jádra závisí na hmotnostním čísle A jako $R = R_0 \cdot A^{1/3}$ ($R_0 \approx 1,2 \cdot 10^{-15}$ m).

Uvažujme model mezoatomu olova, v němž mion osciluje vzhledem k centru jádra podél libovolné trajektorie procházející tímto centrem. Jaká je vlastní frekvence ω takových oscilací? Jak víte, kvantové hladiny harmonického oscilátoru jsou rozloženy v intervalech energie $\hbar\omega$. Čemu je roven rozdíl energií dvou nejnižších hladin mezoatomu v našem modelu? Experimentálně bylo zjištěno, že při vzniku mezoatomů olova jsou vyzařovány paprsky gama o energii 6 MeV. Jak byste to vysvětlili?

- 5.9 ■ Představte si, že podél průměru zeměkoule je prokopán tunel. Hustotu hornin tvořících zeměkouli považujte za konstantní. Ukažte, že vhodíme-li do tohoto tunelu nějaký předmět, bude konat harmonické kmity vzhledem ke středu Země s periodou, která je rovna periodě oběhu umělé družice v malé výšce nad zemí.
- 5.10 ■ Je známo, že Země vyzáří za rok tepelnou energii rovnou přibližně $Q = 8 \cdot 10^{20}$ J. Aniž bychom se zabývali podrobnou teorií tohoto jevu, můžeme použít několik zjednodušených modelů k řádovému odhadu některých veličin. Jako příklad použijeme model, podle něhož všechno teplo vzniká jako důsledek radioaktivního rozpadu látek rovnoměrně rozložených v objemu zeměkoule. Podle existujících odhadů je teplota ve středu Země rovna přibližně 2500°C a průměrná tepelná vodivost materiálů tvořících Zemi $0,03 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Souhlasí tyto odhady s naším modelem?
- 5.11 ■ Dva dlouhé koaxiální vodivé válce jsou nabitы tak, že ve velké vzdálenosti od jejich konců, kde můžeme zanedbat okrajové jevy, připadá na jednotku délky vnitřního válce r_1 coulombů a na jednotku délky vnějšího válce r_2 coulombů. Vnitřní a vnější poloměry vnitřního válce jsou r_1 a r_2 , vnějšího válce r_3 a r_4 . Najděte pole $E(r)$ v závislosti na vzdálenosti od osy a rozdíl potenciálů mezi válci. Jak se změní intenzita pole a rozdíl potenciálů jestliže
- r_1 se bude zmenšovat,
 - r_2 se bude zvětšovat,
 - bude-li mít vnější obvod vnitřního vodiče podobu čtverce se stranami $2r_2$ (přitom předpokládáme, že $\sqrt{2}r_2 < r_3$)?

Elektrické pole v různých případech

- 6.1 ROVNICE ELEKTROSTATICKÉHO POTENCIÁLU
- 6.2 ELEKTRICKÝ DIPÓL
- 6.3 POZNÁMKY O VEKTOROVÝCH ROVNICÍCH
- 6.4 POTENCIÁL DIPÓLU JAKO GRADIENT
- 6.5 DIPÓLOVÉ PŘIBLÍŽENÍ PRO LIBOVOLNÉ ROZDĚLENÍ NÁBOJE
- 6.6 POLE NABITÝCH VODIČŮ
- 6.7 METODA ELEKTROSTATICKÉHO ZOBRAZENÍ
- 6.8 BODOVÝ NÁBOJ V BLÍZKOSTI VODIVÉ ROVINY
- 6.9 BODOVÝ NÁBOJ V BLÍZKOSTI VODIVÉ KOULE
- 6.10 KONDENZÁTORY. ROVNOBĚŽNÉ DESKY
- 6.11 PRŮRAZ PŘI VYSOKÉM NAPĚTÍ
- 6.12 EMISNÍ MIKROSKOP

6.1 ROVNICE ELEKTROSTATICKÉHO POTENCIÁLU

Přečtěte si znovu: kapitolu 23, díl 1, Rezonance

Tato kapitola popisuje průběh elektrického pole v řadě různých případů. Poskytne určitou informaci o chování elektrického pole a popíše některé z matematických metod používaných pro výpočet tohoto pole.

Nejdříve poukážeme na to, že z matematického hlediska spočívá celá úloha v řešení dvou Maxwellových rovnic pro elektrostatiku:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (6.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (6.2)$$

Ve skutečnosti můžeme obě zkombinovat do jediné rovnice. Z druhé rovnice přímo vidíme, že pole můžeme vyjádřit jako gradient skaláru (viz článek 3.7):

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi. \quad (6.3)$$

Chceme-li, můžeme konkrétní elektrické pole popsat pomocí jeho potenciálu φ . Po dosazení do vztahu (6.3) do rovnice (6.1) dostaneme diferenciální rovnici, kterou musí φ splňovat:

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (6.4)$$

Divergence gradientu φ je totéž, jako operátor ∇^2 působící na φ , tedy

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}, \quad (6.5)$$

takže rovnici (6.4) můžeme napsat ve tvaru

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (6.6)$$

Operátor ∇^2 se nazývá Laplaceův operátor a rovnice (6.6) je Poissonova rovnice. Z matematického hlediska není celá elektrostatika ničím jiným než zkoumáním a řešením této jediné rovnice (6.6). Jakmile se jejím řešením dostane φ , lze \mathbf{E} ihned najít ze vztahu (6.3).

Nejdříve vezměme speciální třídu úloh, ve které je ρ dáno jako funkce souřadnic x, y, z . Tehdy je úloha téměř triviální, neboť řešení rovnice (6.6) pro obecný případ tohoto druhu již známe. Ukázali jsme, že známe-li v každém bodě ρ , je potenciál v bodě (1)

$$\varphi(1) = \int \frac{\rho(2) dV_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}, \quad (6.7)$$

kde $\rho(2)$ je hustota náboje, dV_2 je objemový element v bodě (2) a r_{12} je vzdálenost mezi body (1) a (2). Řešení *diferenciální* rovnice (6.6) je redukováno na *integrování* v prostoru. Je třeba si zvláště všimnout řešení (6.7), neboť ve fyzice je mnoho situací, jež vedou k rovnicím majícím tvar

$$\nabla^2 (\text{něco}) = (\text{něco jiného})$$

a výraz (6.7) představuje prototyp řešení pro každou z těchto úloh.

Jsou-li polohy všech bodů známé, výpočet elektrostatického pole je zcela jednoduchý. Ukážeme si to na několika příkladech.

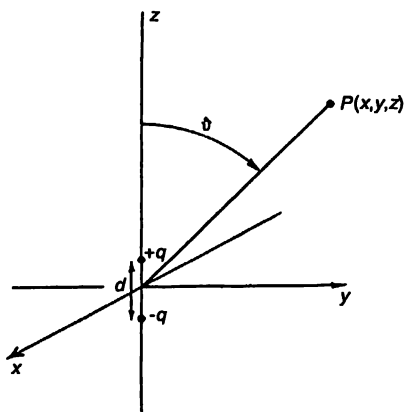
6.2 ELEKTRICKÝ DIPÓL

Vezměme nejdříve dva bodové náboje, stejně velké a opačných znamének, ve vzájemné vzdálenosti d . Nechť osa z prochází náboji a počátek souřadnicové soustavy položíme do středu mezi oba náboje (obr. 6.1). Pak podle (4.24) je potenciál obou nábojů

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{[z - (d/2)]^2 + x^2 + y^2}} + \frac{-q}{\sqrt{[z + (d/2)]^2 + x^2 + y^2}} \right]. \quad (6.8)$$

Nyní nebudeme vypisovat vzorec pro elektrické pole, ale když už máme potenciál, můžeme si ho vždy vypočítat. Tak jsme vyřešili úlohu dvou nábojů.

Existuje důležitý speciální případ, kdy jsou tyto dva náboje blízko sebe, jinými slovy, zajímáme-li se o pole v takových vzdálenostech od nábojů, které jsou velmi velké ve srovnání s jejich vzájemnou vzdáleností. Takový těsný pár nábojů nazýváme *dipólem*. Dipóly se vyskytují hojně.

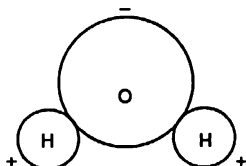


Obr. 6.1 Dipól: dva náboje $+q$ a $-q$ ve vzájemné vzdálenosti d

Dipólovou anténu je často možné aproximovat dvěma náboji s malou vzájemnou vzdáleností – nezkoumáme-li pole v těsné blízkosti antény. (Obvykle se zajímáme o antény s *pohybujícími* se náboji; potom rovnice elektrostatiky vlastně neplatí, ale pro některé účely jsou vhodným přiblížením.)

Důležitější jsou snad atomové dipóly. Existuje-li v nějaké látce elektrické pole, působí na elektrony opačnou silou než na protony a navzájem je posune. Jak si vzpomínáte, ve vodiči se některé z elektronů přesunou k jeho povrchu a pole uvnitř je nulové. V izolantu se elektrony nemohou přemístit příliš daleko; přitažlivou silou jádra jsou taženy zpět. Trochu se však posunou. Ačkoli atom nebo molekula zůstávají v elektrickém poli neutrální, dochází k velmi jemnému rozdělení jejich kladných a záporných nábojů a stanou se se mikroskopickými dipóly. Zajímáme-li se o pole těchto atomových dipólů v okolí těles s obvyklými rozměry, obvykle jde o vzdálenosti, které jsou velké ve srovnání se vzdáleností mezi náboji tvořícími páry.

V některých molekulách jsou náboje trochu separovány i bez působení vnějších polí. Je to způsobeno tvarem molekuly. Například v molekule vody je záporný náboj na atomu kyslíku a kladný náboj na každém z obou vodíkových atomů, které však nejsou umístěny souměrně, ale tak, jako na obr. 6.2. Ačkoliv je náboj celé molekuly roven nule, existuje v ní trochu více záporného náboje na jedné straně a trochu více kladného náboje na straně druhé. Toto uspořádání není zřejmě tak jednoduché jako v případě dvou bodových nábojů, ale díváme-li se na něj z dostatečné vzdálenosti, působí jako dipól. Jak uvidíme trochu později, pole ve velkých vzdálenostech není citlivé na jemné detaily.



Obr. 6.2 Molekula vody H_2O . Atomy vodíku mají trochu méně z elektronového oblaku než je jejich podíl na jeho vytvoření, zatímco kyslík má trochu více.

Nyní se podíváme na pole dvou opačných nábojů, mezi nimiž je malá vzdálenost d . Je-li d rovno nule, posunou se oba náboje do jednoho místa, oba potenciály se vyruší a žádné pole nebude existovat. Jakmile náboje přesně nesplývají, můžeme dostat dobrou aproximaci potenciálu tím, že rozvineme členy ve výrazu (6.8) do mocninné řady podle malé veličiny d (použijeme binomický rozvoj). Zachováme-li členy pouze do prvního řádu d , můžeme psát

$$\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 \approx z^2 - zd.$$

Je výhodné zavést označení

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Potom

$$\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 + x^2 + y^2 \approx r^2 - zd = r^2 \left(1 - \frac{zd}{r^2}\right)$$

a

$$\frac{1}{\sqrt{[z - (d/2)]^2 + x^2 + y^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{r^2[1 - (zd/r^2)]}} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{zd}{r^2}\right)^{-1/2}.$$

Rozvineme-li opět výraz $[1 - (zd/r^2)]^{-1/2}$ do binomické řady a zanedbáme členy s mocninami d vyššími než 2, dostaneme výraz

$$\frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{zd}{r^2}\right).$$

Podobně

$$\frac{1}{\sqrt{[z + (d/2)]^2 + x^2 + y^2}} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{zd}{r^2}\right).$$

Z rozdílu těchto dvou členů vyplývá vztah pro potenciál:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^3} qd. \quad (6.9)$$

Potenciál a tedy i pole jako jeho derivace jsou přímo úměrné veličině qd , tj. součinu velikosti každého z nábojů a vzdálenosti mezi nimi. Tento součin je definován jako *elektrický dipólový moment* obou nábojů, pro nějž budeme používat symbol p . (Nepleťte si jej s hybností!):

$$p = qd. \quad (6.10)$$

Vztah (6.9) je možné napsat i takto

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \vartheta}{r^2}, \quad (6.11)$$

protože $z/r = \cos \vartheta$, kde ϑ je úhel mezi osou dipólu a polohovým vektorem bodu (x, y, z) – viz obr. 6.1. Pro daný směr vzhledem k ose klesá *potenciál* dipólu jako $1/r^2$ (zatímco pro bodový náboj klesá jako $1/r$). Elektrické pole dipólu pak bude klesat jako $1/r^3$.

Náš vzorec můžeme přepsat na vektorový tvar, definujeme-li p jako vektor, který má velikost p a směřuje rovnoběžně s osou dipólu od q_- do q_+ . Pak

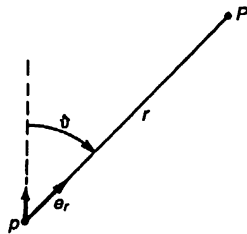
$$p \cos \vartheta = p \cdot e_r, \quad (6.12)$$

kde e_r je jednotkový vektor ve směru polohového vektoru (obr. 6.3). Kromě toho bod (x, y, z) můžeme určit polohovým vektorem r . Pak

POTENCIÁL DIPÓLU:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cdot e_r}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cdot r}{r^3}. \quad (6.13)$$

Tento vzorec platí pro dipól s jakoukoliv orientací a polohou, představuje-li r vektor směřující od dipólu do bodu, o který se zajímáme.



Obr. 6.3 Vektorová symbolika pro dipól

Chceme-li určit elektrické pole dipólu, můžeme jej vypočítat jako gradient potenciálu φ .

Například z -ová složka pole je $-\partial\varphi/\partial z$. Pro dipól orientovaný ve směru osy z můžeme použít vztah (6.9) a dostaneme

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r^3} \right) = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \right)$$

nebo

$$E_z = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\cos^2\vartheta - 1}{r^3}, \quad (6.14)$$

x -ová a y -ová složka je vyjádřena takto:

$$E_x = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3zx}{r^5}, \quad E_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3zy}{r^5}.$$

Je možné složit obě do jedné složky, směřující kolmo na osu z , kterou budeme nazývat *příčná složka* E_{\perp} :

$$E_{\perp} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3z}{r^5} \sqrt{x^2 + y^2}$$

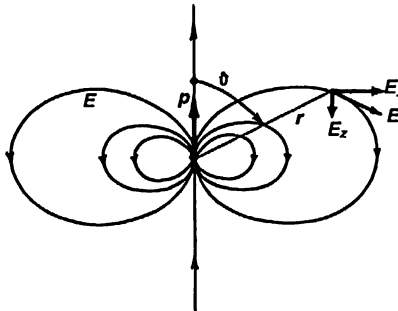
nebo

$$E_{\perp} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\cos\vartheta\sin\vartheta}{r^3}. \quad (6.15)$$

Příčná složka E_{\perp} leží v rovině xy a směřuje kolmo k dipólu. Výsledné pole dipólu má velikost

$$E = \sqrt{E_z^2 + E_{\perp}^2}.$$

Pole dipólu se mění nepřímo úměrně třetí mocnině vzdálenosti od dipólu. Na ose je při $\vartheta=0$ dvakrát silnější než při $\vartheta=90^\circ$. Při obou těchto speciálních úhlech má pole pouze z -ovou složku, ale s opačným znaménkem (obr. 6.4).



Obr. 6.4 Elektrické pole dipólu

6.3 POZNÁMKY O VEKTOROVÝCH ROVNICÍCH

Zde je namísto udělat obecnou poznámku o vektorové analýze. Ačkoli je možné základní tvrzení vyjádřit elegantními rovnicemi v obecném tvaru, je při různých výpočtech a analýzách vždy dobré zvolit osy nějakým vhodným způsobem. Všimněte si, že když jsme hledali potenciál dipólu, zvolili jsme osu z ve směru dipólu, a ne pod nějakým libovolným úhlem. To nám práci dost zjednodušilo. Ale výsledky jsme potom vyjádřili ve vektorovém tvaru, takže už nezávisely na nějaké speciální souřadnicové soustavě. Dále můžeme zvolit libovolnou souřadnicovou soustavu, neboť víme, že daný vztah platí obecně. Prostě nemá smysl trápit se s obecnou souřadnicovou soustavou s osami směřujícími pod nějakým komplikovaným úhlem, když je možné pro danou úlohu zvolit šikvou souřadnicovou soustavu s tím, že výsledek bude stejně vyjádřen jako vektorová rovnice. Všechno tedy využívejte výhodu toho, že vektorové rovnice nezávisí na žádné souřadnicové soustavě.

Na druhé straně, pokoušete-li se počítat divergenci vektoru, místo toho, abyste se dívali na $\nabla \cdot \mathbf{E}$ a přemýšleli, co to je, nezapomeňte, že lze vždy rozepsat jako

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Dokážete-li pak vypočítat x -ovou, y -ovou a z -ovou složku elektrického pole a derivujete je, dostanete divergenci. Často vzniká dojem, že rozepisování složek je cosi neohrabaného, jakýsi druh ústupku, že totiž musí vždy existovat nějaký způsob, jak to vše udělat pomocí vektorových operátorů. To však často neposkytuje žádnou výhodu. Když se poprvé setkáme s nějakou úlohou, je obvykle dobré rozepsat si vše po složkách, abychom se přesvědčili, že rozumíme tomu, co se děje. Není nic nešikovního v dosazování čísel do rovnic ani v dosazování derivací za fantastické symboly. Naopak, právě s tím je často spojena určitá důmyslnost. Samozřejmě, když publikujete článek v odborném časopise, bude vypadat lépe a bude srozumitelnější, dokážete-li vše napsat ve vektorovém tvaru. Kromě toho tím ušetříte místo.

6.4 POTENCIÁL DIPÓLU JAKO GRADIENT

Rádi bychom poukázali na dost zajímavou vlastnost vztahu (6.13) pro dipól. Potenciál je možné napsat i takto

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right). \quad (6.16)$$

Vypočtáte-li gradient veličiny $1/r$, dostanete

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\mathbf{e}_r}{r^2},$$

a vztah (6.16) je tedy totožný se vztahem (6.13).

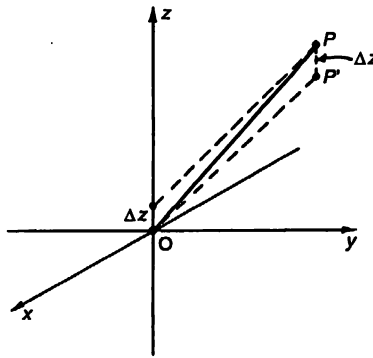
Jak jsme na to přišli? Jen jsme si vzpomněli, že součinitel e_r/r^2 se objevil i ve vztahu pro pole bodového náboje a toto pole je gradientem *potenciálu*, který závisí na $1/r$.

Existuje však i fyzikální důvod, že potenciál dipólu lze napsat ve tvaru (6.16). Předpokládejme, že máme bodový náboj v počátku souřadnicové soustavy. Potenciál v bodě P se souřadnicemi (x, y, z) je

$$\varphi_0 = \frac{q}{r}.$$

(Po dobu těchto úvah vynecháme součinitel $1/4 \pi \epsilon_0$; připsat jej můžeme až nakonec.) Posuneme-li nyní náboj $+q$ o vzdálenost Δz , potenciál v P se *trochu* změní, řekněme o $\Delta \varphi_+$. Jakou hodnotu má $\Delta \varphi_+$? Takovou, o jakou by se potenciál změnil, kdybychom náboj *ponechali* v počátku a posunuli *dolů* P o stejnou vzdálenost Δz (obr. 6.5). Tedy

$$\Delta \varphi_+ = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \Delta z,$$



Obr. 6.5 Potenciál v bodě P od bodového náboje v poloze Δz nad počátkem souřadnicové soustavy je stejný jako potenciál v bodě P' (posunutém o Δz pod P) od téhož náboje umístěného v počátku

kde pod Δz rozumíme totéž jako pod $d/2$. Tak s ohledem na vztah $\varphi = q/r$ dostáváme, že potenciál souvisí s kladným nábojem je

$$\varphi_+ = \frac{q}{r} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{q}{r} \right) \frac{d}{2}. \quad (6.17)$$

Ze stejných důvodů můžeme pro potenciál záporného náboje psát

$$\varphi_- = \frac{-q}{r} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{-q}{r} \right) \frac{d}{2}. \quad (6.18)$$

Výsledný potenciál je součtem (6.17) a (6.18):

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{q}{r} \right) d = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) qd. \quad (6.19)$$

Pro jiné orientace dipólu bychom posunutí kladného náboje mohli popsat pomocí vektoru

$\Delta \mathbf{r}_+$. Pak bychom vztah (6.17) napsali takto

$$\Delta \varphi_+ = -\nabla \varphi_0 \cdot \Delta \mathbf{r}_+,$$

kde je nutné nahradit $\Delta \mathbf{r}$ veličinou $d/2$. Když dokončíme odvození jako předtím, vztah (6.19) získá tvar

$$\varphi = -\nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot q \mathbf{d}.$$

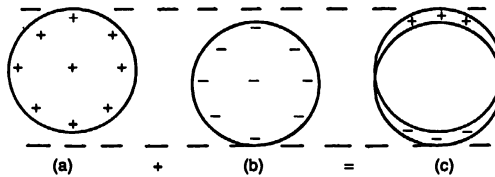
Je to totéž jako vztah (6.16), položíme-li $q \mathbf{d} = \mathbf{p}$ a opět vložíme součinitel $1/4 \pi \epsilon_0$. Podíváme-li se na to jinak, vidíme, že potenciál dipólu (vztah 6.13) můžeme zapsat takto

$$\varphi = -\mathbf{p} \cdot \nabla \varphi_0, \quad (6.20)$$

kde $\varphi_0 = 1/4 \pi \epsilon_0 r$ je potenciál *jednotkového* bodového náboje.

Potenciál známého rozdělení nábojů můžeme vždy vypočítat integrováním. Někdy je však možné ušetřit čas pomocí nějakého důvtipného kroku. Například často lze použít princip superpozice. Máme-li takové rozdělení nábojů, které je možné popsat jako součet dvou rozdělení, pro které jsou už potenciály známé, najdeme požadovaný potenciál snadno prostým sčítáním obou známých potenciálů. Jedním takovým příkladem je naše odvození vztahu (6.20), druhý příklad následuje.

Předpokládejme kulovou plochu s plošným nábojem, jehož rozdělení závisí na kosinu polárního úhlu. Takové rozdělení se integruje dost nešikovně. Ale, a to je překvapující, je možné jej analyzovat pomocí superpozice. Proto si představte jednu kouli s homogenní *objemovou* hustotou kladného náboje a stejně velkou druhou kouli se stejnou objemovou hustotou záporného náboje. Nechtě obě koule splynou a vytvoří jedinou neutrální, tj. nenabitou kouli. Posune-li se pak kladná koule vzhledem k záporné kouli, zůstane těleso jako celek neutrální, ale na jedné straně se objeví malý kladný náboj a na opačné straně nějaký záporný náboj, jak to ilustruje *obr. 6.6*. Je-li relativní posun obou koulí malý, bude výsledný náboj ekvivalentní plošnému povrchovému náboji a jeho plošná hustota bude přímo úměrná kosinu polárního úhlu.



Obr. 6.6 Dvě objemově rovnoměrně nabitě koule pronikající se s malým vzájemným posunutím jsou ekvivalentní s nerovnoměrným rozdělením povrchového náboje

Potřebujeme-li nyní znát potenciál tohoto rozdělení, nemusíme počítat integrál. Víme, že potenciál každé s obou nabitých koulí je v bodech mimo koule stejný jako u bodového náboje. Obě posunuté koule jsou jako dva bodové náboje; potenciál je pro ně stejný jako pro dipól.

Tak můžete dokázat, že rozdělení náboje na kulové ploše s poloměrem R a s plošnou hustotou

$$\sigma = \sigma_0 \cos \vartheta$$

vytváří na vnější straně kulové plochy pole, které je totožné s polem dipólu s momentem

$$p = \frac{4\pi\sigma_0 R^3}{3}.$$

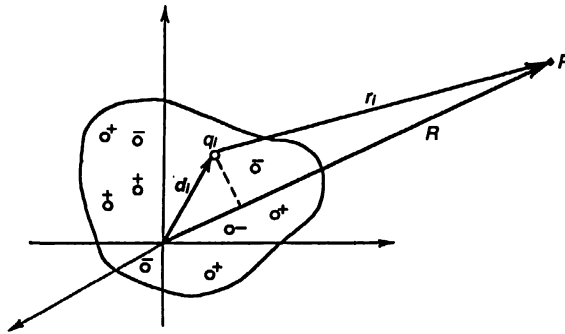
Kromě toho lze ukázat, že uvnitř koule je konstantní pole s velikostí

$$E = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}.$$

Je-li ϑ úhel odklonu od kladného směru osy z , má elektrické pole uvnitř koule směr *záporné* osy z . Příklad, který jsme právě rozebrali, není tak umělý, jak by se snad zdálo. Opět se s ním setkáme v teorii dielektrik.

6.5 DIPÓLOVÉ PŘIBLÍŽENÍ PRO LIBOVOLNÉ ROZDĚLENÍ NÁBOJE

Pole dipólu se jeví zajímavým a důležitým ještě v jedné situaci. Představte si, že máme těleso se složitým rozdělením náboje, řekněme molekulu vody (obr. 6.2), a zajímá nás pole pouze daleko od něj. Ukážeme, že lze najít poměrně jednoduchý výraz pro pole, platící na vzdálenostech, jež jsou vzhledem k rozměrům tělesa velké.



Obr. 6.7 Výpočet potenciálu v bodě P nacházejícím se ve velké vzdálenosti od soustavy nábojů

Naše těleso můžeme považovat za soubor nábojů q_i rozmístěných v určité vymezené oblasti, jak to znázorňuje obr. 6.7 (Později můžeme, budeme-li chtít, nahradit q_i veličinou $q dV$). Necht se každý náboj q_i nachází v poloze d_i vzhledem k počátku souřadnicové soustavy, jenž byl zvolen někde ve středu skupiny nábojů. Čemu je roven potenciál v bodě P , nacházejícím se v poloze R vzhledem k počátku, přičemž délka R je mnohem větší než délka největšího posunutí d_i ? Potenciál pocházející od celého souboru je

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad (6.21)$$

kde r_i je vzdálenost od P k náboji q_i (délka vektoru $R - d_i$). Je-li nyní vzdálenost nábojů od P , tj. bodu pozorování, velmi velká, je možné každou z hodnot r_i aproximovat hodnotou R . Každý člen sumy pak bude roven q_i/R a $1/R$ můžeme vyjmout před znak součtu jako součinitel. Dostaneme jednoduchý výsledek, že

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \sum_i q_i = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad (6.22)$$

kde Q je celkový náboj tělesa. Tak jsme zjistili, že pro body, jež se nacházejí dostatečně daleko od jakéhokoliv nabitého tělesa, se toto těleso jeví jako bodový náboj.

Ovšem tento výsledek není příliš překvapující.

Ale co když jde o stejná množství kladného a záporného náboje? Celkový náboj je pak roven nule. Toto není neobvyčejný případ; ve skutečnosti, jak víme, bývají tělesa obvykle neutrální. Molekula vody je neutrální, ale náboje v ní se nenacházejí všechny v jednom bodě, takže jsme-li dost blízko, měli bychom pozorovat nějaké účinky oddělených nábojů. Pro potenciál libovolného rozdělení náboje v neutrálním tělese potřebujeme tedy lepší aproximaci, než je (6.22). Výraz (6.21) je ještě přesný, ale už nemůžeme klást $r_i = R$. Potřebujeme vyjádřit r_i přesněji. Je-li bod P ve velké vzdálenosti, bude se r_i lišit od R ve výborném přiblížení o průmět d na R , jak se můžete přesvědčit z obr. 6.7. (Uvědomte si, že P je ve skutečnosti o mnoho dál, než je vidět na obrázku.) Jinými slovy, je-li e_r jednotkový vektor ve směru R , je potom naše následující přiblížení k r_i

$$r_i \approx R - d_i \cdot e_r. \quad (6.23)$$

Ve skutečnosti potřebujeme $1/r_i$, což můžeme v naší aproximaci zapsat jako

$$\frac{1}{r_i} \approx \frac{1}{R} \left(1 + \frac{d_i \cdot e_r}{R} \right), \quad (6.24)$$

protože $d_i \ll R$. Po dosazení tohoto výrazu do (6.21) dostaneme, že potenciál je

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{R} + \sum_i q_i \frac{d_i \cdot e_r}{R^2} + \dots \right). \quad (6.25)$$

Tři tečky označují členy s vyšším řádem veličiny d/R , které jsme zanedbali. Tyto, jakož i ty členy, které jsme vypsalí, představují za sebou následující členy v Taylorově rozvoji $1/r_i$ kolem hodnoty $1/R$, uspořádané podle mocnin d_i/R .

První člen v (6.25) je totožný s tím, který jsme dostali předtím; vypadne, je-li těleso neutrální. Druhý člen závisí na $1/R^2$ tak jako v případě dipólu. Ve skutečnosti, *definujeme-li*

$$p = \sum_i q_i d_i \quad (6.26)$$

jako vlastnost rozdělení náboje, druhý člen ve výrazu (6.25) pro potenciál

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cdot e_r}{R^2} \quad (6.27)$$

je přesně potenciálem dipólu. Veličina p se nazývá *dipólovým momentem rozdělení*. Jde o zobecnění naší dřívější definice a na ni se redukuje ve speciálním případě dvou bodových nábojů.

Dospěli jsme k výsledku, že dostatečně daleko od jakéhokoliv seskupení nábojů, které je jako celek neutrální, má potenciál charakter potenciálu dipólu. Klesá jako $1/R^2$ a mění se jako $\cos \vartheta$. Jeho velikost závisí na dipólovém momentu rozdělení náboje. Dipólová pole jsou důležitá právě z těchto důvodů, neboť jednoduchý případ páru bodových nábojů je velmi ojedinelý.

Molekula vody má např. dost velký dipólový moment. Elektrická pole, která pocházejí z tohoto momentu, jsou příčinou některých důležitých vlastností vody. V mnohých molekulách, například CO_2 , je v důsledku jejich souměrnosti dipólový moment nulový. Pro ně bychom měli rozvoj vypracovat přesněji a do výrazu pro potenciál zahrnout další člen, který klesá jako $1/R^3$ a který se nazývá kvadrupólovým potenciálem. O takových případech budeme hovořit později.

6.6 POLE NABITÝCH VODIČŮ

Tím jsme probrali příklady situací, v nichž známe rozdělení náboje od začátku. Šlo o úlohu bez vážných komplikací, vyžadující přinejhorším několik integrování. Nyní se pustíme do docela nové úlohy – určit pole v okolí nabitých vodičů.

Předpokládejme, že na libovolný vodič je vložen celkový náboj Q . Nyní nebudeme schopni přesně říci, kde jmenovitě se náboje nacházejí. Jsou nějakým způsobem rozloženy na povrchu. Jak se můžeme dozvědět, jak se náboje na povrchu rozdělily? Musí se rozdělit tak, aby potenciál na povrchu byl konstantní. Kdyby totiž neměl celý povrch stejný potenciál, existovalo by uvnitř vodiče elektrické pole a dokud by nevymizelo, nepřestaly by se náboje pohybovat. Obecnou úlohu tohoto druhu můžeme řešit následujícím způsobem. Odhadneme rozdělení náboje a vypočítáme jeho potenciál. Ukáže-li se, že je všude na povrchu konstantní, je úloha vyřešena. Není-li povrch ekvipotenciální, neuhádli jsme rozdělení nábojů správně a musíme hádat znovu – s nadějí, že budeme mít přesnější odhad. Tak je možné pokračovat do nekonečna, nejsme-li v postupných odhadech náležitě šikovni.

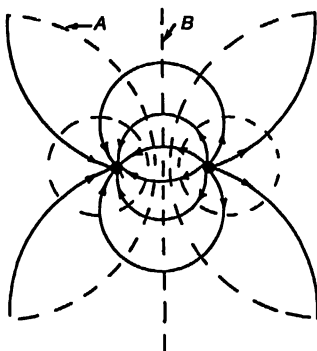
Otázka, jak uhádnout rozdělení, je matematicky těžká. Příroda na to má, samozřejmě, čas; náboje se strkají a tahají, dokud nejsou všechny navzájem vyvážené. Když se však my pokoušíme takto řešit tuto úlohu, zabírá nám každý pokus tolik času, že taková metoda je velmi zdoluhavá. V případě libovolného souboru vodičů a nábojů může jít o velmi složitou úlohu, kterou nelze obecně řešit bez dosti pracných numerických metod. Takové numerické výpočty se v současnosti dají do počítače, který práci udělá za nás, je pouze nutné mu „říci“ jak při ní postupovat.

Na druhé straně, existuje mnoho jednodušších praktických případů, v nichž by bylo užitečné vědět, jak najít řešení nějakou přímější metodou – bez psaní programu pro počítač. Naštěstí existuje nemálo případů, kde je možné odpověď přímo vytáhnout z přírody nějakým trikem. První trik, který popíšeme, využívá řešení, která jsme už získali pro situace, kdy náboje zaujímaly dané polohy.

6.7 METODA ELEKTRICKÉHO ZOBRAZENÍ

Například jsme vypočítali pole dvou bodových nábojů. *Obrázek 6.8* ukazuje některé ze siločar a ekvipotenciálních ploch, jež jsme získali výpočty v kapitole 5. Uvažujme nyní ekvipotenciální plochu označenou A . Představte si, že bychom vytvarovali nějaký tenký kovový plech tak, aby byl

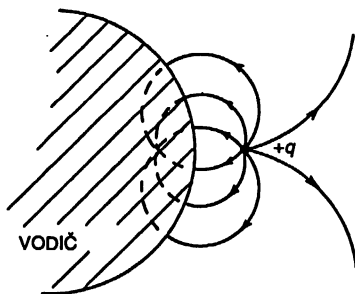
přesně shodný s touto plochou. Umístíme-li jej přímo na plochu a jeho potenciál upravíme na příslušnou hodnotu, nikdo se nikdy nedoví, že je tam, protože se tím nic nezměnilo.



Obr. 6.8 Siločáry a ekvipotenciální plochy pro dva bodové náboje

Ale pozor! Ve skutečnosti jsme vyřešili novou úlohu. Máme situaci, v níž se povrch zakřiveného vodiče s daným potenciálem nachází v blízkosti bodového náboje. Uzavírá-li se kovový plech, který jsme umístili na ekvipotenciální plochu, sám do sebe (nebo v praxi se táhne dostatečně daleko), máme situaci, kterou jsme rozebírali v článku 5.10, kdy je prostor rozdělen na dvě oblasti – jednu uvnitř a druhou vně uzavřené vodivé plochy. Tam jsme zjistili, že pole v obou oblastech jedno na druhém vůbec nezávisí. Na vnější straně našeho zakřiveného vodiče tedy máme tatáž pole bez ohledu na to, co je uvnitř. Dokonce můžeme celé nitro vyplnit vodivou látkou. Tak jsme našli pole pro uspořádání znázorněné na obr. 6.9. V prostoru mimo vodič je pole právě takové jako pro dva bodové náboje, tj. jako na obr. 6.8. Uvnitř vodiče je rovno nule. Kromě toho je pole v bezprostřední blízkosti vodiče – jak to musí být – kolmé na jeho povrch.

Podle toho můžeme pole na obr. 6.9 vypočítat tak, že vypočteme pole pocházející od náboje q a myšleného bodového náboje $-q$ nacházejícího se ve vhodném bodě. Bodový náboj, kterým za vodivou plochou „zobrazujeme“ existující náboj, se nazývá *zrcadlový náboj*.



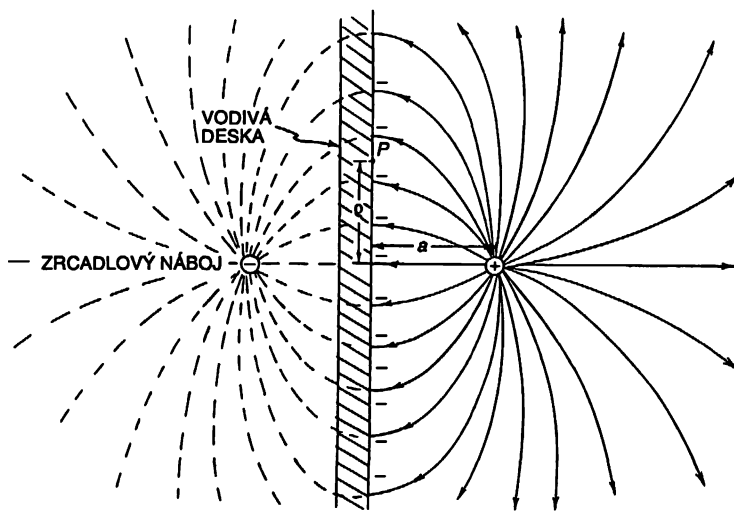
Obr. 6.9 Pole na vnější straně vodiče, jehož povrch má tvar ekvipotenciální plochy A na obr. 6.8.

V knihách můžete najít dlouhé seznamy řešení pro hyperbolické plochy a další komplikovaně vypadající věci a divte se, jak někdo dokázal vyřešit úlohu pro tyto hrozně tvary. Byly řešeny zpětným postupem. Někdo řešil jednoduchou úlohu s danými náboji. Potom zjistil, že některá ekvipotenciální plocha se objevila v novém tvaru a napsal článek o tom, že pole vně tohoto konkrétního tvaru je možno popsat určitým způsobem.

6.8 BODOVÝ NÁBOJ V BLÍZKOSTI VODIVÉ ROVINY

Jako nejjednodušší aplikaci této metody využijeme rovinnou ekvipotenciální plochu B na obr. 6.8. Její pomocí je možné řešit úlohu o náboji v blízkosti vodivé roviny, přičemž pouze „vymažeme“ levou polovinu obrázku. Siločáry v našem řešení znázorňuje obr. 6.10. Všimněte si, že rovina, protože procházela středem mezi oběma náboji, má nulový potenciál. Tím jsme tedy řešili úlohu o kladném náboji v blízkosti uzemněné vodivé roviny.

Našli jsme celkové pole, ale jak je to s *reálnými* náboji, které je vytváří? Kromě našeho kladného bodového náboje existují i určité indukované záporné náboje na vodivé rovině, přitahované naším bodovým nábojem (z velkých vzdáleností). Nyní předpokládejme, že z nějakého technického důvodu, nebo z čisté zvědavosti, byste se rádi dověděli, jak jsou tyto záporné náboje na vodivé ploše rozděleny.



Obr. 6.10 Pole náboje v blízkosti rovinné vodivé plochy najdeme metodou zrcadlových elektrických nábojů.

Hustotu plošného náboje můžete najít použitím výsledku, k němuž jsme dospěli pomocí Gaussovy věty v článku 5.6. Normálová složka elektrického pole bezprostředně při povrchu vodiče je rovna hustotě náboje σ dělené ϵ_0 . Hustotu náboje v jakémkoliv bodě na povrchu vodiče můžeme tedy dostat zpětným postupem z normálové složky elektrického pole při povrchu. A tu známe, neboť pole známe všude.

Uvažujme bod P na povrchu ve vzdálenosti ρ od bodu, který leží přímo proti kladnému náboji (obr. 6.10). V bodě P je elektrické pole kolmé na povrch a směřuje k němu. Normálová složka pole od *kladného* bodového náboje je

$$E_{n^+} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{aq}{(a^2 + \rho^2)^{3/2}}. \quad (6.28)$$

K této hodnotě musíme přičíst elektrické pole vytvářené záporným zrcadlovým nábojem. Ten zdvojnásobuje normálovou složku (a ruší všechny jiné složky), takže plošná hustota náboje

σ v každém bodě plochy je

$$\sigma(\varrho) = \varepsilon_0 E(\varrho) = -\frac{2aq}{4\pi(a^2 + \varrho^2)^{3/2}}. \quad (6.29)$$

Zajímavý způsob, jak ověřit naše výpočty, spočívá v integrování σ přes celou plochu. Zjistíme, že sumární indukovaný náboj je $-q$, tak jak má být.

Můžeme si položit další otázku. Působí na náš bodový náboj nějaká síla? Odpověď: Ano, neboť existuje přitahování k zápornému plošnému náboji indukovanému v rovině. Protože nyní víme, jaké jsou plošné náboje (ze vztahu 6.29), mohli bychom vypočítat sílu působící na náš kladný náboj integrálem. My už však také víme, že síla na něj působící je přesně taková, jaká by byla se záporným zrcadlovým nábojem místo vodivé desky, protože v obou případech jsou pole v okolí stejná. Bodový náboj je přitahován směrem k desce silou, jejíž velikost tedy je

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{(2a)^2}. \quad (6.30)$$

Tak jsme našli sílu o mnoho snáze než integrováním přes všechny záporné náboje.

6.9 BODOVÝ NÁBOJ V BLÍZKOSTI VODIVÉ KOULE

Jaké jiné plochy kromě roviny mají jednoduché řešení? Další nejjednodušší tvar má kulová plocha. Najdeme tedy pole v okolí kovové koule, v jejíž blízkosti je bodový náboj (obr. 6.11). Musíme hledat takovou jednoduchou fyzikální situaci, v níž bude některá ekvipotenciální hladina kulovou plochou. Pohlédneme-li se po úlohách, které už lidé vyřešili, zjistíme, že existence ekvipotenciální plochy kulového tvaru byla zaznamenána v poli dvou *různých* bodových nábojů. Zvolíme-li polohu zrcadlového náboje a jeho správnou velikost, dokážeme možná ztotožnit tuto ekvipotenciální plochu s naší koulí. Opravdu toho lze dosáhnout podle následujícího návodu.

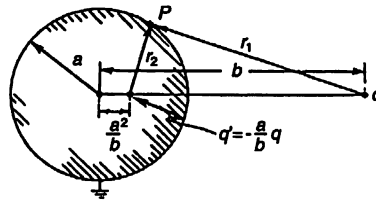
Předpokládejme, že chcete, aby ekvipotenciální plocha byla kulovou plochou s poloměrem a , přičemž její střed se nachází ve vzdálenosti b od náboje q . Umístěte obraz náboje $q' = -q(a/b)$ na spojnici náboje se středem koule ve vzdálenosti a^2/b od středu koule. Koule pak bude mít nulový potenciál.

Matematické zdůvodnění je založeno na skutečnosti, že kulová plocha je množinou bodů, jejichž vzdálenosti od dvou pevných bodů jsou ve stálém poměru. Z obr. 6.11 vyplývá, že potenciál v bodě P od nábojů q a q' je přímo úměrný veličině

$$\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2}.$$

Bude tedy roven nule ve všech bodech, pro které

$$\frac{q'}{r_2} = -\frac{q}{r_1} \text{ nebo } \frac{r_2}{r_1} = -\frac{q'}{q}.$$



Obr. 6.11 Bodový náboj q indukuje na uzemněné vodivé kouli náboje vytvářející stejné pole jako zrcadlový náboj q' umístěný přesně v ukázaném bodě

Umístíme-li q' do vzdálenosti a^2/b od středu koule, bude mít poloměr r_2/r_1 stálou hodnotu a/b . Je-li potom

$$\frac{q'}{q} = -\frac{a}{b}, \quad (6.31)$$

povrch koule je ekvipotenciální plochou. Její potenciál je opravdu roven nule.

Co se stane, zajímá-li nás koule, která není na nulovém potenciálu? Tak by to bylo pouze tehdy, kdyby její celkový náboj byl náhodou q' . Samozřejmě, je-li uzemněná, musí být náboje na ní indukované rovny právě této hodnotě. Ale co když je izolovaná a nepřivedli jsme na ni žádný náboj? Nebo víme-li, že na ni byl uložen celkový náboj Q ? Nebo pouze, že má nenulový potenciál? Všechny tyto otázky lze snadno zodpovědět. Vždy můžeme přidat bodový náboj q'' do středu koule. Kulová plocha přitom zůstane ekvipotenciální na základě superpozice; změní se pouze hodnota jejího potenciálu.

Máme-li například vodivou kouli, která je původně nenabitá a od všeho izolovaná a přiblížíme k ní kladný bodový náboj q , zůstane celkový náboj koule nulový. Řešení najdeme pomocí zrcadlového náboje q' jako předtím, přidáme-li kromě toho do středu koule náboj q'' , přičemž

$$q'' = -q' = \frac{a}{b} q. \quad (6.32)$$

Pole všude v okolí koule určíme superpozicí polí od q , q' a q'' . Úloha je tak vyřešena.

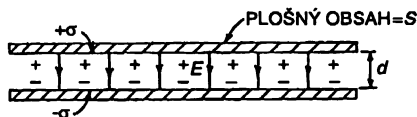
Nyní se můžeme přesvědčit, že mezi koulí a bodovým nábojem q bude působit přitažlivá síla. Ta není nulová ani tehdy, když na neutrální kouli není žádný náboj. Z čeho pochází toto přitahování? Přiblížíte-li k vodivé kouli kladný náboj, přitáhne na její přivrácenou stranu záporné náboje, zatímco kladné ponechá na povrchu vzdálené strany. Přitahování zápornými náboji převládá odpuzování kladnými náboji a výsledkem je přitahování. Jeho velikost můžeme najít výpočtem síly působící na q v poli vytvořeném náboji q' a q'' . Výsledná síla je součtem přitažlivé síly mezi q a nábojem $q' = -(a/b)q$, jenž se nachází ve vzdálenosti $b - (a^2/b)$ od q a odpudivé síly mezi q a nábojem $q'' = +(a/b)q$, který je ve vzdálenosti b od q .

Ty, které v dětství zaujala krabička s práškem do pečiva, na které byl obrázek krabičky s práškem do pečiva, na které byl obrázek krabičky s práškem do pečiva ... snad zaujme následující úloha. V určité vzdálenosti od sebe se nacházejí dvě koule, jedna s celkovým nábojem $+Q$ a druhá s celkovým nábojem $-Q$. Jaká mezi nimi působí síla? Úlohu je možno řešit pomocí nekonečného počtu zrcadlení. Nejdříve je každá koule aproximována nábojem v jejím středu. Každá z nich má svůj zrcadlový náboj v druhé kouli. Zrcadlové náboje budou mít své zrcadlové náboje atd., atd., atd. Řešení připomíná obrázek na krabičce s práškem do pečiva a konverguje velice rychle.

6.10 KONDENZÁTORY. ROVNOBĚŽNÉ DESKY

Nyní se budeme zabývat jinou úlohou týkající se vodičů. Uvažujme dvě rovnoběžné kovové desky, jejichž vzájemná vzdálenost je malá ve srovnání s jejich rozměry. Předpokládejme, že jsme na desky přivedli stejně velké náboje s opačnými znaménky. Náboje na každé z desek budou přitahovány náboji na druhé desce a rozdělí se rovnoměrně na vnitřním povrchu desek. Plošné hustoty nábojů na deskách budou $+\sigma$, resp. $-\sigma$ (obr. 6.12). Z kapitoly 5 víme, že pole mezi deskami je σ/ϵ_0 a mimo desky je rovno nule. Desky budou mít rozdílné potenciály φ_1 a φ_2 . Je vhodné označit jejich rozdíl písmenem U a nazvat jej *napětím*:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U.$$



Obr. 6.12 Kondenzátor s rovnoběžnými rovinnými elektrodami

Rozdíl potenciálů je práce připadající na jednotku náboje, jež je spotřebována na přenos malého náboje z jedné desky na druhou, takže

$$U = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{d}{\epsilon_0 S} Q, \quad (6.33)$$

kde $\pm Q$ je celkový náboj na každé desce, S je plošný obsah desek a d je jejich vzájemná vzdálenost.

Vidíme, že napětí je přímo úměrné náboji. Přímá úměrnost mezi U a Q platí pro jakékoliv dva vodiče v prostoru, je-li na jednom z nich kladný a na druhém stejně velký záporný náboj. Rozdíl potenciálů mezi nimi, tj. napětí, je přímo úměrný náboji. (Přitom předpokládáme, že v okolí nejsou jiné náboje.)

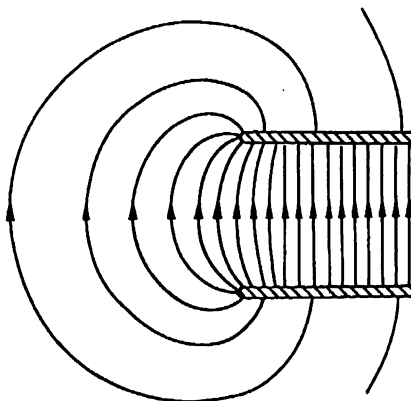
Proč platí tato přímá úměrnost? Plyne z principu superpozice. Předpokládejme, že známe řešení pro jednu sadu nábojů a chceme složit dvě taková řešení. Náboje se zdvojnásobí, pole se zdvojnásobí, a zdvojnásobí se tedy i práce konaná při přenosu jednotkového náboje z jednoho bodu do druhého. Proto je rozdíl potenciálů jakýchkoliv dvou bodů přímo úměrný nábojům. Speciálně, rozdíl potenciálů dvou vodičů je přímo úměrný nábojům na nich. Kdosi původně napsal tuto přímou úměrnost obráceně, tj.

$$Q = CU,$$

kde C je konstanta. Tento součinitel přímé úměrnosti se nazývá *kapacita* a taková soustava dvou vodičů je *kondenzátor*. V případě našeho kondenzátoru s rovnoběžnými deskami platí

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (\text{rovnoběžné desky}). \quad (6.34)$$

Tento vzorec není přesný, neboť ve skutečnosti není pole všude mezi deskami homogenní, jak jsme předpokládali. Na okrajích desek pole nekončí najednou, ale odpovídá spíš průběhu, jaký znázorňuje obr. 6.13.



Obr. 6.13 Elektrické pole v blízkosti okraje dvou rovnoběžných desek

Celkový náboj není σS , jak jsme předpokládali, ale je třeba provést malou korekci vzhledem k okrajovým jevům. Abychom ji dostali, musíme pole vypočítat přesněji a najít, co se děje na okrajích. To je složitá matematická úloha. Lze ji však řešit technikou, kterou nebudeme nyní popisovat. Výsledky takových výpočtů ukazují, že v blízkosti hran se hustota náboje o něco zvětšuje. To znamená, že kapacita desek je trochu větší, než jsme počítali. (Pro kapacitu dostaneme velmi dobré přiblížení, použijeme-li vzorec (6.34), ale za S dosadíme plochu, kterou by desky měly, kdybychom jejich rozměry zvětšili o $3/8$ vzdálenosti mezi nimi.)

Hovořili jsou pouze o kapacitě dvou vodičů. Někdy se mluví o kapacitě jediného tělesa. Například se říká, že kapacita koule s poloměrem R je $4\pi\epsilon_0 R$. Přitom se však rozumí, že druhou elektrodou je koule s nekonečně velkým poloměrem, tj. že je-li náboj $+Q$ na naší kouli, je opačný náboj $-Q$ na nekonečné kouli. O kapacitách můžeme hovořit i tehdy, když existují tři anebo víc vodičů. Diskuzi o tom však zatím odložíme.

Představte si, že chceme mít kondenzátor s velmi velkou kapacitou. Velkou kapacitu bychom mohli dostat, kdybychom vzali velmi velkou plochu a velmi malou vzdálenost. Mohli bychom mezi dvě hliníkové fólie vložit impregnovaný papír a potom to stočit. (Kdybychom to zapustili do plastického pouzdra, dostali bychom typický radiotechnický kondenzátor.) K čemu je to dobré? Hodí se to k hromadění náboje. Shromažďujeme-li náboj například na povrchu koule, vzrůstá při nabíjení tělesa prudce jeho potenciál. Může dokonce dosáhnout takové hodnoty, že náboj začne jiskrovým výbojem unikat do vzduchu. Ale vložíme-li tentýž náboj na kondenzátor s velkou kapacitou, napětí na kondenzátoru bude malé.

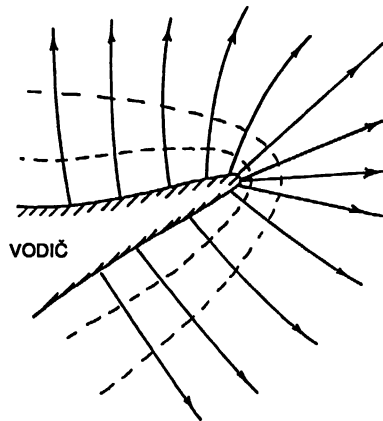
V elektronických obvodech je často užitečné mít něco, co může pohlcovat nebo dodávat velká množství náboje bez větší změny svého potenciálu. Právě k tomu slouží kondenzátor. V mnoha případech se v elektronických přístrojích a v počítačích používá také k tomu, aby na určitou změnu náboje reagoval požadovanou změnou napětí. S podobným použitím jsme se seznámili v 23. kapitole 1. dílu při popisu vlastností rezonančních obvodů.

Z definice kapacity C vidíme, že její jednotkou je 1 coulomb/volt. Tato jednotka se nazývá *farad*. Ze vztahu (6.34) dále vidíme, že jednotku veličiny ϵ_0 je možno vyjádřit jako farad/metr.

Typické vlastnosti kondenzátorů jsou v rozmezí od jednoho pikofaradu do milifaradů. Malé kondenzátory s několika pikofarady se používají ve vysokofrekvenčních ladicích obvodech a kapacity až do stovek nebo tisíců mikrofaradů se vyskytují ve vysokonapěťových usměrňovačích. Pár desek s plochou jeden centimetr čtvereční a mezerou jeden milimetr má kapacitu zhruba jeden pikofarad.

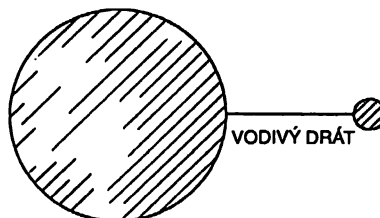
6.11 PRŮRAZ PŘI VYSOKÉM NAPĚTÍ

Nyní bychom rádi kvalitativně popsali některé charakteristiky polí v okolí vodičů. Nabijeme-li vodič, který nemá tvar koule, ale má hrot nebo ostrou hranu, například těleso nakreslené na obr. 6.14, bude pole v okolí tohoto hrotu mnohem větší než v jiných oblastech. Důvod spočívá v tom, kvalitativně řečeno, že náboje mají tendenci se co nejvíc rozestoupit po povrchu vodiče a špička hrotu je od většiny povrchu tak daleko, jak je jen to možné. Část nábojů na vodiči je tedy odpuzována až ke špičce. Poměrně malé množství náboje na špičce může vést k velké plošné hustotě; velká hustota náboje znamená silné pole v těsném sousedství.



Obr. 6.14 V blízkosti ostrého hrotu na vodiči je elektrické pole velmi silné

Jeden způsob, jak se přesvědčit, že nejsilnější pole je v těch místech na vodiči, kde je nejmenší poloměr křivosti, spočívá v analýze kombinace dvou koulí, velké a malé, spojených pomocí vodivého drátu (obr. 6.15).



Obr. 6.15 Pole špičatého tělesa je možné aproximovat polem dvou koulí se stejným potenciálem

Jde tak o trochu idealizovanou verzi vodivého tělesa z obr. 6.14. Drát bude mít malý vliv na vnější pole; slouží pouze k tomu, aby se koule udržovaly na stejném potenciálu. Která z koulí má na povrchu silnější pole? Má-li koule poloměr a a nese náboj Q , je její potenciál přibližně

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a}.$$

(Samozřejmě, přítomnost náboje na jedné kouli změní rozdělení náboje na druhé kouli, takže ve skutečnosti ani na jedné z nich nejsou náboje rozděleny s kulovou souměrností. Ale zajímá-li vás jen odhad polí, můžeme použít vzorec pro potenciál kulového náboje.) Když menší koule, jejíž poloměr je b , nese náboj q , je její potenciál přibližně

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{b}.$$

Ale $\varphi_1 = \varphi_2$, takže

$$\frac{Q}{a} = \frac{q}{b}.$$

Na druhé straně pole při povrchu (viz vztah 5.8) je přímo úměrné plošné hustotě náboje, jež je přímo úměrná celkovému náboji dělenému druhou mocninou poloměru. Dostáváme, že

$$\frac{E_a}{E_b} = \frac{Q/a^2}{q/b^2} = \frac{b}{a}. \quad (6.35)$$

Z toho vyplývá, že pole je silnější při povrchu malé koule. Pole jsou nepřímo úměrná polůměrům.

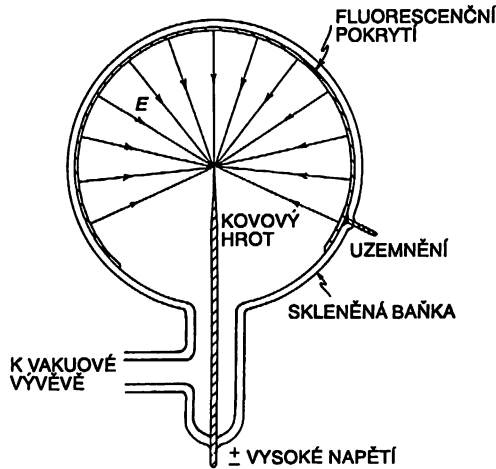
Tento výsledek je velmi důležitý z technického hlediska, neboť je-li elektrické pole příliš silné, dojde k průrazu vzduchu. Co se přitom stane? Náboj uvolněný někde ve vzduchu (elektron nebo ion) se polem urychlí a je-li pole velmi silné, může náboj dřívě, než narazí na jiný atom, nabýt rychlost postačující k tomu, aby mohl z atomu vyrazit elektron. Tak vzniká více a více iontů. Jejich pohyb vytváří výboj nebo jiskru. Chcete-li těleso nabít na vysoký potenciál a nedopustit přitom jeho vybíjení do vzduchu, musíte zabezpečit, aby mělo hladký povrch a neexistovalo tak místo, kde by bylo pole abnormálně silné.

6.12 EMISNÍ MIKROSKOP

Existuje zajímavé využití extrémně silného elektrického pole obklopujícího nějaký ostrý výčnělek na nabitém vodiči. Na silných polích vznikajících na ostrém kovovém hrotu je založena *činnost emisního mikroskopu*¹¹⁾. Je konstruován následujícím způsobem. Velmi jemná jehla s hrotem, jehož průměr je asi 0,1 mikrometru, se nachází ve středu evakuované skleněné koule (obr. 6.16).

¹¹⁾ Viz E. W. Mueller: The field-ion microscope, *Advances in Electronics and Electron Physics*. 13, 83–179 (1960). Academic Press, New York.

Vnitřní povrch koule je pokrytý tenkou vodivou vrstvou fluorescenční látky a mezi jehlu a fluorescenční kryt je vloženo velmi vysoké napětí.



Obr. 6.16. Emisní mikroskop

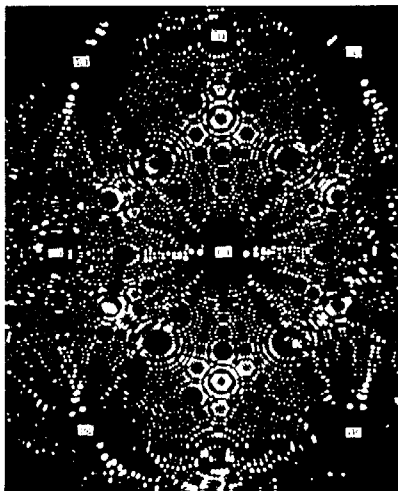
Nejdříve se podívejme, co se stane, je-li jehla vzhledem k fluorescenčnímu povlaku nabita záporně. V okolí jejího hrotu jsou siločáry silně koncentrované. Elektrické pole tam může dosáhnout až 40 milionů voltů na 1 centimetr. V takových intenzivních polích jsou elektrony vytrhávány z povrchu jehly a urychlovány napětím mezi jehlou a fluorescenční vrstvou. Při dopadu na vrstvu vyvolají emisi světla právě tak jako v televizní obrazovce.

Elektrony, které přicházejí do daného bodu na fluorescenčním povrchu, jsou s výborným přiblížením tytéž, které z jehly vyšly na opačném konci radiální siločáry, neboť se pohybují po siločáře jdoucí od hrotu k povrchu. Takovýmto způsobem vidíme na fluorescenčním povrchu určitý obraz špičky jehly. Přesněji řečeno, vidíme obraz *emisivity* povrchu jehly, která je mírou snadnosti, s jakou elektrony mohou opustit povrch kovového hrotu. Kdyby rozlišení bylo dostatečně vysoké, byla by naděje rozlišit polohy jednotlivých atomů na hrotu jehly. Takové rozlišení však nelze s elektrony dosáhnout z následujících důvodů. Zaprvé, existuje kvantově-mechanický ohyb elektronových vln, který obraz rozmazává. Zadruhé, v důsledku vnitřního pohybu v kovu mají elektrony při výstupu z jehly malou boční počáteční rychlost a tato náhodná příčná složka rychlosti také působí určité rozmazání obrazu. Kombinace těchto dvou efektů omezuje rozlišení zhruba na 2,5 nm.

Změníme-li však polaritu a do baňky vpustíme malé množství hélia, lze dosáhnout mnohem většího rozlišení. Narazí-li atom hélia na hrot jehly, intenzivní pole v tom místě mu vytrhne elektron, a změní jej tím na kladný ion. Héliový ion je pak urychlován po siločáře k fluorescenčnímu stínítku. Protože je mnohokrát těžší než elektron, jsou jeho kvantově-mechanické vlnové délky mnohem menší. Pokud není teplota příliš vysoká, je účinek tepelných rychlostí také menší než v případě elektronů. Rozmazání obrazu bude tedy menší a obraz hrotu mnohem ostřejší. S iontovým emisním mikroskopem se podařilo dosáhnout zvětšení až 2 000 000-krát, což je desetkrát lepší než v nejlepších elektronových mikroskopech.

Obrázek 6.17 je ilustrací výsledků, které byly získány iontovým emisním mikroskopem, používajícím wolframovou jehlu. Střed wolframového atomu ionizuje atom hélia s trochu jinou pravděpodobností než mezery mezi atomy wolframu. Obrázek skvrn na fluorescenčním stínítku

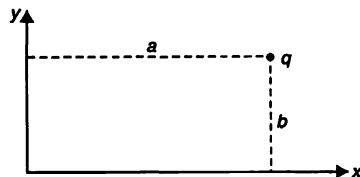
ukazuje uspořádání *jednotlivých atomů* na wolframovém hrotu. To, proč mají skvrny prstencový tvar, můžeme pochopit, představíme-li si velkou krabici plnou koulí uložených do pravouhlé prostorové sítě, která představuje uspořádání atomů v kovu. Vyříznete-li z této krabice přibližně kulový výsek, uvidíte prstencový obrazec charakteristický pro atomovou strukturu. Iontový emisní mikroskop poskytl lidem poprvé v historii možnost uvidět atomy. Když se přitom zváží ještě jednoduchost přístroje, jde o pozoruhodný výtvarný objev.



Obr. 6.17 Obraz vytvořený emisním mikroskopem (s dovolením Erwina W. Muellera, prof. fyziky na Pennsylvánské státní univerzitě)

PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 6.1 ■ Metodou elektrostatického zobrazení najděte sílu, která působí na náboj q umístěný ve vzdálenostech a a b od dvou vodivých polorovin svírajících pravý úhel (viz obrázek).

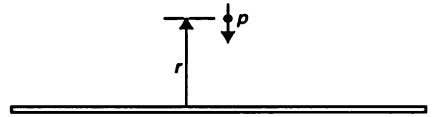


- 6.2 ■ Částice s nábojem q v počátečním okamžiku upevněná ve vzdálenosti x_0 od uzemněné vodivé roviny se uvolní a začne se pohybovat směrem k rovině.
- Jak závisí kinetická energie částice na vzdálenosti x od roviny? (Ztráty energie vyzařováním zanedbejte.) Je ve vaší odpovědi něco nefyzikálního?
 - Reálnou kovovou desku můžeme považovat za dokonale vodivou rovinu pouze na vzdálenostech větších než meziatomové, tj. asi 0,2–0,3 nm. Odhadněte kinetickou energii elektronu, který se uvolnil v okamžiku $t = 0$ ve vzdálenosti 1 cm od vodivé desky. Odpověď vyjádřete v elektronvoltech.
- 6.3 ■ Umělohmotná tyčka obdélníkového průřezu rozměrů 1 cm x 10 cm x 100 cm je rovnoměrně nabitá s objemovou hustotou náboje ρ C/m³. Nakreslete přibližný průběh potenciálu φ jako funkci vzdálenosti od středu tyčky podél přímky kolmé ke stěně s rozměry 10 cm x 100 cm a procházející středem tyčky. Uvažujte interval vzdáleností od 0,001 cm (uvnitř tyčky) do vzdáleností mnohokrát převyšujících 100 cm. Použijte logaritmickou stupnici, tj. kreslete závislost logaritmu potenciálu na logaritmu vzdálenosti. Do téhož grafu zakreslete závislost intenzity elektrického pole na vzdálenosti.
- 6.4 ■ Země je nepřetržitě ozařována kosmickými paprsky o vysoké energii přicházejícími z prostoru mimo sluneční soustavu. Měření prováděná na sondách a umělých družicích ukázala, že kosmické paprsky jsou tvořeny převážně protony a jen malá část z nich se skládá z částic alfa, těžkých jader a elektronů. Střední energie protonů v kosmických paprscích je rovna několika miliardám elektronvoltů a hustota toku protonů, které dorazí k zemské atmosféře je přibližně rovna jednomu protonu za sekundu na jeden čtvereční centimetr. Bylo by zajímavé zjistit, za jakou dobu dopadající nabitě částice zvýší elektrický potenciál Země natolik, aby protony už nemohly proniknout k zemskému povrchu pro elektrické odpuzování. Je tato doba velká ve srovnání s dobou trvání Země, která se odhaduje na 5 miliard roků? Je-li tato doba menší, jak je možné, že kosmické paprsky stále pronikají k zemskému povrchu?
- 6.5 ■ Určete kapacitu připadající na jednotku délky nekonečného válcového kondenzátoru vyrobeného ze dvou vodivých koaxiálních válců s poloměry $a < b$. Odpovězte kvalitativně na otázku, co by se stalo, kdyby konstrukce kondenzátoru byla defektní, třeba kdyby na povrchu vnějšího válce byl ostrý výstupek?
- 6.6 ■ a) Čemu je rovna plošná hustota nábojů indukovaných na povrchu nenabitě izolované vodivé koule, jejíž střed se nachází ve vzdálenosti b od bodového náboje q ?
- b) Čemu je rovna síla působící na náboj se strany koule, je-li její potenciál roven φ ?
- 6.7 ■ V kapitole 6 bylo na základě kvalitativních úvah ukázáno, že elektrické pole vně koule, která je nabitá s proměnnou povrchovou hustotou náboje měnící se v závislosti na polárním úhlu ϑ jako $\sigma(\vartheta) = A \cos \vartheta$ ($A = \text{konst.}$) si můžeme představit jako superpozici elektrických polí dvou koulí prostorově nabitých náboji opačných znamení s mírně posunutými středy. Dokažte to nyní výpočtem a najděte elektrické pole jak vně, tak i uvnitř koule.

- 6.8 ■ Pole elektrického dipólu je určeno výrazy (6.14) a (6.15).
- Najděte radiální a tangenciální složku vektoru intenzity elektrického pole dipólu v bodě (r, ϑ, φ) .
 - Ukažte, že elektrické pole dipólu mříří týmž směrem ve všech bodech přímky, která prochází dipólem.
 - Najděte směr a relativní velikosti intenzity E v určité libovolné vzdálenosti od dipólu v bodech určených úhly $0, \pi/4$ a $\pi/2$ odečítaných od směru dipólu.

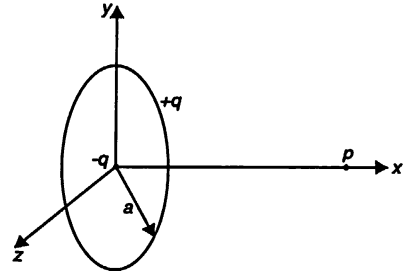
- 6.9 ■ Dipól se nachází v homogenním elektrickém poli s intenzitou E_0 .
- Souhlasí-li směr jeho dipólového momentu se směrem elektrického pole, existuje ekvipotenční plocha, která obklopuje dipól. Ukažte, že tato plocha je kulová a najděte velikost dipólového momentu, pro níž má tato plocha poloměr a .
 - Jaké bude elektrické pole vrě této plochy?
 - Změní se elektrické pole, jestliže s touto ekvipotenční plochou splyne tenká vodivá kulová slupka udržovaná na témž potenciálu?
 - Jak budou rozděleny náboje na této slupce?
 - Jaký dipólový moment budou tyto náboje vytvářet?
 - Jak byste mohli využít získané výsledky?

- 6.10 ■ Částice s dipólovým momentem p je umístěna ve vzdálenosti r od dlouhého vodiče nabitého s konstantní lineární hustotou náboje τ . Vektor dipólového momentu leží v rovině, která prochází vodičem a částicí.



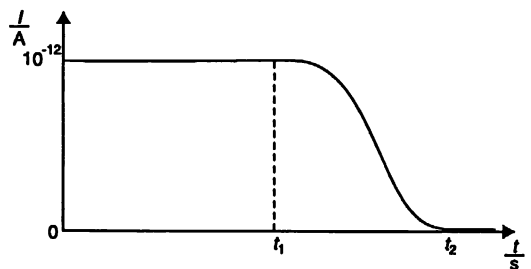
- Čemu je rovna síla působící na částici a její silový moment, je-li vektor p orientován kolmo k vodiči (viz obrázek)?
 - Čemu je rovna síla a její silový moment, je-li vektor p orientován rovnoběžně s vodičem?
- 6.11 ■ Najděte potenciál vytvářený velkou deskou, na níž se nachází N dipólů na jednotce plochy, jako funkci vzdálenosti od desky. Všechny dipóly mají stejný dipólový moment p orientovaný kolmo k rovině desky.

- 6.12 ■ Elektrický náboj $+q$ je rovnoměrně rozložen na tenkém prstenci poloměru a . Střed prstence splývá s počátkem souřadnic a rovina prstence s rovinou yz . V počátku souřadnic je umístěn náboj $-q$ (viz obrázek).



- Najděte potenciál φ v bodě P na ose x ve vzdálenosti x od počátku.
- Jaké je elektrické pole v tomto bodě?
- Jak závisí elektrické pole na x ve vzdálenostech $x \gg a$? Klesá rychleji než elektrické pole dipólu na velkých vzdálenostech? Jak to lze vysvětlit?

- 6.13 ■ Deskový kondenzátor s kapacitou 100 pF a vzdáleností mezi deskami 1 cm se nabíjí pomocí baterie na napětí 10 V. Pak se baterie odpojuje. Dolní deska kondenzátoru je pak ozařována modrým světlem, které z ní uvolňuje elektrony s kinetickou energií v rozmezí 0 eV–1,5 eV. Polarita desek je volena tak, že elektrony jsou přitahovány k horní desce. Na obrázku je znázorněn časový průběh celkového proudu mezi deskami. Jak dlouho potrvá,



než napětí na kondenzátoru klesne k nule (doba t_1 na obrázku)? Čemu je rovno napětí na kondenzátoru v okamžiku $t \gg t_2$? Jak se změní vaše odpověď, jestli *před* nabitím kondenzátoru vzroste vzdálenost desek dvakrát? Jak se změní vaše odpověď, jestliže se vzdálenost mezi deskami zdvojnásobí až *potom*, když je kondenzátor nabit a baterie odpojena?

- 6.14 ■ Dielektrická tyčinka délky 1 m a poloměru $R = 1$ cm je umístěna podél osy x tak, že její střed leží v počátku souřadnic. Objemová hustota náboje v tyčince je $\rho = ar^2$, kde r je vzdálenost od osy tyčinky a a je kladná konstanta rovná 2C/m^5 .
- Najděte intenzitu elektrického pole E ve čtyřech bodech: $x = 0$, $z = 0$, $y = 0$; 0,5; 1,0; 2,0 cm. V této části úlohy považujte tyčinku za nekonečně dlouhou.
 - Pokuste se rozumně odhadnout potenciál v počátku souřadnic, položíte-li potenciál v nekonečnu roven nule. Odhadněte a zdůvodněte neurčitost vaší odpovědi.
 - Bude potenciál v bodě $x = 0,5$ m, $y = z = 0$ m větší, menší nebo roven potenciálu v počátku souřadnic?

Elektrické pole v různých případech (pokračování)

7.1 METODY URČOVÁNÍ ELEKTROSTATICKÉHO POLE

7.2 DVOJROZMĚRNÁ POLE.

FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ

7.3 KMITY V PLAZMATU

7.4 KOLOIDNÍ ČÁSTICE V ELEKTROLYTU

7.5 ELEKTROSTATICKÉ POLE MŘÍŽKY

7.1 METODY URČOVÁNÍ ELEKTROSTATICKÉHO POLE

Tato kapitola je pokračováním našich úvah o charakteristikách elektrických polí v různých konkrétních situacích. Nejdříve popíšeme některé ze složitějších metod k řešení úloh s vodiči. Neočekáváme, že tyto pokročilejší metody dokážete ihned zvládnout. Už nyní však pro vás bude zajímavé získat nějakou představu o tom, jaké úlohy je možno řešit pomocí postupů, o nichž se hovoří v pokročilejších kurzech. Potom probereme dva příklady, v nichž není rozdělení náboje ani pevné, ani rozloženo na vodiči, ale je určeno nějakým jiným fyzikálním zákonem.

Jak jsme zjistili v kapitole 6, je-li rozdělení nábojů dáno, může být úloha o elektrostatickém poli řešena v podstatě snadno – je třeba pouze vypočítat integrál. Přítomnost vodičů však vznikají komplikace, neboť rozdělení náboje na vodičích není předem známé; náboj se musí sám rozdělit na povrchu vodiče takovým způsobem, aby měl vodič všude stejný potenciál. Takové úlohy nelze řešit ani přímo ani snadno.

Už jsme se zabývali nepřímou metodou řešení takových úloh, která spočívá v tom, že pro nějaké specifikované rozdělení náboje najdeme ekvipotenciální plochy a jednu z nich nahradíme vodivým povrchem. Tímto způsobem můžeme vybudovat katalog speciálních řešení pro vodiče

tvary koulí, rovin atd. Využití zrcadlení, popsané v kapitole 6, je také příkladem nepřímé metody. Další příklad popíšeme v této kapitole.

Nepatří-li úloha, která je řešena, do třídy úloh, jejichž řešení jsou zkonstruovatelná nepřímou metodou, jsme nuceni řešit ji přímější metodou. Z matematického hlediska spočívá přímá metoda v řešení Laplaceovy rovnice

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (7.1)$$

za podmínky, že φ nabývá vhodné hodnoty na určitých hranicích – na površích vodičů. Úlohy v nichž má řešení diferenciální rovnice pole splňovat určité *okrajové podmínky*, se nazývají *okrajovými úlohami*. Byly a jsou předmětem intenzivního matematického výzkumu. V případě vodičů, majících složité tvary, nejsou na jejich řešení žádné obecné analytické metody. I taková jednoduchá úloha, jaká je o nabitém, na obou koncích uzavřeném kovovém válci, připomínajícím konzervu, je spojena s ohromnými matematickými těžkostmi. Je možné ji řešit pouze přibližně, použitím numerických metod. Numerické metody jsou zde jedinými obecnými metodami řešení.

Existuje však několik úloh, v nichž lze rovnice (7.1) řešit přímo. Například úlohu o nabitém vodiči tvaru rotačního elipsoidu je možné řešit exaktně pomocí známých speciálních funkcí. Necháme-li elipsoid nekonečně zploštit, dostaneme řešení pro případ tenkého kotouče. Podobně lze získat řešení pro jehlu, necháme-li elipsoid nekonečně protáhnout. Je však třeba zdůraznit, že jedinými přímými metodami s obecnou použitelností jsou numerické metody.

Okrajové úlohy je možné kromě toho řešit měřením jejich fyzikálních analogií. Laplaceova rovnice se vyskytuje v mnoha různých fyzikálních situacích: při stacionárním toku tepla, při bezvírovém proudění tekutiny, při průchodu proudu v rozlehlém prostředí a při vychylování pružné membrány. Často je proto možné postavit fyzikální model analogický elektrické úloze, již chceme řešit. Její řešení je možné najít měřením vhodné analogické veličiny na modelu. Příkladem této metody je využití elektrolytické vany k řešení dvojrozměrných úloh v elektrostatice. Je založena na tom, že diferenciální rovnice pro potenciál v homogenním vodivém prostředí je stejná jako pro vakuum.

Je mnoho fyzikálních situací, kdy změny v jednom směru jsou nulové nebo zanedbatelné ve srovnání se změnami v druhých dvou směrech. Takové úlohy se nazývají *dvojrozměrné* – pole v nich závisí pouze na dvou souřadnicích. Umístíme-li například dlouhý nabitý drát do směru osy z , pro body, které nejsou příliš vzdálené od drátu, bude elektrické pole záviset na x a y , ale ne na z , jde o dvojrozměrnou úlohu. Protože ve dvojrozměrné úloze je $\partial/\partial z = 0$, je rovnice pro φ ve volném prostoru

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (7.2)$$

Protože rovnice se dvěma proměnnými je poměrně jednoduchá, existuje široký rozsah podmínek, za kterých ji lze řešit analyticky. Pro takovéto případy existuje vlastně velmi účinná nepřímá matematická metoda, zakládající se na jedné větě z teorie funkcí komplexní proměnné, kterou nyní popíšeme.

7.2 DVOJROZMĚRNÁ POLE. FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ

Komplexní proměnná z je definována takto

$$z = x + iy.$$

(Nezaměňujte z se souřadnicí z , kterou z následujících úvah vypouštíme, neboť předpokládáme, že na souřadnici z pole nezávisí.) Každému bodu v rovině (x, y) přísluší nějaké komplexní číslo z . Můžeme z považovat za jedinou (komplexní) proměnnou a její pomocí popsat obvyklé matematické funkce $F(z)$. Například

$$F(z) = z^2$$

nebo

$$F(z) = 1/z^3$$

nebo

$$F(z) = z \log z$$

atd.

Máme-li dané nějaké konkrétní $F(z)$, můžeme dosadit $z = x + iy$ a dostaneme funkci proměnných x a y , která má dvě části – reálnou a imaginární. Například

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy. \quad (7.3)$$

Každou funkci $F(z)$ je možné zapsat jako součet ryze reálné a ryze imaginární části, přičemž jedna i druhá jsou funkcemi x a y :

$$z^2 = U(x, y) + iV(x, y), \quad (7.4)$$

kde $U(x, y)$ a $V(x, y)$ jsou reálné funkce. Tímto způsobem můžeme z každé komplexní funkce $F(z)$ můžeme odvodit dvě nové funkce $U(x, y)$ a $V(x, y)$. Například $F(z) = z^2$ nám dává dvě funkce

$$U(x, y) = x^2 - y^2 \quad (7.5)$$

a

$$V(x, y) = 2xy. \quad (7.6)$$

Nyní přicházíme k podivuhodné matematické větě, která je tak rozkošná, že její důkaz ponecháme na některou z vašich přednášek z matematiky. (Zde bychom neměli odkrývat všechna tajemství matematiky, neboť potom vám bude připadat příliš nudná.) Je to tato věta: Pro každou „obyčejnou funkci“ (matematici ji budou definovat lépe) funkce U a V automaticky splňují vztahy

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \quad (7.7)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}. \quad (7.8)$$

Z toho ihned vyplývá, že každá z funkcí U a V splňuje Laplaceovu rovnici:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (7.9)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \quad (7.10)$$

Pro funkce (7.5) a (7.6) tyto rovnice zřejmě platí.

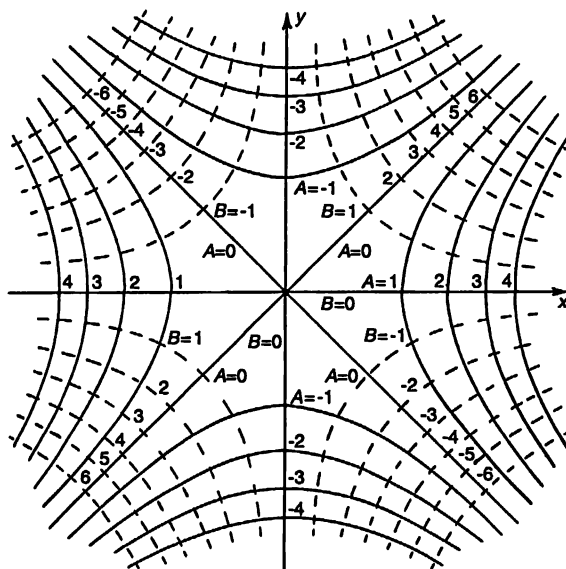
Vydeme-li tedy z jakékoliv obyčejné funkce, můžeme dospět k takovým dvěma funkcím $U(x, y)$ a $V(x, y)$, jež jsou obě řešením Laplaceovy rovnice pro dvě proměnné. Každá funkce představuje nějaký možný elektrostatický potenciál. Můžeme tedy vzít *jakoukoliv* funkci $F(z)$ a každá by měla souviset s nějakou úlohou o elektrickém poli (vlastně se dvěma úlohami, protože jak U , tak i V představují *nějaká* řešení). Můžeme tedy napsat tolik řešení, kolik chceme – pouze vymyšlením funkcí – pak už jen musíme v každém případě najít tu *úlohu*, o jejíž řešení jde. Znamená to postup odzadu, ale možný přístup to je.

Jako příklad se podíváme, k jaké fyzice vede funkce $F(z) = z^2$. Dostáváme z ní dvě potenciálové funkce (7.5) a (7.6). Abychom viděli, k jaké úloze patří funkce U , najdeme ekvipotenciální plochy tím, že položíme $U = A$, kde A je konstanta:

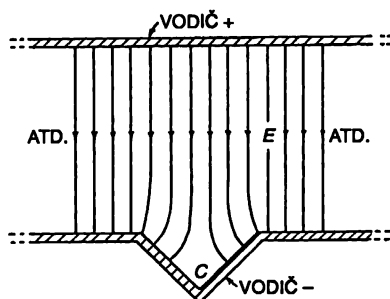
$$x^2 - y^2 = A.$$

Je to rovnice *rovnosé hyperboly*. Pro různé hodnoty A dostáváme množinu hyperbol narýsovaných na *obr. 7.1*. Je-li $A = 0$, jde o degenerovaný případ na sebe navzájem kolmých přímek procházejících počátkem souřadnicové soustavy.

Taková množina ekvipotenciálních ploch odpovídá několika možným fyzikálním situacím. Zprv, představuje jemné detaily pole blízko středu mezi dvěma stejnými náboji. Zadruhé, představuje pole v rohu vytvořeném dvěma na sebe kolmými vodivými rovinami. Máme-li dvě elektrody takového tvaru jako na *obr. 7.2*, jež mají nestejně potenciály, bude pole v blízkosti rohu označeného C vypadat právě tak jako pole nad počátkem souřadnicové soustavy na *obr. 7.1*.



Obr. 7.1 Dvě soustavy ortogonálních křivek, které mohou představovat ekvipotenciální hladiny v dvojrozměrné elektrostatické úloze



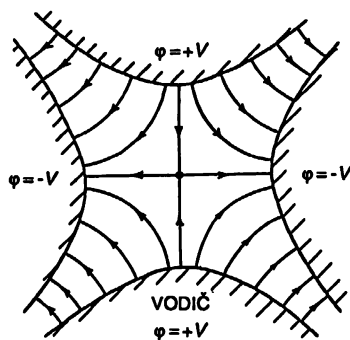
Obr. 7.2 Pole v blízkosti bodu C je stejné jako pole na obr. 7.1

Souvislé čáry znázorňují ekvipotenciální plochy a na ně kolmé čárkované křivky jsou siločáry pole E . Zatímco u hrotů nebo výčnělků elektrické pole roste, v prohlubních nebo jámách *slábně*.

Řešení, které jsme našli, odpovídá také poli elektrody hyperbolického tvaru blízko pravouhlého rohu nebo poli dvou hyperbol s vhodnými potenciály. Všimněte si, že pole na obr. 7.1. má zajímavou vlastnost. Jeho x -ovou složku E_x vyjadřuje vztah

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -2x.$$

Elektrické pole je přímo úměrné vzdálenosti od osy. Tato skutečnost je využívána na výrobu zařízení (nazvaných kvadrupólové čočky), které se uplatňují při soustřeďování svazků částic do ohniska (viz článek 29. 2). Potřebné pole je obvykle vytvořeno pomocí čtyř elektrod hyperbolického tvaru tak, jak ukazuje obr. 7.3. Co se týče siločar elektrického pole ukázaných na obr. 7.3, prostě jsme z obr. 7.1 okopírovali množinu čárkovaných křivek, jimž přísluší $V = \text{konst.}$ Dostali jsme je docela zadarmo.



Obr. 7.3 Pole v kvadrupólové čočce

Z rovnic (7.7) a (7.8) vyplývá, že křivky pro $V = \text{konst.}$ jsou kolmé na křivky pro $U = \text{konst.}$ Jakmile zvolíme funkci $F(z)$, z U a V dostaneme jak ekvipotenciální plochy tak i siločáry. Teď už budete vědět, že jsme řešili jednu ze dvou úloh, podle toho, jakou množinu křivek vezmeme jako ekvipotenciální plochy.

Jako druhý příklad uvažujme funkci

$$F(z) = \sqrt{z}. \quad (7.11)$$

Přeseme-li

$$z = x + iy = \rho e^{i\vartheta}$$

kde

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

a

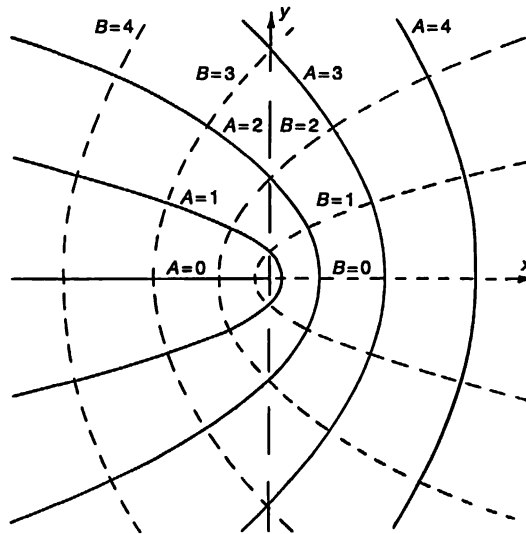
$$\operatorname{tg} \vartheta = y/x,$$

máme

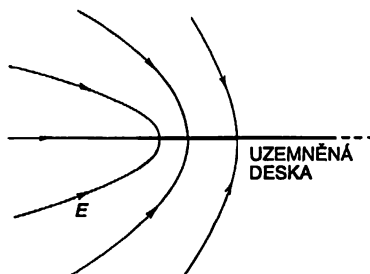
$$F(z) = \rho^{1/2} e^{i\vartheta/2} = \rho^{1/2} \left(\cos \frac{\vartheta}{2} + i \sin \frac{\vartheta}{2} \right)$$

odkud

$$F(z) = \left[\frac{(x^2 + y^2)^{1/2} + x}{2} \right]^{1/2} + i \left[\frac{(x^2 + y^2)^{1/2} - x}{2} \right]^{1/2}. \quad (7.12)$$



Obr. 7.4 Křivky konstantních hodnot $U(x, y)$ a $V(x, y)$ ze vztahu (7.12)



Obr. 7.5 Elektrické pole při okraji tenké uzemněné desky

Na *obr. 7.4* jsou nakresleny křivky pro $U(x, y) = A$ a $V(x, y) = B$, přičemž U a V jsou určeny pravou stranou vztahu (7.12). Opět existuje mnoho možných situací, které lze těmito poli popsat. Jednou z nejzajímavějších je pole v blízkosti okraje tenké desky. Představuje-li přímka $\vec{B} = 0$, vpravo od osy y , tenkou nabitou desku, siločáry v její blízkosti jsou dány křivkami pro různé hodnoty A . Tuto fyzikální situaci ukazuje *obr. 7.5*.

Další příklady jsou

$$F(\bar{z}) = \bar{z}^{3/2}, \quad (7.13)$$

kteřá dává pole na *vnější* straně pravouhlého rohu,

$$F(\bar{z}) = \log \bar{z}, \quad (7.14)$$

jež dává pole nabitě přímky a

$$F(\bar{z}) = 1/\bar{z}, \quad (7.15)$$

kteřé odpovídá poli dvojrozměrného analogu elektrického dipólu, tj. dvou rovnoběžných opačně nabitých přímek nacházejících se velmi blízko u sebe.

V našem kurzu se nebudeme tímto problémem dále zabývat, musíme pouze zdůraznit, že ačkoliv je metoda komplexní proměnné velmi často účinná, je omezena pouze na dvojrozměrné úlohy; kromě toho jde o metodu nepřímou.

7.3 KMITY V PLAZMATU

Nyní se budeme zabývat některými fyzikálními situacemi, v nichž pole není určeno ani pevnými náboji, ani náboji na vodivých plochách, ale kombinací obou faktorů. Jinými slovy, pole se bude chovat současně podle dvou soustav rovnic:

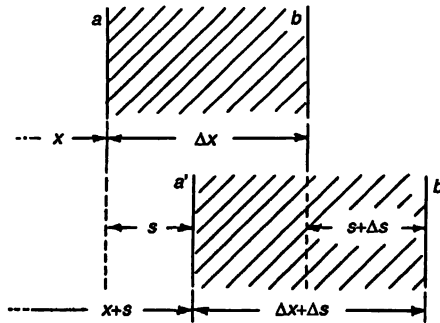
1. Rovnice elektrostatiky, jež uvádějí do vztahu elektrická pole s rozdělením nábojů.
2. Rovnice z jiné části fyziky, určující polohy nebo pohyby nábojů v poli.

První příklad, o kterém budeme hovořit, je dynamický. Pohyb nábojů je v něm řízen Newtonovými zákony. Jednoduchý příklad takové situace se vyskytuje v plazmatu, ionizovaném plynu skládajícím se z iontů a volných elektronů rozložených v nějaké oblasti v prostoru. Příkladem takového plazmatu je vrchní vrstva atmosféry, ionosféra. Ultrafialové záření ze Slunce vyrazí z molekul vzduchu elektrony a vytváří volné elektrony a ionty. V takovém plazmatu jsou kladné ionty mnohem těžší než elektrony, takže v porovnání s pohybem elektronů můžeme pohyb iontů zanedbat.

Nechť n_0 je hustota elektronů v neporušeném, rovnovážném stavu. Stejná musí být i hustota kladných iontů, neboť plazma je elektricky neutrální (v neporušeném stavu). Nyní předpokládejme, že elektrony se ze svých rovnovážných poloh nějak pohnuly, a zkoumejme, co se stane. Vzroste-li v některé oblasti hustota elektronů, budou se vzájemně odpuzovat se snahou vrátit se do svých rovnovážných poloh. Při pohybu do původních poloh jejich kinetická energie vzrůstá a místo aby se ve své rovnovážné konfiguraci zastavily, budou se pohybovat dál. Budou okolo ní kmitat na jednu i na druhou stranu. Situace je podobná jako u zvukových vln, kde zpětnou silou je tlak plynu. V případě plazmatu je zpětnou silou elektrická síla působící na elektrony.

Abychom naše úvahy zjednodušili, budeme se zajímat pouze o případ, kdy jsou všechny pohyby orientovány v jednom směru, dejme tomu ve směru osy x . Předpokládejme, že elektrony, nacházející se původně v bodě x , jsou v čase t posunuté ze svých rovnovážných poloh o malou vzdálenost $s(x, t)$. Protože elektrony se posunuly, jejich hustota se obecně změnila. Změnu hustoty lze snadno vypočítat. Všimneme-li si obr. 7.6, vidíme, že elektrony, nacházející se původně mezi dvěma rovinami a, b , se posunuly a nyní jsou v prostoru mezi rovinami a', b' . Počet elektronů, které se nacházely mezi a, b , je přímo úměrný hodnotě $n_0 \Delta x$; tentýž počet nyní zabírá úsek, jehož šířka je $\Delta x + \Delta s$. Hustota se tedy změnila na hodnotu

$$n = \frac{n_0 \Delta x}{\Delta x + \Delta s} = \frac{n_0}{1 + (\Delta s / \Delta x)}. \quad (7.16)$$



Obr. 7.6 Pohyb při vlnění v plazmatu. Elektrony v rovině a se posunou do a' a elektrony v b do b' .

Je-li změna hustoty malá, můžeme psát [rozvineme-li $(1 + \epsilon)^{-1}$ do binomické řady]

$$n = n_0 \left(1 - \frac{\Delta s}{\Delta x} \right). \quad (7.17)$$

Předpokládáme, že kladné ionty se významněji nepohnou (v důsledku jejich mnohem větší setrvačnosti), takže jejich hustota zůstává n_0 . Každý elektron nese náboj $-q_e$, takže střední hustotu náboje v kterémkoli bodě vyjadřuje vztah

$$\rho = -(n - n_0) q_e,$$

resp.

$$\rho = n_0 q_e \frac{ds}{dx}, \quad (7.18)$$

(kde $\Delta s / \Delta x$ jsme napsali v diferenciálním tvaru).

Hustota náboje souvisí s elektrickým polem podle Maxwellových rovnic. Tedy

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (7.19)$$

Jde-li opravdu o jednorozměrný problém (a nejsou-li žádná jiná pole kromě toho, jež bylo vyvoláno posunem elektronů), elektrické pole E má jedinou složku E_x . Po dosazení (7.18) do rovnice (7.19) pak dostaneme

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{n_0 q_e}{\epsilon_0} \frac{\partial s}{\partial x}. \quad (7.20)$$

Integrovaním (7.20) najdeme

$$E_x = \frac{n_0 q_e}{\epsilon_0} s + K. \quad (7.21)$$

Je-li $s=0$, pak $E_x=0$ a integrační konstanta K je tedy rovna nule.

V posunuté poloze působí na elektron síla

$$F_x = -\frac{n_0 q_e^2}{\epsilon_0} s. \quad (7.22)$$

Jde tedy o zpětnou sílu přímo úměrnou posunutí s elektronu. To vede k harmonickým kmitům elektronů. Pohybová rovnice posunutého elektronu je

$$m_e = \frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{n_0 q_e^2}{\epsilon_0} s. \quad (7.23)$$

Vidíme, že s se bude měnit harmonicky. Závislost s na čase bude udávat funkce $\cos \omega t$ nebo, použijeme-li exponenciální symboliku z 1. dílu, funkce

$$e^{i\omega_p t}. \quad (7.24)$$

Úhlovou frekvenci kmitů ω_p určuje rovnice (7.23), podle níž

$$\omega_p^2 = \frac{n_0 q_e^2}{\epsilon_0 m_e}. \quad (7.25)$$

Veličina ω_p se nazývá elektronová *plazmová úhlová frekvence*. Jde o charakteristickou hodnotu pro plazma.

Příslušné veličiny jsou často vyjadřovány pomocí veličiny e^2 definované takto:

$$e^2 = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0} = 2,3068 \cdot 10^{-28} \text{ newton} \cdot \text{metr}^2. \quad (7.26)$$

V této konvenci bude mít vztah (7.25) tvar

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m_e}, \quad (7.27)$$

v němž jej najdete ve většině knih.

Tak jsme zjistili, že porucha plazmatu vyvolá volné kmity elektronů kolem jejich rovnovážných poloh s vlastní úhlovou frekvencí ω_p , která je přímo úměrná odmocnině hustoty elektronů. Elektronové kmity v plazmatu chovají jako rezonanční soustava podobná soustavám popsaným v 23. kapitole 1. dílu.

Vlastní rezonance plazmatu vede k některým zajímavým efektům. Například při šíření rádiových vln ionosférou se zjišťuje, že mohou procházet pouze tehdy, je-li jejich frekvence vyšší než frekvence plazmová. V opačném případě se signál odrazí zpět. Chceme-li komunikovat s družicí ve vesmíru, musíme použít vysoké frekvence. Ale když chceme komunikovat s radiostanicí za obzorem, musíme použít nižší frekvence kmitů v plazmatu, aby se signál odrazil zpět k zemi.

Jiný zajímavý příklad kmitů v plazmatu se vyskytuje v kovech. Kov obsahuje plazma kladných iontů a volných elektronů. Hustota n_0 je tam velmi velká, a velká je tedy i úhlová frekvence ω_p . Naproti tomu lze kmity elektronů ještě pozorovat. Podle kvantové mechaniky má harmonický oscilátor s vlastní úhlovou frekvencí ω_p hladiny energie vzdálené od sebe o přírůstek $\hbar\omega_p$. Ostréluje-li se tedy elektrony řekněme hliníková fólie a velmi pečlivě se měří energie elektronů za ní, lze čekat, že v důsledku kmitů v plazmatu ztratí některé z elektronů energii $\hbar\omega_p$. To se skutečně stává. Roku 1936 se poprvé experimentálně pozorovalo, že elektrony s energiemi od několika set do několika tisíců elektronvoltů ztrácejí při rozptylu na tenké kovové fólii nebo při průchodu skrz ní energií skokem. Tento jev byl objasněn až r. 1953, když Bohm a Pines¹²⁾ ukázali, že pozorování je možné vysvětlit kvantovým buzením kmitů v plazmatu kovu.

7.4 KOLOIDNÍ ČÁSTICE V ELEKTROLYTU

Přikročíme k dalšímu jevu, v němž polohy nábojů určuje potenciál, vytvořený částečně týmiž náboji. Efekty, které z toho vyplývají, důležitým způsobem ovlivňují chování koloidů. Koloid představuje vodní suspenzi malých nabitých částic, jež, ačkoliv jsou mikroskopické, jsou ve srovnání s atomy velmi velké. Kdyby koloidní částice nebyly nabité, jevily by tendenci srážet se do velkých celků; působením svých nábojů se navzájem odpuzují a zůstávají ve formě suspenze.

Je-li kromě toho ve vodě rozpuštěna ještě nějaká sůl, bude disociována na kladné a záporné ionty. (Takový roztok se nazývá elektrolyt.) Záporné ionty se přitahují ke koloidním částicím (o nichž předpokládáme, že mají kladný náboj) a kladné ionty jsou jimi odpuzovány. Budeme zkoumat, jak jsou ionty obklopující takovou koloidní částici rozděleny v prostoru.

Pro jednoduchost budeme opět řešit pouze jednorozměrný případ. Představíme-li si koloidní částici jako kouli s velmi velkým poloměrem (v rozměrech atomů!), můžeme malou část jejího povrchu považovat za rovinu. (Vždy, když se někdo snaží pochopit nový jev, je dobré zkoumat snad až trochu přehnaně zjednodušený model jevu; po pochopení problému s tímto modelem je člověk lépe připraven pustit se do exaktnějšího výpočtu.)

Předpokládáme, že rozdělení iontů generuje hustotu náboje $\rho(x)$ a elektrický potenciál φ , související podle elektrostatického zákona $\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon_0$, anebo v případě polí, která se mění pouze v jednom rozměru, podle vztahu

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (7.28)$$

¹²⁾ O některých dalších pracích jakož, i o bibliografii, se můžete dovědět v článku C. J. Powell, J. B. Swann, Phys. Rev. 115, 869 (1959).

Nyní předpokládejme takový potenciál a ptejme se, jak by se v něm ionty rozdělily. Určit to můžeme na základě principů statistické mechaniky. Náš problém spočívá v určení φ tak, aby výsledná hustota náboje ze statistické mechaniky vyhovovala i vztahu (7.28).

Podle statistické mechaniky (viz kapitola 40, díl 1) jsou částice nacházející se v tepelné rovnováze v silovém poli rozděleny tak, že jejich hustotu n v poloze x vyjadřuje vztah

$$n(x) = n_0 e^{-U(x)/kT}, \quad (7.29)$$

kde $U(x)$ je potenciální energie, k Boltzmannova konstanta a T absolutní teplota.

Předpokládáme, že ionty nesou po jednom elektronovém náboji q_e , ať už kladném nebo záporném. Ve vzdálenosti x od povrchu koloidní částice bude mít kladný ion potenciální energii $q_e \varphi(x)$, takže

$$U(x) = q_e \varphi(x).$$

Hustota kladných iontů n_+ je potom

$$n_+(x) = n_0 e^{-q_e \varphi(x)/kT}.$$

Podobně je vyjádřena hustota záporných iontů

$$n_-(x) = n_0 e^{+q_e \varphi(x)/kT}.$$

Celková hustota náboje je

$$\rho = q_e n_+ - q_e n_-,$$

resp.

$$\rho = q_e n_0 (e^{-q_e \varphi/kT} - e^{+q_e \varphi/kT}). \quad (7.30)$$

Dosazením tohoto výrazu do (7.28) dostaneme, že potenciál φ musí splňovat rovnici

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\frac{q_e n_0}{\epsilon_0} (e^{-q_e \varphi/kT} - e^{+q_e \varphi/kT}). \quad (7.31)$$

Tuto rovnici je možné snadno řešit obecně (obě strany vynásobte výrazem $2(d\varphi/dx)$ a pak integrujte podle x), ale abychom úlohu co nejvíc zjednodušili, budeme uvažovat pouze limitní případ, v němž jsou potenciály malé, nebo teplota T je vysoká. Případ malého φ odpovídá zředěnému roztoku. V těchto případech je exponent malý a můžeme provést aproximaci

$$e^{\pm q_e \varphi/kT} = 1 \pm \frac{q_e}{kT} \varphi. \quad (7.32)$$

Rovnice (7.31) má potom tvar

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = +\frac{2 n_0 q_e^2}{\epsilon_0 kT} \varphi(x). \quad (7.33)$$

Všimněte si, že pravá strana má tentokrát kladné znaménko. Rovnice tedy nemá oscilující, ale exponenciální řešení pro φ .

Obecné řešení rovnice (7.33) má tvar

$$\varphi = Ae^{-x/D} + Be^{+x/D}, \quad (7.34)$$

kde

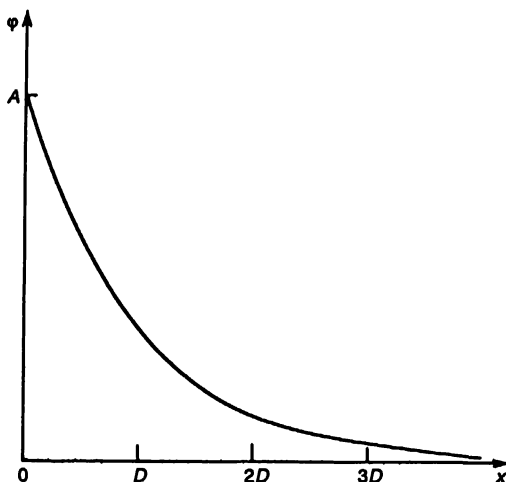
$$D^2 = \frac{\epsilon_0 kT}{2n_0 q_e^2}. \quad (7.35)$$

Konstanty A a B je třeba určit z podmínek úlohy. V našem případě B musí být rovno nule; jinak by pro velké x potenciál rostl do nekonečna. Bude tedy

$$\varphi = Ae^{-x/D}, \quad (7.36)$$

kde A je potenciál v poloze $x=0$, tj. na povrchu koloidní částice.

Při zvětšení vzdálenosti o D se potenciál zmenší v poměru $1/e$, jak je vidět z grafu na obr. 7.7. Veličina D se nazývá *Debyeova délka*. Je mírou tloušťky iontového obalu, jenž obklopuje velkou nabitou částici v elektrolytu. Podle vztahu (7.36) se obal ztenčuje, když koncentrace iontů n_0 vzrůstá nebo teplota klesá.



Obr. 7.7 Průběh potenciálu u povrchu koloidní částice. D je Debyeova délka.

Konstantu A ve vztahu (7.36) snadno určíme, známe-li σ , plošný náboj na povrchu koloidní částice. Víme, že

$$E_n = E_x(0) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (7.37)$$

Ale E je i gradientem φ :

$$E_x(0) = -\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_0 = +\frac{A}{D}, \quad (7.38)$$

z čehož dostáváme, že

$$A = \frac{\sigma D}{\epsilon_0}. \quad (7.39)$$

Dosadíme-li tento výsledek do (7.36), najdeme (při $x=0$) výraz pro potenciál koloidní částice:

$$\varphi(0) = \frac{\sigma D}{\epsilon_0}. \quad (7.40)$$

Všimněte si, že je to stejný vztah jako pro rozdíl potenciálu na deskách rovinného kondenzátoru se vzájemnou vzdáleností desek D a plošnou hustotou náboje σ .

Řekli jsme, že koloidní částice jsou jedna od druhé separovány v důsledku jejich elektrického odpuzování. Nyní však vidíme, že už v malé vzdálenosti od povrchu částice je pole zeslabeno iontovým obalem, jenž ji obklopuje. Stanou-li se obaly dostatečně tenkými, budou mít částice dobrou šanci se srazit – potom splynou a koloid se z kapaliny vysráží. Z naší analýzy je jasné, proč by přidání dostatečného množství soli do koloidu způsobilo jeho vysrážení. Tento proces se nazývá vysolování koloidu.

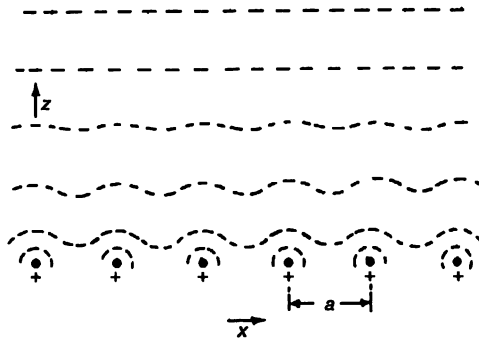
Jiným zajímavým příkladem je účinek, který má roztok soli na proteinové molekuly. Molekula proteinu představuje dlouhý, složitý a ohybný řetězec aminokyselin. Nese různé náboje a někdy se stává, že existuje výsledný, řekněme záporný náboj, který je rozdělen podél řetězce. V důsledku vzájemného odpuzování záporných nábojů zůstane proteinový řetězec napnutý. Kromě toho, nachází-li se v roztoku jiné podobné řetězové molekuly, budou týmiž odpudivými účinky udržovány navzájem odděleny. To umožňuje existenci suspenze řetězových molekul v kapalině. Ale přidáme-li do kapaliny sůl, vlastnosti suspenze změníme. Po přidání soli do roztoku a tím vyvolaném zmenšení Debyeovy délky řetězové molekuly se mohou jedna ke druhé přiblížit a mohou se také svinout. Přidá-li se do roztoku dostatek soli, řetězové molekuly se z roztoku vysrážejí. Existuje mnoho chemických jevů tohoto druhu, které lze pochopit na základě elektrických sil.

7.5 ELEKTROSTATICKÉ POLE MŘÍŽKY

Jako náš poslední příklad bychom rádi vysvětlili ještě jednu zajímavou vlastnost elektrických polí. Je to vlastnost, jež se využívá při návrhu elektrických přístrojů, při konstrukci elektronek a pro jiné účely. Jde o charakter elektrického pole blízko mřížky z nabitých drátů. Abychom úlohu co nejvíc zjednodušili, uvažujme o řadě rovnoběžných drátů ležících v rovině. Dráty nechť jsou nekonečně dlouhé a jeden od druhého stejně vzdálené.

Prozkoumáme-li pole ve velké vzdálenosti nad rovinou drátů, zjistíme, že jde o konstantní elektrické pole právě takové, jako kdyby náboj byl v rovině rozdělen rovnoměrně. Při přibližování k mřížce se charakter pole začíná odchylovat od homogenosti, kterou jsme zjistili ve velké vzdálenosti od mřížky. Chtěli bychom vypočítat, v jaké vzdálenosti od mřížky se objeví větší výkyvy potenciálu. *Obrázek 7.8* představuje hrubý náčrt ekvipotenciálních ploch v různých vzdálenostech od mřížky. Čím blíž jsme k mřížce, tím jsou výkyvy větší. Polybujeme-li se rovnoběžně s mřížkou, pozorujeme, že pole kolísá periodicky.

Viděli jsme (kapitola 50, díl 1), že každou periodickou veličinu je možné vyjádřit jako součet sinusových vln (Fourierova věta). Podívejte se, zda je možno najít vhodnou harmonickou funkci, která splňuje rovnice pole.



Obr. 7.8 Ekvipotenciální plochy nad pravidelnou mřížkou nabitých drátů

Jsou-li dráty umístěny v rovině xy rovnoběžně s osou y , mohli bychom zkusit členy tvaru

$$\varphi(x, y) = F_n(z) \cos \frac{2\pi nx}{a}, \quad (7.41)$$

kde a je mezera mezi dráty a n je řád harmonické. (Předpokládali jsme dlouhé dráty, takže by se neměla projevit žádná závislost na y .) Úplné řešení lze napsat jako suma takových členů pro $n = 1, 2, 3, \dots$

Má-li jít o platný potenciál, musí v oblasti nad dráty (kde nejsou žádné náboje) splňovat Laplaceovu rovnici, tj. musí být

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Když do této rovnice dosadíme výraz (7.41), zjistíme, že

$$-\frac{4\pi^2 n^2}{a^2} F_n(z) \cos \frac{2\pi nx}{a} + \frac{d^2 F_n}{dz^2} \cos \frac{2\pi nx}{a} = 0, \quad (7.42)$$

tj. že $F_n(z)$ musí vyhovovat rovnici

$$\frac{d^2 F_n}{dz^2} = \frac{4\pi^2 n^2}{a^2} F_n. \quad (7.43)$$

Musí tedy platit

$$F_n = A_n e^{-z/\zeta_0}, \quad (7.44)$$

kde

$$\zeta_0 = \frac{a}{2\pi n}.$$

Zjistili jsme tedy, že existuje-li Fourierova složka pole s n -tou harmonickou, bude se s výškou nad mřížkou exponenciálně zmenšovat s charakteristickou vzdáleností $\zeta_0 = a/2\pi n$. Amplituda první harmonické ($n=1$) se zmenší $e^{2\pi}$ -krát při vzrůstu z o jednu mřížkovou konstantu a (prudký pokles). Další harmonické klesají při vzdalování od mřížky ještě rychleji. Vidíme, že jsme-li jen

několik vzdáleností a od mřížky, je pole téměř homogenní, tj. oscilující členy jsou malé. Vždy tam, samozřejmě, zůstane pole nulové harmonické

$$\varphi_0 = -E_0 z,$$

kteřé přechází v homogenní pole při velkém z . Úplné řešení dostaneme vypočítáním tohoto členu se sumou členů tvaru (7.41), přičemž F_n se vezme ze vztahu (7.44). Koefficienty A_n jsou zvoleny tak, aby výsledná suma po zderivování dala elektrické pole, které odpovídá hustotě náboje τ na drátech tvořících mřížku.

Touto námi právě vypracovanou metodou lze vysvětlit, proč elektrostatické stínění pomocí sítě je často stejně dobré jako stínění pomocí souvislého kovového plechu. Pole uvnitř uzavřené sítě bude nulové s výjimkou takových míst, jejichž vzdálenosti od sítě nepřevyšují několik mezer mezi jejími dráty. Nyní vidíme, proč se na ochranu citlivého elektrického zařízení před vnějšími rušivými poli často používá měděná síť – je lehčí a levnější než měděný plech.

PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 7.1 ■ a) Ukažte, že ekvipotenciální plochy v okolí dvou rovnoběžných opačně nabitých vláken mají tvar rotačních válců. Nechť vzdálenost mezi vlákny je d , lineární hustota náboje na nich $+r$ a $-r$.
- b) Pomocí získaného výsledku určete kapacitu na jednotku délky dvou rovnoběžných drátů s poloměrem průřezu r_0 , jejichž osy jsou ve vzdálenosti d . Uvažujte $d \gg r_0$.
- c) Ukažte, že při $x, y > d$ může být potenciál vyjádřen v komplexním tvaru

$$f(z) \equiv U + iV = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy}.$$

Elektrostatická energie

- 8.1 ELEKTROSTATICKÁ ENERGIE NÁBOJŮ.
HOMOGENNÍ KOULE
- 8.2 ENERGIE KONDENZÁTORU.
SÍLY PŮSOBÍCÍ NA NABITÉ VODIČE
- 8.3 ELEKTROSTATICKÁ ENERGIE IONTOVÉHO
KRYSTALU
- 8.4 ELEKTROSTATICKÁ ENERGIE
V ATOMOVÝCH JÁDRECH
- 8.5 ENERGIE V ELEKTROSTATICKÉM POLI
- 8.6 ENERGIE BODOVÉHO NÁBOJE

8.1 ELEKTROSTATICKÁ ENERGIE NÁBOJŮ. HOMOGENNÍ KOULE

Přečtěte si znovu: kapitolu 4, díl 1, Zachování energie
kapitolu 13 a 14, díl 1, Práce a potenciální energie

Jedním z nejzajímavějších a nejužitečnějších objevů v mechanice byl zákon zachování energie. Vzorce pro kinetickou a potenciální energii mechanické soustavy nám pomáhají objevit souvislosti mezi stavy soustavy ve dvou různých časech, aniž bychom museli vnikat do podrobností toho, co se mezi tím děje. Nyní se chceme zabývat energií elektrostatických soustav. I v nauce o elektřině bude princip zachování energie užitečný při objevování mnoha zajímavých věcí.

Zákon o energii vzájemného působení je v elektrostatice velmi jednoduchý; vlastně jsme ho již probírali. Představte si, že máme dva náboje q_1 a q_2 vzdálené od sebe o r_{12} . Tato soustava se

vyznačuje nějakou energii, neboť na to, aby se oba náboje přivedly do jejich současné vzájemné polohy, bylo třeba vynaložit určité množství práce. Práci, která je vykonána při přiblížení dvou nábojů z velké vzdálenosti, jsme už počítali. Je rovna

$$\frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon_0 r_{12}}. \quad (8.1)$$

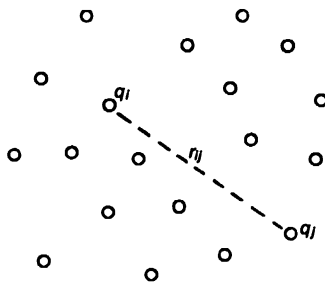
Kromě toho z principu superpozice víme, že v případě mnoha nábojů je celková síla působící na každý z nich rovna součtu sil, kterými na něj působí všechny ostatní náboje. Z toho vyplývá, že celková energie soustavy více nábojů je rovna součtu členů pocházejících ze vzájemné interakce každého páru nábojů. Jsou-li q_i a q_j některé dva z těchto nábojů a r_{ij} je vzdálenost mezi nimi (obr. 8.1), energie tohoto páru je

$$\frac{q_i q_j}{4 \pi \epsilon_0 r_{ij}}. \quad (8.2)$$

Výsledná elektrostatická energie W je součtem energií všech možných párů nábojů v soustavě:

$$W = \sum_{\substack{\text{všechny} \\ \text{páry}}} \frac{q_i q_j}{4 \pi \epsilon_0 r_{ij}}. \quad (8.3)$$

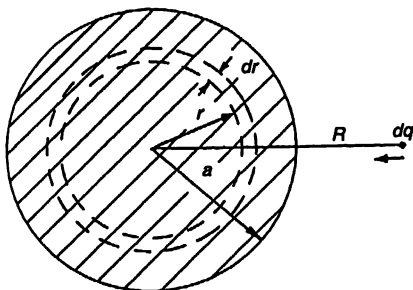
Jde-li o rozdělení nábojů specifikované hustotou náboje ρ , je samozřejmě nutné nahradit sumu ve vzorci (8.3) integrálem.



Obr. 8.1 Elektrostatická energie soustavy částic je rovna součtu elektrostatických energií všech párů částic v soustavě.

My se budeme touto energií zabývat ze dvou hledisek. Jedním je *využití* pojmu energie v elektrostatických úlohách a druhým jsou různé způsoby *výpočtu* energie. Někdy je snazší vypočítat práci vykonanou v nějakém speciálním případě, než vyčíslit sumu nebo příslušný integrál ve vzorci (8.3). Jako příklad vypočítáme energii potřebnou na shromáždění náboje do koule s homogenní hustotou náboje. Je rovna práci vykonané při přibližování nábojů z nekonečna.

Představte si, že kouli vytváříme postupným přidáváním tenkých kulových slupek s infinitesimální tloušťkou na sebe. V každém stádiu tohoto procesu bereme malé množství náboje a přikládáme jej ve tvaru tenké kulové slupky sahající od r do $r + dr$.



Obr. 8.2 energii homogenně nabitě koule můžeme počítat tak, že si představíme kouli, jako by byla složena ze vzájemně na sebe přiléhajících kulových slupek.

Pokračujeme tak dlouho, dokud nedosáhneme konečného poloměru a (obr. 8.2). Je-li Q náboj koule ve stádiu, kdy byla vytvořena do poloměru r , je při přinášení dalšího náboje dQ vykonávána práce.

$$dW = \frac{Q \, dQ}{4\pi \epsilon_0 r}. \quad (8.4)$$

Je-li hustota náboje v kouli ρ , náboj Q je

$$Q = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$$

a náboj dQ je vyjádřen takto:

$$dQ = \rho \cdot 4\pi r^2 dr.$$

Rovnost (8.4) pak získá tvar

$$dW = \frac{4\pi \rho^2 r^4 dr}{3\epsilon_0}. \quad (8.5)$$

Celková energie potřebná na vytvoření koule je rovna integrálu od $r=0$ do $r=a$, tj.

$$W = \frac{4\pi \rho^2 a^5}{15\epsilon_0}. \quad (8.6)$$

Chceme-li výsledek vyjádřit pomocí celkového náboje Q koule, dostaneme

$$W = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi \epsilon_0 a}. \quad (8.7)$$

Energie je tedy přímo úměrná druhé mocnině celkového náboje a nepřímo úměrná poloměru. Vztah (8.7) můžeme interpretovat také tak, že podle něj je střední hodnota veličiny $(1/r_j)$ pro všechny páry bodů v kouli $3/5 a$.

8.2 ENERGIE KONDENZÁTORU. SÍLY PŮSOBÍCÍ NA NABITÉ VODIČE

Nyní uvažujme o energii potřebné k nabití kondenzátoru. Vezmeme-li od jednoho z vodičů tvořících kondenzátor náboj Q a přeneseme-li ho na druhý vodič, vznikne mezi nimi rozdíl potenciálů

$$U = \frac{Q}{C}, \quad (8.8)$$

kde C je kapacita kondenzátoru. Kolik práce je vykonáno při nabíjení kondenzátoru? Budeme postupovat stejně jako v případě koule a představíme si, že kondenzátor se nabíjel přenášením náboje po malých částech dQ z jedné jeho desky na druhou. Na přenesení náboje dQ je spotřebována práce

$$dW = U dQ$$

Dosažením U z (8.8) tento vztah získá tvar

$$dU = \frac{Q dQ}{C}.$$

Když potom integrujeme od nulového do konečného náboje Q , dostaneme

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}. \quad (8.9)$$

Tuto energii je možné napsat i ve tvaru

$$W = \frac{1}{2} C U^2. \quad (8.10)$$

Vzpomeneme-li si, že kapacita vodivé koule (vzhledem k nekonečnu) je

$$C_{\text{koule}} = 4\pi\epsilon_0 a,$$

můžeme ze vzorce (8.9) ihned dostat vztah pro energii nabité koule:

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a}. \quad (8.11)$$

Ovšem toto je i vztah pro energii tenké *kulové slupky* s celkovým nábojem Q ; tato energie představuje 5/6 energie homogenně nabité koule, vyjádřen vztahem (8.7).

Nyní se zabýváme aplikacemi pojmu elektrostatické energie. Zkoumejme následující otázky: Jaká síla působí mezi elektrodami kondenzátoru? Nebo: Jaký moment síly vzhledem k nějaké ose působí na nabitý vodič v přítomnosti jiného vodiče s opačným nábojem? Takové otázky lze snadno zodpovědět použitím našeho výsledku (8.9) pro elektrostatickou energii kondenzátoru spolu s principem virtuální práce (viz kapitoly 4, 13 a 14, díl 1).

Použijeme tuto metodu na určení síly působící mezi deskami rovinného kondenzátoru. Představíme-li si, že mezera mezi deskami se zvětšila o malou hodnotu Δz , mechanická práce vynaložená vnější silou na posunutí desek byla

$$\Delta A = F\Delta z, \quad (8.12)$$

kde F je síla působící mezi deskami. Tato práce musí být rovna změně elektrostatické energie kondenzátoru.

Podle vztahu (8.9) měl kondenzátor původně energii (8.9)

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}.$$

Změna energie (nedopustíme-li, aby se náboj změnil) je

$$\Delta W = \frac{1}{2} Q^2 \Delta \left(\frac{1}{C} \right). \quad (8.13)$$

Porovnáním (8.12) a (8.13) dostaneme

$$F\Delta z = \frac{Q^2}{2} \Delta \left(\frac{1}{C} \right), \quad (8.14)$$

což je možné napsat ve tvaru

$$F\Delta z = -\frac{Q^2}{2C^2} \Delta C. \quad (8.15)$$

Působící síla, samozřejmě, vyplývá z rozdělení nábojů na deskách, ale jak je vidět, nemusíme se starat o jejich detailní rozdělení; všechno, co potřebujeme, je obsaženo v kapacitě C .

Je zřejmé, že tuto myšlenku lze rozšířit na vodiče jakéhokoliv tvaru a na ostatní složky síly. Ve vztahu (8.14) zaměníme F složkou, kterou hledáme, a Δz nahradíme malým posunutím v odpovídajícím směru. Nebo máme-li elektrodu vyznačující se nějakou osou a je třeba najít moment síly N , napíšeme virtuální práci ve tvaru

$$\Delta A = N\Delta\vartheta$$

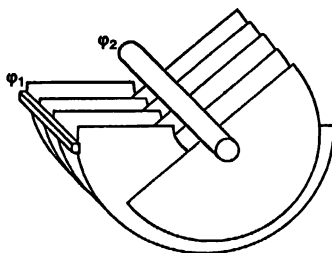
kde $\Delta\vartheta$ je malé úhlové posunutí. V tomto případě musí $\Delta(1/C)$ přirozeně představovat změnu veličiny $1/C$ příslušnou pootočení $\Delta\vartheta$. Tak bychom mohli najít moment působící na pohyblivé desky v otočném kondenzátoru takového typu, jako je na *obr. 8.3*.

Vrátíme se ke speciálnímu případu kondenzátoru s rovnoběžnými rovinnými elektrodami. Pro jeho kapacitu můžeme použít vzorec odvozený v kapitole 6:

$$\frac{1}{C} = \frac{d}{\epsilon_0 S}, \quad (8.16)$$

kde S je plošný obsah každé desky. Zvětšíme-li mezera mezi deskami o Δz , bude platit

$$\Delta \left(\frac{1}{C} \right) = \frac{\Delta z}{\epsilon_0 S}.$$



Obr. 8.3 Jaký moment síly působí na otočný kondenzátor?

Z rovnice (8.14) dostaneme, že síla mezi deskami je

$$F = \frac{Q^2}{2 \epsilon_0 S}. \quad (8.17)$$

Všimněme si výrazu (8.14) trochu blíže a podívejme se, zda lze říci, jak tato síla vzniká. Vyjádříme-li náboj na jedné desce ve tvaru

$$Q = \sigma S,$$

vztah (8.17) lze přepsat takto:

$$F = \frac{1}{2} Q \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Protože intenzita elektrického pole mezi deskami je

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

máme

$$F = \frac{1}{2} Q E_0. \quad (8.18)$$

Ilhned bylo možné se dovítit, že síla působící na jednu desku je rovna součinu náboje Q na desce a intenzity pole působícího na náboj. Dostali jsme však překvapující součinitel $1/2$. Příčina spočívá v tom, že E_0 není ta intenzita pole, která je v místě, kde jsou náboje. Když si představíme, že náboj zabírá tenkou vrstvu na povrchu desky, jak to znázorňuje *obr. 8.4*, intenzita pole se bude měnit od nuly na vnitřním okraji vrstvy do E_0 v prostoru mimo desku.

Střední intenzita působící na náboje je $E_0/2$. To je důvod, proč ve vztahu (8.18) vystupuje součinitel $1/2$.

Je nutné, abyste si všimli, že při výpočtu virtuální práce jsme předpokládali, že náboj na kondenzátoru je stálý, tj. že kondenzátor není elektricky připojen k jiným tělesům, a tak se celkový náboj nemůže měnit.

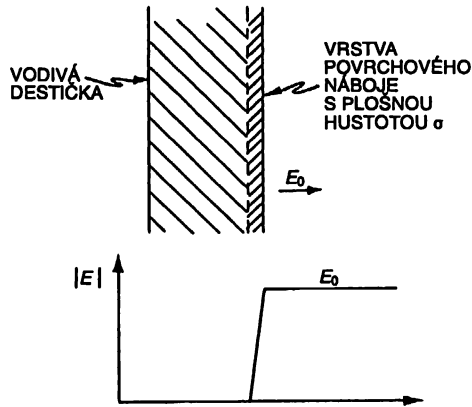
Předpokládejme, že po dobu virtuálního přemístění by se kondenzátor udržoval na stálém rozdílu potenciálů. V tom případě bychom měli použít vztah

$$W = \frac{1}{2} C U^2$$

a místo (8.15) bychom dostali

$$F\Delta z = \frac{1}{2} U^2 \Delta C,$$

z čehož vyplývá stejně velká síla jako ze vztahu (8.15) (neboť $U = Q/C$), ale s opačným znaménkem. Tím, že jsme kondenzátor odpojili od nabíjecího zdroje, síla mezi jeho elektrodami zajisté nezmění znaménko. Kromě toho víme, že dvě elektrody s opačnými elektrickými náboji se musí přitahovat. V druhém případě však byl princip virtuální práce použit nekorektně – nevzali jsme v úvahu virtuální práci vykonanou nabíjecím zdrojem. Aby se totiž při změně kapacity udržel stejný potenciál U , je nutné, aby zdroj dodal náboj $U\Delta C$. Tento náboj je však dodáván při potenciálu U , takže práce konaná elektrickým systémem udržujícím neměnný potenciál, je $U^2 \Delta C$. Mechanická práce $F\Delta z$ plus elektrická práce $U^2 \Delta C$ spolu dávají změnu celkové energie kondenzátoru rovnou $\frac{1}{2} U^2 \Delta C$. Proto $F\Delta z = -\frac{1}{2} U^2 \Delta C$ stejně jako předtím.



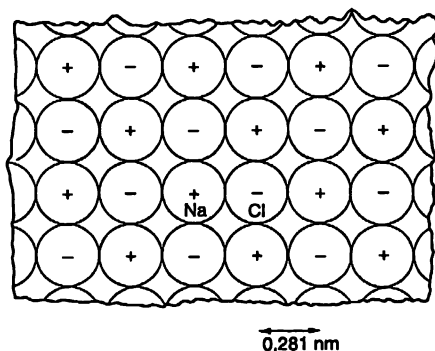
Obr. 8.4 Intenzita elektrického pole se změnila při průchodu vrstvou plošného náboje existujícího na povrchu vodiče z nuly na hodnotu $E_0 = \sigma/\epsilon_0$.

8.3 ELEKTROSTATICKÁ ENERGIE IONTOVÉHO KRystalu

Nyní se zabýváme využitím pojmu elektrostatičké energie v atomové fyzice. Síly mezi atomy nelze měřit snadno, ale často nás zajímají rozdíly energie mezi dvěma konfiguracemi atomů, např. energie chemických změn. Protože atomové síly jsou v podstatě elektrickými silami, chemické energie jsou z velké části právě elektrostatičkémi energiemi.

Uvažujme například elektrostatičké energii iontové mřížky. Ionťový krystal, tj. takový jako je krystal NaCl, se skládá z kladných a záporných ionťů, které je možné považovat za tuhé koule. Elektricky se přitahují, dokud se nezačnou vzájemně dotýkat; potom se uplatní odpudivá síla, která velmi prudce vzroste, pokusíme-li se je přiblížit těsněji.

Proto jako naše první přiblížení vezměme soustavu tuhých koulí, představující atomy v krystalu kuchyňské soli. Struktura krystalové mřížky byla určena pomocí ohybu rentgenového záření. Jde o kubickou mřížku (jako trojrozměrná šachovnice). Obr. 8.5 ukazuje její řez. Vzdálenost mezi sousedními ionty je 0,281 nm ($= 2,81 \cdot 10^{-10}$ m).



Obr. 8.5 Řez krystalem kuchyňské soli v atomovém měřítku. Šachovnicové uspořádání iontů Na a Cl je stejné v obou na sebe kolmých řezech krystalem (obr. 1.7, díl 1)

Je-li náš obraz této soustavy správný, měli bychom být schopni prověřit jej tím, že si položíme následující otázku: Kolik energie je třeba, aby se všechny tyto ionty od sebe navzájem oddělily, tj. aby se krystal úplně rozbil na jednotlivé ionty? Tato energie bude rovna skupenskému teplu vypařování NaCl zvětšená o energii potřebnou na disociaci molekul na ionty. Celková energie potřebná na rozdrobení NaCl na ionty byla experimentálně určena jako 7,92 elektronvoltů na jednu molekulu. Použijeme-li převod

$$1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J (joule)}$$

a Avogadrovu konstantu jako počet molekul v jednom molu, tedy

$$N_0 = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1},$$

energií vypařování napíšeme takto:

$$W = 7,64 \cdot 10^5 \text{ J mol}^{-1}.$$

Je možné dostat tuto chemickou energii teoreticky vypočítáním množství práce potřebné k roztržení krystalu? Podle naší teorie představuje tato práce součet potenciálních energií všech iontových párů. Nejsnadnější cestou pro výpočet tohoto součtu je vybrat vždy konkrétní ion a počítat jeho potenciální energii vzhledem ke každému z ostatních iontů. Dostaneme tak *dvounásobek* energie připadající na jeden ion, protože počítané energie budou náležet *párům* iontů. Potřebujeme-li, aby se vypočítaná energie vztahovala k jedinému konkrétnímu iontu, musíme vzít poloviční hodnotu. Ale ve skutečnosti potřebujeme energii připadající na *jednu molekulu*, která obsahuje dva ionty, takže vypočtený součet bude přímo udávat energii připadající na molekulu.

Energie iontu vzhledem k jednomu z jeho nejbližších sousedů je rovna e^2/a , kde $e^2 = q_e^2/4\pi\epsilon_0$ a a je vzdálenost mezi středy obou iontů. (Uvažujeme jednovazné ionty.) Tato energie je rovna 5,12 eV, což, jak už vidíme, by nám mělo poskytnout výsledek o řádově správné velikosti. Ale do nekonečné sumy, kterou potřebujeme spočítat, je ještě dlouhá cesta.

Začneme sčítáním všech členů, které pocházejí od iontů ležících v jedné přímce. Předpokládáme-li, že ion označený Na na obr. 8.5 je naším konkrétním iontem, uvažme nejdříve ty ionty, které s ním leží na jedné vodorovné přímce. Nejbližší jsou dva záporně nabitě ionty Cl, každý ve vzdálenosti a . Potom jsou dva kladné ionty ve vzdálenosti $2a$ atd. Označíme-li energii, kterou dá tento součet W_1 , bude platit

$$W_1 = \frac{e^2}{a} \left(-\frac{2}{1} + \frac{2}{2} - \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \dots \right) = -\frac{2e^2}{a} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right). \quad (8.19)$$

Tato řada konverguje pomalu, takže je těžké ji numericky vyčíslit. Je však známo, že je rovna $\ln 2$. Tedy

$$W_1 = -\frac{2e^2}{a} \ln 2 = -1,386 \frac{e^2}{a}. \quad (8.20)$$

Nyní uvažujme přímku iontů, která sousedí s už uvažovanou přímkou shora. Nejbližší iont je záporný a je ve vzdálenosti a . Potom jsou dva kladné ionty ve vzdálenosti $\sqrt{2}a$, další ve vzdálenosti $\sqrt{10}a$ atd. Takto pro celou přímkou dostáváme řadu

$$\frac{e^2}{a} \left(-\frac{1}{1} + \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{10}} + \dots \right). \quad (8.21)$$

Takové přímky existují čtyři: shora, zdola, zepředu a zezadu. Potom jsou čtyři přímky, jež jsou nejbližšími přímkami na úhlopříčkách atd., atd.

Zpracujete-li trpělivě všechny přímky a pak uděláte sumu, dostanete konečný výsledek

$$W = -1,747 \frac{e^2}{a},$$

což je pouze o něco víc, než jsme dostali v (8.20) pro první přímkou. Dosadíme-li $e^2/a = 5,12$ eV, dostaneme

$$W = -8,94 \text{ eV}.$$

Náš výsledek převyšuje asi o 10% experimentálně pozorovanou energii. To ukazuje, že naše představa o mřížce jako útvaru drženém pohromadě elektrickými Coulombovými silami, je v podstatě správná. Je to poprvé, kdy jsme dostali specifickou vlastnost makroskopické látky na základě poznání atomové fyziky. Později dosáhneme mnohem víc. Předmět, jenž se snaží vysvětlit vlastnosti makroskopických množství látky pomocí zákonů chování atomů, se nazývá *fyzika pevných látek*.

A jak je to s chybou našeho výpočtu? Proč tento výpočet neplatí přesně? Pro odpuzování mezi ionty na krátké vzdálenosti. Nejsou to dokonale tuhé koule, takže když jsou těsně u sebe, částečně se stlačí. Jelikož nejsou příliš měkké, stačí se jen trochu. Na jejich deformaci je však spotřebována nějaká energie a když se ionty od sebe vzdalují, tato energie se uvolňuje. Skutečná energie potřebná k oddělení iontů je trochu menší než ta, kterou jsme vypočítali; jejich vzájemné odpuzování pomáhá překonat elektrostatické přitahování.

Existuje nějaký způsob, jak můžeme určit tento příspěvek? Mohli bychom, kdybychom znali zákon odpudivé síly. Nejsme připraveni na analýzu detailů tohoto mechanismu odpuzování. Určitou představu o jeho charakteristikách však můžeme získat z některých makroskopických měření. Z měření *stlačitelnosti* celého krystalu můžeme získat kvantitativní představu o zákonu odpuzování mezi ionty, a tím o jeho příspěvku k energii. Takovou cestou bylo zjištěno, že tento příspěvek musí být $1/9,4$ příspěvku elektrického přitahování a má, samozřejmě, opačné znaménko. Odečteme-li tento příspěvek od čisté elektrostatické energie, dostaneme 7,99 eV jako energii disociace připadající na jednu molekulu. Je to mnohem blíže k pozorované hodnotě 7,92 eV, ale

stále ještě ne dokonale shodné. Existuje ještě jedna věc, kterou jsme nevzali v úvahu – vůbec jsme nezapočítali kinetickou energii kmitů mřížky. Když se udělá oprava i na tento efekt, získá se velmi dobrá shoda s experimentální hodnotou. Naše představy jsou pak správné; hlavním příspěvkem k energii takového krystalu, jako je NaCl, je elektrostatická energie.

8.4 ELEKTROSTATICKÁ ENERGIE V ATOMOVÝCH JÁDRECH

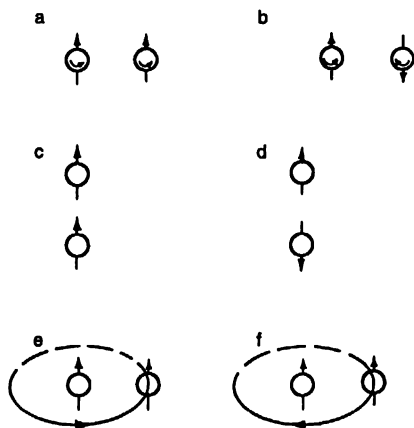
Nyní se budeme věnovat jinému příkladu elektrostatické energie v atomové fyzice – elektrické energii atomových jader. Předtím však musíme pohovořit o některých vlastnostech hlavních sil (nazvaných jaderné síly), které udržují protony a neutrony v jádře pohromadě. V prvním období po objevu jader, jakož i neutronů a protonů, jež je vytvářejí, fyzici doufali, že silná neelektrická část síly působící mezi, řekněme, protonem a jiným protonem bude vyjádřena nějakým jednoduchým zákonem, podobným zákonu nepřímé úměrnosti druhé mocnině vzdálenosti v případě elektřiny. Kdyby byl tento zákon jednou určen, jakož i odpovídající zákony sil působících mezi protonem a neutronem a mezi neutronem a neutronem, bylo by možné teoreticky popsat celé chování těchto částic v jádrech. Proto byl zahájen rozsáhlý program výzkumu rozptylu protonů v naději, že bude nalezen zákon síly působící mezi nimi; ale ani po třiceti letech úsilí nevyšlo najevo nic jednoduchého. O síle, která působí mezi protonem a protonem byl nashromážděno velké množství poznatků, ale zjišťujeme, že jde o tak složitou sílu, jak jen může být.

Výrokem „tak složitá, jak jen může být“ myslíme, že tato síla závisí na takovém množství činitelů, jak je to jen možné.

Zaprvé, síla není jednoduchou funkcí vzdálenosti mezi oběma protony. Při velkých vzdálenostech jde o přitahování, ale při těsnějších vzdálenostech nastává odpuzování. Závislost na vzdálenosti představuje složitou, stále ještě ne zcela známou funkci.

Za druhé, síla závisí na orientaci spinů protonů. Protony mají spin (představujeme si jej prostě jako rotaci kolem své vlastní osy) a každé dva interagující protony mohou rotovat s momenty hybnosti ve stejném směru nebo ve směrech opačných. A síla, když jsou spiny paralelní, je různá od síly, když jsou antiparalelní. (obr. 8.6 a, b). Rozdíl je velmi velký, a nejde tedy o malý efekt.

Za třetí, síla v případě, že spojnice mezi oběma protony leží ve směru *rovnoběžném* s jejich spiny (obr. 8.6 c, d) se značně liší od síly v případě, kdy má spojnice směr *kolmý* na spiny, jako na obr. 8.6 a, b.

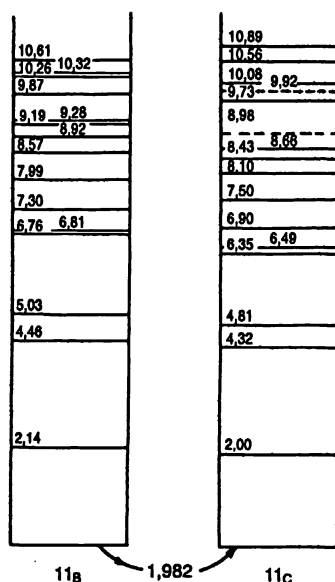


Obr. 8.6 Síla mezi dvěma protony závisí na všech možných parametrech.

Za čtvrté, síla – podobně jako je tomu v magnetizmu – závisí na rychlosti protonů, ale mnohem silněji než v magnetizmu. Tato síla, závisící na rychlosti, není relativistickým efektem; velká je i při rychlostech mnohem menších než rychlost světla. Kromě toho tato část síly závisí i na jiných faktorech než na velikosti rychlosti. Například pohybuje-li se proton blízko jiného protonu, liší se síla podle toho, zda orbitální pohyb má stejný (obr. 8.6 e) nebo opačný (obr. 8.6 f) směr rotace jako spin. S tímto souvisící část síly je nazývána *spin-orbitální* část jaderné síly.

Síly mezi protonem a neutronem nebo mezi neutronem a neutronem jsou stejně komplikované. Do dnešního dne neznáme mechanismus těchto sil, tj. nějaký jednoduchý způsob, jak je pochopit.

V jednom ohledu jsou však síly mezi nukleony *jednodušší*, než by mohly být. Jde o to, že *jaderná* síla mezi dvěma neutrony je stejná jako mezi protonem a neutronem a tatáž jako síla mezi dvěma protony. Nahradíme-li v jakékoliv *jaderné konfiguraci* proton neutronem (nebo naopak), *jaderné interakce* se nezmění. „Základní příčina“ této rovnosti je známa, ale jde o příklad důležitějšího principu, který je možné rozšířit i na zákony interakce jiných částic vyznačující se silnými interakcemi, např. pionů a „podivných“ částic.



Obr. 8.7 Energetické hladiny jader ^{11}B a ^{11}C (hodnoty udané v MeV). Základní stav ^{11}C leží o 1,982 MeV výše než základní stav ^{11}B .

Tento fakt lze pěkně ilustrovat rozmístěním hladin energie v podobných jádrech. Uvažujme takové jádro jako ^{11}B (bór jedenáct), jež se skládá z pěti protonů a šesti neutronů. Těchto jedenáct částic v jádře na sebe navzájem působí nejsložitějším způsobem. Existuje jedna konfigurace ze všech možných interakcí, jež má nejnižší možnou energii – je to normální stav jádra a nazývá se *základní stav*. Vybudí-li se jádro (například nárazem protonu nebo jiné částice s vysokou energií), je možné přivést jej do nekonečně mnoha jiných konfigurací, nazvaných *excitované stavy*, z nichž každý bude mít charakteristickou energii větší, než je energie základního stavu. Ve výzkumech fyziky jádra, např. takových, jako se dělají pomocí van de Graaffova generátoru, se experimentálně určují energie a další vlastnosti těchto vybuděných stavů. Energie patnácti nejnižších

známých excitovaných stavů jádra ^{11}B jsou vyznačeny na diagramu v levé polovině obr. 8.7. Nejnižší vodorovná příčka představuje základní stav. První excitovaný stav má energii o 2,14 MeV větší než stav základní, další energii o 4,46 MeV vyšší než základní stav atd. Výzkum v jaderné fyzice se pokouší najít vysvětlení tohoto dost složitěho obrazu energií, ale úplná obecná teorie takových hladin jaderné energie dosud neexistuje.

Nahradíme-li jeden z neutronů v ^{11}B protonem, dostaneme jádro izotopu uhlíku ^{11}C . Energie nejnižších šestnácti excitovaných stavů ^{11}C jsou také naměřeny. Ukazuje je pravá polovina obr. 8.7. (Přerušované úsečky vyznačují hladiny, o nichž jsou experimentální údaje nedostatečné.)

Podíváme-li se na obr. 8.7, uvidíme podobnost rozložení hladin energie v obou jádrech. První excitované stavy jsou asi 2 MeV nad základními stavy. Následuje velká mezera asi 2,3 MeV k druhému excitovanému stavu, potom malý skok pouze 0,5 MeV k třetí hladině. Mezi čtvrtou a pátou hladinou je opět velký skok, ale mezi pátou a šestou pouze maličká mezera řádu 0,1 MeV atd. Asi po desáté hladině se zdá, že se shoda ztratila. Je však možné ji postřehnout, označí-li se hladiny jejich jinými definičními charakteristikami, například jejich momenty hybnosti a tím, jak ztrácejí svou přebytečnou energii.

Zarážející podobnost v rozložení hladin energie ^{11}B a ^{11}C zajisté není důsledkem náhody. Musí odhalovat nějaký fyzikální zákon. Svědčí vlastně o tom, že i v komplikované situaci v jádře způsobí nahrazení neutronu protonem jen velmi malou změnu. Může to znamenat jediné, že neutron-neutronové a proton-protonové síly musí být téměř totožné. Pouze tehdy bychom mohli očekávat, že jaderná konfigurace se šesti protony a pěti neutrony bude stejná jako konfigurace se šesti protony a pěti neutrony.

Všimněte si, že vlastnosti těchto dvou jader nám neřeknou nic o neutron-protonové síle; v obou jádrech je stejný počet neutron-protonových kombinací. Porovnáme-li dvě jádra, taková jako ^{14}C , které má šest protonů a osm neutronů, a ^{14}N , které má jedněch i druhých po sedmi, najdeme podobnou shodu hladin energie. Můžeme proto udělat závěr, že p-p, n-n a p-n síly jsou identické v celé jejich spletnosti. V zákonech jaderných sil se uplatňuje neočekávaný princip. I když síla působící mezi každým párem jaderných částic je velmi komplikovaná, síla mezi třemi odlišnými páry je stejná.

Ale nějaké rozdíly přece jen existují. Hladiny energie nesouhlasí přesně; kromě toho základní stav ^{11}C má absolutní energii (hmotnost) větší než základní stav ^{11}B o 1,982 MeV. Všechny ostatní hladiny mají absolutní energii také větší o tuto hodnotu. Síly tedy nejsou přesně stejné. Velmi dobře však víme, že výsledné síly nejsou přesně totožné; mezi dvěma protony působí elektrická síla, neboť každý z nich má kladný elektrický náboj, zatímco mezi dvěma neutrony taková síla není. Můžeme snad rozdíly mezi ^{11}B a ^{11}C vysvětlit skutečností, že elektrická interakce je v těchto dvou případech odlišná? Snad i menší rozdíly přetrvávající v hladinách jsou vyvolány elektrickými účinky? Protože jaderné síly mnohonásobně převyšují elektrickou sílu, elektrické efekty mají na energie hladin pouze malý rušivý účinek.

Abychom tuto myšlenku prověřili nebo spíše zjistili, jaké má důsledky, uvažujme nejdříve energie základních stavů obou jader. Abychom přitom měli jednoduchý model, předpokládejme, že jádra jsou koule s poloměrem r (jenž je třeba určit) obsahující Z protonů. Pokládáme-li jádro za kouli s homogenní hustotou náboje, očekáváme, že jeho elektrostatická energie (ze vztahu (8.7)) bude

$$W = \frac{3}{5} \frac{(Zq_e)^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (8.22)$$

kde q_e je elementární náboj protonu. Z má hodnotu pět pro ^{11}B a šest pro ^{11}C , a tak se jejich elektrostatické energie budou lišit.

Při takovém malém počtu protonů však vztah (8.22) není docela správný. Počítáme-li energii mezi všemi páry protonů, přičemž tyto pokládáme za body přibližně rovnoměrně rozdělené v objemu koule, zjistíme, že ve vztahu (8.22) je nutné veličinu Z^2 nahradit výrazem $Z(Z-1)$, takže energii vyjadřuje vztah

$$W = \frac{3}{5} \frac{Z(Z-1) q_e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{3}{5} \frac{Z(Z-1)}{r} e^2. \quad (8.23)$$

Kdybychom znali poloměr jádra r , mohli bychom pomocí (8.23) najít rozdíl elektrostatických energií mezi ^{11}B a ^{11}C . Ale postupujme naopak; namísto toho použijme naměřený rozdíl energií k výpočtu poloměru za předpokladu, že celý rozdíl energií má elektrostatický původ.

To však není docela pravda. Rozdíl energií 1,982 MeV mezi základními stavy ^{11}B a ^{11}C zahrnuje klidové energie, tj. energie mc^2 , všech částic. Při přechodu od ^{11}B k ^{11}C nahrazujeme neutron protonem, jenž má menší hmotnost. Tak část rozdílu energií představuje rozdíl klidových energií neutronu a protonu, tj. 0,784 MeV. Rozdíl, který je třeba vysvětlit elektrostatickou energií, je tak větší než 1,982 MeV:

$$1,982 + 0,784 = 2,766 \text{ MeV}.$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do (8.23), vypočteme, že poloměr jádra ^{11}B nebo ^{11}C je

$$r = 3,12 \cdot 10^{-15} \text{ m}. \quad (8.24)$$

Má takové číslo nějaký smysl? Abychom zjistili, zda ano, musíme jej porovnat s nějakým jiným určením poloměru těchto jader. Například jiné měření poloměru jádra můžeme vykonat pozorováním, jak jádro rozptyluje rychlé částice. Z takových měření se zjistilo, že *hustota* látky je ve všech jádrech skoro stejná, tj. jejich objemy jsou přímo úměrné počtu částic v nich. Udává-li A počet protonů a neutronů v jádře (číslo, které je přímo úměrné hmotnosti jádra), ukazuje se, že jeho poloměr určuje vztah

$$r = A^{1/3} r_0, \quad (8.25)$$

kde

$$r_0 = 1,2 \cdot 10^{-15} \text{ m}. \quad (8.26)$$

Z těchto měření zjistíme, že poloměr jádra ^{11}B (nebo ^{11}C) by měl být

$$r = (1,2 \cdot 10^{-15}) (11)^{1/3} = 2,7 \cdot 10^{-15} \text{ m}.$$

Porovnáme-li tento výsledek s (8.24), vidíme, že naše předpoklady o elektrostatické příčině rozdílu energií mezi ^{11}B a ^{11}C jsou zhruba správné; rozdíl představuje pouze asi 15% (to není špatné na náš první jaderný výpočet!).

Příčina rozdílu spočívá pravděpodobně v tomto. Podle současného chápání jader vytváří párový počet jaderných částic – v případě ^{11}B pět neutronů spolu s pěti protony – jakousi uzavřenou *vrstvou*; když se k této vrstvě přidá ještě jedna částice, namísto toho, aby se pohltila, zůstane obíhat vně uzavřené vrstvy. Je-li to tak, musíme pro dodatečný proton vzít odlišnou

elektrostatickou energii. Měli bychom položit přírůstek energie ^{11}C vzhledem k ^{11}B rovný hodnotě výrazu

$$\frac{Z_B q_e^2}{4\pi \epsilon_0 a},$$

tj. energii potřebnou k tomu, aby se na vnější stranu uzavřené vrstvy přidal proton. Tato hodnota je právě 5/6 té, kterou předpovídá vzorec (8.23), takže nová předpověď poloměru je rovna 5/6 hodnoty vypočtené podle (8.24). Tento výsledek je v mnohem těsnější shodě s tím, co se přímo naměřilo.

Z této shody můžeme udělat dva závěry. První: zdá se, že elektrické zákony platí i v takových malých rozměrech jako 10^{-15} m. Druhý: přesvědčili jsme se o pozoruhodné shodě spočívající v tom, že neelektrické části sily mezi protonem a protonem, neutronem a neutronem a protonem a neutronem jsou všechny stejné.

8.5 ENERGIE V ELEKTROSTATICKÉM POLI

Zabývejme se nyní jinými metodami výpočtu elektrostatické energie. Všechny se dají odvodit ze základního vztahu (8.3), který obsahuje sumu vzájemných energií každého páru nábojů, vypočtenou přes všechny páry. Nejdřív chceme napsat výraz pro energii rozdělení nábojů. Jako obvykle, předpokládáme, že každý objemový element dV obsahuje element náboje ρdV . Vztah (8.3) je pak třeba psát takto:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\text{prostor}}^{\text{celý}} \frac{\rho(1)\rho(2)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} dV_1 dV_2. \quad (8.27)$$

Všimněte si součinitele 1/2, který byl zaveden proto, že ve dvojném integrálu podle dV_1 i dV_2 jsme všechny páry elementů náboje započítali dvakrát. Neexistuje vhodný způsob, jak zapsat integrál, v němž by se každý pár bral v úvahu jen jednou. Dále si všimněte, že integrál přes dV_2 v (8.27) vyjadřuje právě potenciál v bodě (1). Tedy

$$\int \frac{\rho(2)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} dV_2 = \varphi(1),$$

takže vztah (8.27) můžeme psát takto

$$W = \frac{1}{2} \int \rho(1)\varphi(1) dV_1.$$

Protože bod (2) už zde nefiguruje, můžeme prostě psát

$$W = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV. \quad (8.28)$$

Tento vztah lze interpretovat takto. Potenciální energie náboje ρdV je dána součinem tohoto náboje a potenciálu v téměř bodě. Celková energie je proto rovna integrálu $\rho \varphi dV$. Ale opět je

tu součinitel $1/2$. Je ještě potřebný neboť energie přitom počítáme dvakrát. Vzájemná energie dvou nábojů je rovna součinu jednoho z nich a potenciálu v jeho poloze vyvolaného druhým nábojem. Nebo je možné ji dostat jako součin druhého náboje a potenciálu v jeho poloze vyvolaného prvním nábojem. Pro dva bodové náboje bychom tedy psali

$$W = q_1 \varphi(1) = q_1 \frac{q_2}{4 \pi \epsilon_0 r_{12}}$$

nebo

$$W = q_2 \varphi(2) = q_2 \frac{q_1}{4 \pi \epsilon_0 r_{12}}.$$

Všimněte si, že bychom mohli také napsat, že

$$W = \frac{1}{2} [q_1 \varphi(1) + q_2 \varphi(2)]. \quad (8.29)$$

Integrál v (8.28) odpovídá součtu obou členů v závorkách ve vztahu (8.29). Proto je potřebný součinitel $1/2$.

Zajímavá otázka je: kde sídlí elektrostatická energie? Nebo by bylo možné se ptát: Není to jedno? Jaký smysl má tato otázka? Existuje-li pár na sebe působících nábojů, má tato kombinace určitou energii. Potřebujeme vůbec mluvit o tom, že tato energie sídlí na jednom nebo na druhém z nábojů nebo na obou současně, nebo někde mezi nimi? Tyto otázky snad nemají smysl, protože ve skutečnosti pouze víme, že celková energie se zachovává. Představa o tom, že energie *někde* sídlí, není nevyhnutelná.

A přesto předpokládáme, že opravdu má smysl tak jako v případě tepelné energie i obecně říkat, že energie je lokalizována v určitém místě. Pak bychom mohli náš princip zachování energie *rozšířit* o myšlenku, že mění-li se energie v daném objemu, můžeme tuto změnu vysvětlit tokem energie do tohoto objemu nebo z něj ven. Chápete, že naše původní formulace principu zachování energie je nadále zcela v pořádku v případě, kdy se nějaká energie ztrácí na jednom místě a objevuje se někde jinde velmi daleko aniž by se něco dělo (tj. aniž by nastávaly nějaké zvláštní jevy) v prostoru mezi těmito místy. Proto nyní mluvíme o rozšířeném principu zachování energie. Nazveme to principem *lokálního zachování energie*. Podle tohoto principu se v jakémkoliv daném objemu energie mění pouze o to množství, které do tohoto objemu vtéká nebo z něj vytéká. Je skutečně možné, že energie se zachovává takovýmto způsobem lokálně. Pokud ano, měli bychom k dispozici mnohem detailnější zákon než prostý výrok o zachování celkové energie. Ukazuje se, že v přírodě je *energie zachovávána lokálně*. Můžeme najít vzorce, jež udávají, kde je energie lokalizována a jak přechází z místa na místo.

Existuje i *fyzikální* důvod, proč je naléhavé, abychom dokázali určit, kde je energie lokalizována. Podle teorie gravitace je každá hmotnost zdrojem gravitační přitažlivosti. Za vztahu $E = mc^2$ také víme, že hmotnost a energie jsou ekvivalentní. Všechna energie je proto zdrojem gravitační síly. Pokud bychom nemohli lokalizovat energii, nemohli bychom lokalizovat žádnou hmotnost. Nebyli bychom schopni ani určit, kde se nachází zdroje gravitačního pole. Teorie gravitace by byla neúplná.

Když se omezíme na elektrostatiku, skutečně neexistuje způsob, jak se dovědět, kde se energie nachází. Úplné Maxwellovy rovnice elektrodynamiky nám však poskytují mnohem víc informací (ačkoliv ani potom odpověď není, přesně řečeno, jednoznačná). Tuto otázku budeme proto opět

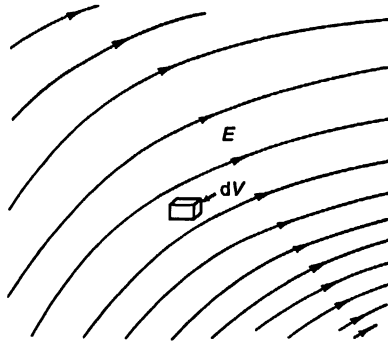
podrobněji rozebrat později. Nyní zde uvedeme pouze výsledek pro zvláštní případ – pro elektrostati-ku. Energie je soustředěna v prostoru, kde se nachází elektrické pole. Vypadá to rozumně, neboť víme, že jsou-li náboje urychlovány, vyzařují elektrická pole. Rádi bychom řekli, že přechá-zejí-li světlo nebo rádiové vlny z jednoho bodu do druhého, nesou s sebou energii těchto nábojů. Ale ve vlnách nejsou žádné náboje. Proto bychom rádi energii lokalizovali tam, kde je elektromag-netické pole, a ne v nábojích, ze kterých pole vzniklo. Takovým způsobem popisujeme energii nikoliv pomocí nábojů, ale pomocí polí vytvářených náboji. Můžeme opravdu ukázat, že vztah (8.28) je číselně roven hodnotě

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV. \quad (8.30)$$

Tento vzorec si můžete vysvětlovat tak, že podle něj v prostoru, kde existuje elektrické pole, je soustředěna energie, jejíž *hustotu* (energie připadající na jednotku objemu) vyjadřuje vztah

$$w = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}. \quad (8.31)$$

Tuto představu ilustruje *obr. 8.8*



Obr. 8.8 Každý element objemu $dV = dx dy dz$ v elektrickém poli obsahuje energii $(\epsilon_0/2) E^2 dV$.

Abychom ukázali, že vztah (8.30) vyhovuje našim zákonům, začneme dosazením vztahu mezi ρ a φ , tedy

$$\rho = -\epsilon_0 \nabla^2 \varphi$$

který jsme dostali v kapitole 6, do výrazu na pravé straně (8.28). Tím dostaneme

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int \varphi \nabla^2 \varphi dV. \quad (8.32)$$

Rozepíšeme-li integrand do složek, uvidíme, že

$$\begin{aligned}
 \varphi \nabla^2 \varphi &= \varphi \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 = \quad (8.33) \\
 &= \nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi) - (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \varphi).
 \end{aligned}$$

Náš integrál je potom

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \varphi) dV - \frac{\epsilon_0}{2} \int \nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi) dV.$$

Pomocí Gaussovy věty můžeme druhý integrál transformovat na plošný integrál

$$\int_{\text{objem}} \nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi) dV = \int_{\text{plocha}} (\varphi \nabla \varphi) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (8.34)$$

Tento plošný integrál vypočteme pro případ, že plocha sahá do nekonečna (takže objemové integrály se stanou integrály přes celý prostor), a za předpokladu, že všechny náboje jsou umístěny v nějaké konečné vzdálenosti. Jednoduchý způsob, jak postupovat, je vzít kulovou plochu s velmi velkým poloměrem R , jejíž střed se nachází v počátku souřadnicové soustavy. Víme, že když jsme velmi daleko od všech nábojů, mění se φ jako $1/R$ a $\nabla \varphi$ jako $1/R^2$. (Obě veličiny budou klesat s R ještě rychleji, když sumární náboj rozdělení je roven nule.) Protože plošný obsah povrchu velké koule roste jako R^2 , vidíme, že při zvětšování poloměru koule klesá plošný integrál jako $(1/R)(1/R^2)R^2 = 1/R$. Zahrneme-li tedy do našeho integrování celý prostor ($R \rightarrow \infty$), plošný integrál se bude blížít k nule a dostaneme

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{celý prostor}} (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \varphi) dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{celý prostor}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV. \quad (8.35)$$

Vidíme, že energii jakéhokoliv rozdělení nábojů můžeme vyjádřit jako integrál hustoty energie sdílené v poli.

8.6 ENERGIE BODOVÉHO NÁBOJE

Podle našeho vztahu (8.35) bude i jednotlivý bodový náboj q mít nějakou elektrostatickou energii. V tomto případě vyjádříme intenzitu elektrického pole takto:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Hustota energie ve vzdálenosti r od náboje je tedy

$$\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{q^2}{32 \pi^2 \varepsilon_0 r^4}.$$

Jako element objemu můžeme vzít kulovou slupku s tloušťkou dr a plošným obsahem $4\pi r^2$. Celková energie je

$$W = \int_{r=0}^{\infty} \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2} dr = -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_{r=0}^{r=\infty}. \quad (8.36)$$

Horní hranice $r=\infty$ nepředstavuje žádnou obtíž. V případě bodového náboje bychom však měli integrovat až do $r=0$, což vede k nekonečně velké hodnotě. Podle vztahu (8.35) je v poli bodového náboje nekonečné množství energie, ačkoli jsme vyšli z představy, že energie existuje pouze *mezi* bodovými náboji. Do našeho původního vzorce (8.3) pro energii soustavy bodových nábojů jsme nezahrnuli žádnou interakční energii náboje se sebou samým. Co se potom stalo? Když jsme přešli ke spojitému rozdělení náboje ve vztahu (8.27), započítali jsme energii interakce každého *infinitesimalního* náboje se všemi ostatními infinitesimalními náboji. Stejný zápočet byl proveden ve vztahu (8.35), takže když používáme (8.35) pro *konečný* bodový náboj, zahrnujeme i energii, která je spotřebována na to, aby se daný náboj sestavil z infinitesimalních částí. Skutečně si všimněte, že kdybychom pro energii nabitě koule použili náš výraz (8.11) a nechali poloměr blížít se nule, také bychom dostali výsledek (8.36)

Musíme udělat závěr, že představa o tom, že energie sídlí v poli, se neshoduje s předpokladem o existenci bodového náboje. Jedním východiskem z tohoto problému je prohlásit, že elementární částice, takové jako elektron, nejsou body, ale ve skutečnosti malými rozděleními náboje. Mohli bychom však také říci, že něco chybného je v naší teorii elektřiny při velmi malých vzdálenostech anebo v představě o lokálním zachování energie. S každým z těchto hledisek jsou problémy. Tyto problémy nebyly nikdy překonány a existují dodnes. Někdy později, až budeme mluvit o některých dalších pojmech jako např. hybnost v elektromagnetickém poli, podáme úplnější výklad těchto fundamentálních problémů v našem chápání přírody.

PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 8.1 ■ Souhlasíte s tvrzením v kapitole 8, že elektrostatická energie atomového jádra obsahujícího Z protonů víceméně rovnoměrně rozložených v objemu koule poloměru r je přibližně rovna $W = \frac{3}{5} Z(Z-1) \frac{e^2}{r}$?
- 8.2 ■ Maximální kapacita otočného kondenzátoru v radiopřijímači je 100 pF. Natočením pohyblivých desek lze zmenšit na 10 pF. Předpokládejme, že kondenzátor je nabit na napětí 300 V při maximální kapacitě. Pak začneme otáčet ladicím knoflíkem a kapacitu zmenšovat na minimální. Jakou práci přitom vykonáme?
- 8.3 ■ Náboje na elektrodách dvou kondenzátorů o kapacitách C_1 a C_2 jsou q_1 a q_2 . Ukažte, že až na některé zvláštní případy se nahromaděná elektrická energie kondenzátorů zmenší, spojíme-li je paralelně. Kam se přitom energie poděje? Najděte podmínky, při nichž v takovém případě k úbytku energie nedochází.
- 8.4 ■ a) Ukažte, že v elektrickém poli E je elektrostatická energie dipólu s dipólovým momentem p rovna $W = -p \cdot E$.
b) Vypočítejte moment síly, který působí na dipól v elektrickém poli E . Proveďte to jednak přímým výpočtem, jednak pomocí předchozího výrazu pro energii dipólu. Bude energie dipólu stejná jako v případě, kdybychom ho vytvořili postupným umístěním jeho kladného a záporného náboje? Jestli ne, vypočítejte rozdíl obou energií. Jestli ano, pokuste se to fyzikálně zdůvodnit.
- 8.5 ■ Ukažte, že desky rovinného kondenzátoru se přitahují silou $F = q^2/2 \epsilon_0 S$ (S je plocha desky). Určete práci, kterou je třeba vykonat, aby se vzdálenost mezi deskami zvětšila z x na $x + dx$.
- 8.6 ■ Je známo, že pion se může nacházet ve třech různých nábojových stavech. Jinak řečeno, existuje kladný, záporný a neutrální pion. Klidová energie nabitého pionu je 139,6 MeV, neutrálního pionu 135 MeV. V jednom z modelů pionu se předpokládá, že rozdíl těchto energií je dán pouze energií elektrostatickou. Budeme-li dále předpokládat, že nabité piony mají kulový tvar a náboj rovnoměrně rozložený v celém objemu, můžeme vypočítat poloměr pionu. Bude získaný výsledek souhlasit s existujícími odhady rozměrů atomových jader?
- 8.7 ■ Vnitřní poloměr nenabitě kovové kulové skořápky je roven a , její vnější poloměr b a střed se nachází v počátku souřadnic. Ve skořápce je vyvrtán malý otvor. Jakou musíme vynaložit práci, abychom přenesli náboj q_1 z nekonečna otvorem do počátku souřadnic? Čemu by byla rovna tato práce, kdyby skořápka byla nabitá nábojem q_2 ?

Elektrina v atmosféře

9.1 GRADIENT ELEKTRICKÉHO POTENCIÁLU V ATMOSFÉŘE

9.2 ELEKTRICKÉ PROUDY V ATMOSFÉŘE

9.3 PŮVOD ATMOSFÉRICKÝCH PROUDŮ

9.4 BOUŘKY

9.5 MECHANIZMUS ODDĚLOVÁNÍ NÁBOJŮ

9.6 BLESK

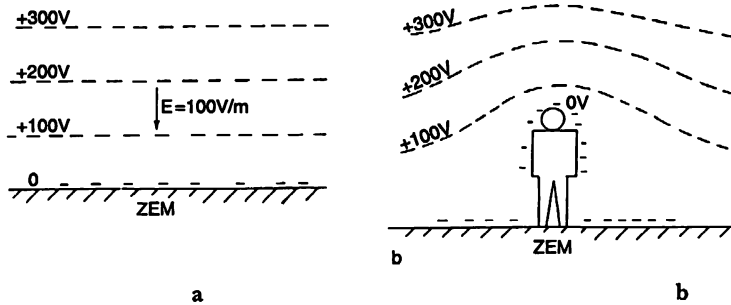
9.1 GRADIENT ELEKTRICKÉHO POTENCIÁLU V ATMOSFÉŘE

Literatura: Chalmers, J. Alan, Atmospheric Electricity, London, Pergamon Press, 1957

Za obyčejného dne nad rovinatou pouští nebo nad mořem vzrůstá elektrický potenciál asi o 100 voltů na metr vzhůru od zemského povrchu. Ve vzduchu tedy existuje vertikální elektrické pole E s velikostí $100 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. Směr pole je takový, jako kdyby zemský povrch měl záporný náboj. To znamená, že venku je potenciál ve výšce vašeho nosu o 200 voltů vyšší než potenciál na úrovni vašich chodidel. Mohli byste se zeptat: „Proč tedy neupevníme ve vzduchu ve vzdálenosti jeden metr od sebe dvě elektrody a nevyužijeme těch 100 voltů k napájení elektrického osvětlení?“ Nebo byste se mohli podívat: „Je-li mezi mýmnosem a chodidly skutečně napětí 200 voltů, proč když vycházím z budovy, nedostanu elektrický šok?“

Objasníme nejprve druhou otázku. Vaše tělo je poměrně dobrým vodičem. Dotýkáte-li se země, vy spolu s ní vytváříte jednu ekvipotenciální hladinu. Ekvipotenciální hladiny jsou normálně rovnoběžné se zemským povrchem (*obr. 9.1 a*), ale když jste tam vy, poruší se a pole vypadá asi tak, jako ukazuje *obr. 9.1 b*. Mezi vaší hlavou a chodidly je tedy téměř nulové napětí. Ze země přechází do vaší hlavy náboje a pole se mění.

ELEKTŘINA V ATMOSFÉŘE

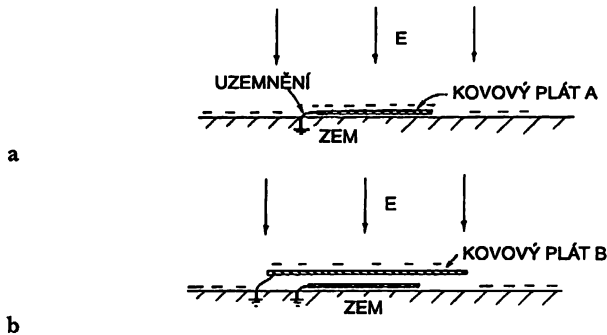


Obr. 9.1 a) rozdělení potenciálu nad zemí.

b) rozdělení potenciálu v blízkosti člověka stojícího na otevřeném rovinném prostranství.

Některé z těchto nábojů mohou být neutralizovány ionty ve vzduchu, jejich proud je však velmi malý, neboť vzduch je špatným vodičem.

Jak můžeme měřit takové pole, změnil-li se, když do něj něco vložíme? Existuje několik způsobů. Jeden způsob je umístit izolovaný vodič do určité vzdálenosti nad zemí a nechat jej tam, dokud nebude na stejném potenciálu jako vzduch. Necháme-li jej tam dostatečně dlouho, budou i při malé vodivosti vzduchu náboje z (nebo do) vodiče unikat, dokud se jeho potenciál nevyrovná s potenciálem vzduchu na stejné úrovni. Pak jej můžeme opět spustit k zemi a změřit změnu potenciálu. Rychlejší způsob je použít jako vodič vědro vody s malou dírkou. Vykapávající voda odnese přebytečné náboje a vědro bude mít tentýž potenciál jako vzduch. (Jak víte, náboje se zdržují na povrchu a odkapáváním kapek se „kousky povrchu“ odlamují.) Potenciál vědra je možné změřit elektrometrem.



Obr. 9.2 a) Uzemněná kovová deska bude mít stejný plošný náboj jako zemský povrch.

b) Když se deska přikryje uzemněným vodičem, nebude mít žádný plošný náboj.

Existuje ještě jeden způsob přímého měření *gradientu* potenciálu. Protože existuje elektrické pole, má Země svůj povrchový náboj ($\sigma = \epsilon_0 E$). Umístíme-li do blízkosti zemského povrchu rovnou kovovou desku A a uzemníme ji, objeví se na ní záporné náboje (obr. 9.2 a). Přikryjeme-li tuto desku jinou uzemněnou vodivou deskou B, objeví se náboje na ní a z původní desky A vymizí. Když odměříme náboj, jenž prochází z desky A k zemi (například galvanometrem připojeným k uzemňovacímu vodiči při jejím zakrývání, můžeme zjistit povrchovou hustotu náboje, která na něm byla, a tím zjistit i elektrické pole.

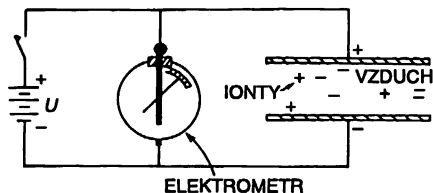
Když jsme si připomněli, jak je možné elektrické pole v atmosféře měřit, budeme nyní pokračovat v jeho popisu. Měření především ukazují, že při výstupu do velkých výšek pole sice existuje, ale slabne. Zhruba po padesáti kilometrech je už velmi malé, takže většina změny potenciálu (integrál intenzity E) připadá na menší výšky. Celkový rozdíl potenciálu od povrchu Země k horní hranici atmosféry je asi 400 000 voltů.

9.2 ELEKTRICKÉ PROUDY V ATMOSFÉŘE

Kromě gradientu potenciálu můžeme v atmosféře měřit také proud. Hustota proudu je malá – každým metrem čtverečným rovnoběžným se zemským povrchem prochází asi 10 pikoampérů. Vzduch zřejmě není dokonalý izolant a v důsledku jeho vodivosti prochází od oblohy dolů k zemi malý proud, vyvolaný právě popisovaným elektrickým polem.

Proč je atmosféra vodivá? Mezi molekulami vzduchu se tu a tam vyskytne iont, řekněme molekula kyslíku, která přibrala jeden elektron navíc, nebo snad jeden elektron ztratila. Tyto ionty nezůstávají osamocené; svým elektrickým polem kolem sebe obvykle shromáždí několik dalších molekul. Každý iont se potom stává malou hrudkou, která je spolu s jinými podobnými hrudkami unášena polem, a při pomalém pohybu vzhůru nebo dolů vytváří pozorovatelný proud. Odkud *ionty* pocházejí? Nejdříve se lidé domnívali, že vznik iontů způsobuje radioaktivita Země. (Bylo známo, že záření z radioaktivních látek ionizuje molekuly ve vzduchu a tím jej dělá vodivým.) Částice, například β -záření, vylétují z atomových jader tak rychle, že vytrhávají elektrony z atomů a zanechávají za sebou ionty. Z této domněnky ovšem vyplývá, že při výstupu do větších výšek bychom našli menší ionizaci, protože všechna radioaktivita se nachází v Zemi – ve stopových množstvích radia, uranu, draslíku apod.

K prověření této teorie vykonali někteří fyzici experiment s balóny ve velké výšce, aby změřili ionizaci vzduchu (Hess, r. 1912). Objevili však, že opak je pravdou – ionizace na jednotku objemu s výškou *roste!* (Přístroj byl podobný tomu, který je znázorněn na *obr. 9.3*. Dvě desky byly periodicky nabíjeny na napětí U . V důsledku vodivosti vzduchu se desky pomalu vybíjely; rychlost vybíjení byla měřena elektrometrem.) Tento nepochopitelný výsledek byl nejdramatičtějším objevem v celé historii atmosférické elektřiny.



Obr. 9.3 Měření vodivosti vzduchu způsobené pohybem iontů

Byl vlastně tak dramatický, že podnítl vznik docela nové vědní oblasti – fyziky kosmického záření. Problém samotné atmosférické elektřiny zůstal v pozadí. Ionizaci vzduchu způsobovalo zřejmě cosi mimozemského; výzkum tohoto zdroje vedl k objevu kosmického záření. Nyní o něm nebudeme více hovořit, snad jen tolik, že je zdrojem iontů ve vzduchu. Ačkoli jsou ionty neustále odnášeny pryč, produkují částice kosmického záření přicházející z vesmíru neustále nové ionty.

Pro přesnost musíme říci, že kromě iontů vytvořených z molekul, existují i jiné druhy iontů. Ve vzduchu se vznášejí droboučké kousky pŕdy, například velmi jemná prachová zrníčka, a nabíje-

jí se. Někdy se nazývají „jádra“. Anebo jiný příklad. Při zhroutení mořské vlny se do vzduchu vyvrhují malé kapičky. Když se některá z nich vypaří, zanechá ve vzduchu vznášející se extrémně malý krystalek NaCl. Tyto droboučké krystalky mohou potom přibírat náboje a stát se ionty; jsou nazývány „velké ionty“.

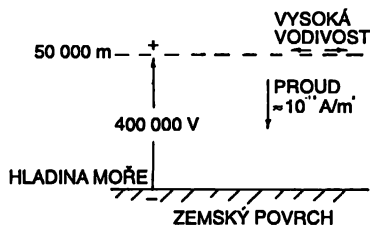
Malé ionty, tj. ty, které vytvořilo kosmické záření, jsou nejpohyblivější. Protože jsou tak malé, pohybují se ve vzduchu rychle – rychlostí asi $1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ v poli $100 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ neboli $1 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1}$. Mnohem větší a hmotnější ionty se pohybují mnohem pomaleji. Ukazuje se, že je-li „jader“ mnoho, přebírají náboje od malých iontů. Protože „velké ionty“ se pohybují velmi pomalu, celková vodivost se pak zmenšuje. Vodivost vzduchu je tedy krajně proměnlivá, protože je velmi citlivá na množství nečistot v něm. Takových nečistot je mnohem více nad souší, kde mohou větry zvedat prach ze země, nebo kde se do vzduchu dostávají nejrozmanitější odpadové nečistoty, než nad vodou. Potom nepřekvapuje, že ze dne na den, z okamžiku na okamžik, od místa k místu vodivost v blízkosti zemského povrchu ohromně kolísá. V každém bodě nad zemským povrchem se značně mění i gradient potenciálu, neboť na různých místech přichází dolů z velkých výšek zhruba stejný proud a proměnlivá vodivost při zemském povrchu se projeví proměnlivým gradientem potenciálu.

S výškou rapidně vzrůstá i vodivost vzduchu způsobená driftem iontů, a to ze dvou příčin. Především s výškou vzrůstá ionizace vyvolaná kosmickým zářením. Za druhé, při menší hustotě vzduchu se prodlužuje střední volná dráha iontů, které pak mohou mezi srážkami překonat v elektrickém poli delší dráhu, což se projeví rapidním vzrůstem vodivosti při výstupu vzhůru.

Ačkoli je hustota elektrického proudu ve vzduchu pouze několik pikoampérů na metr čtvereční, má zemský povrch velmi mnoho takových čtverečních metrů. Celkový elektrický proud, který dosahuje zemského povrchu, se téměř nemění a je 1800 ampérů. Tento proud je, samozřejmě, „kladný“ – do Země přivádí kladné náboje. Máme tedy napětí 400 000 voltů při proudu 1800 ampérů, což představuje výkon 700 megawattů.

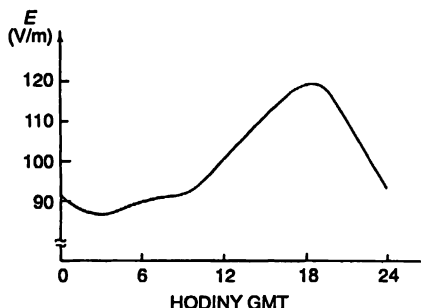
Při tak velkém proudu směřujícím dolů by se záporný náboj Země měl brzy neutralizovat. Skutečně by na to bylo třeba asi jen půl hodiny. Přesto atmosférické pole existuje, už jen od svého objevu, mnohem déle než půl hodiny. Jak se udržuje? Co udržuje elektrické napětí? A mezi čím a Zemí? Je tu mnoho otázek.

Země je nabitá záporně a potenciál ve vzduchu je kladný. V dostatečně velké výšce je vodivost tak velká, že v horizontálním směru je potenciál prakticky stejný. Z aspektu času, o němž zde hovoříme, se vzduch ve výšce asi 50 km vlastně stává vodičem. To ještě není výška odpovídající tomu, co se nazývá *ionosféra*, v níž vznikají velká množství iontů v důsledku fotoelektrických účinků slunečního záření. Ve výšce přibližně 50 km se stává vzduch natolik vodivým, že můžeme udělat v naší úvaze o atmosférické elektřině předpoklad, že v této výšce existuje prakticky dokonale vodivá plocha, z níž proud vychází dolů. Schéma této situace je na obr. 9.4. Otázkou je, jak je tam udržován kladný náboj. Jak se dostává zpět? Protože prítéká-li dolů k zemi, musí být potom nějak přečerpáván zpět nahoru. To byla dost dlouho jedna z největších záhad atmosférické elektřiny.



Obr. 9.4 Typické elektrické poměry za jasného počasí

Jakákoliv informace, kterou dokážeme získat, by mohla poskytnout klíč k této záhadě, nebo alespoň o ní něco říci. Je tu jeden zajímavý úkaz: Měřme-li proud (který je stabilnější veličinou než gradient potenciálu) například nad mořem nebo v kontrolovaných podmínkách a velmi pečlivě vypočteme průměry, abychom se zbavili náhodných hodnot, zjistíme, že existuje jeho denní variace. Průměr získaný z mnoha měření nad oceány závisí na čase zhruba tak, jak ukazuje *obr. 9.5* Proud se mění asi o $\pm 15\%$ a maxima dosahuje v sedm večer londýnského času. Překvapující na celé věci je, že nezáleží na tom, kde se proud měří – v Atlantiku, Tichém oceánu, nebo v Severním ledovém oceánu – největší hodnoty dosahuje tehdy, když je v Londýně sedm večer. Na celém světě je proud v maximum v 7.00 h večer londýnského času a v minimum ve 4.00 h ráno londýnského času.



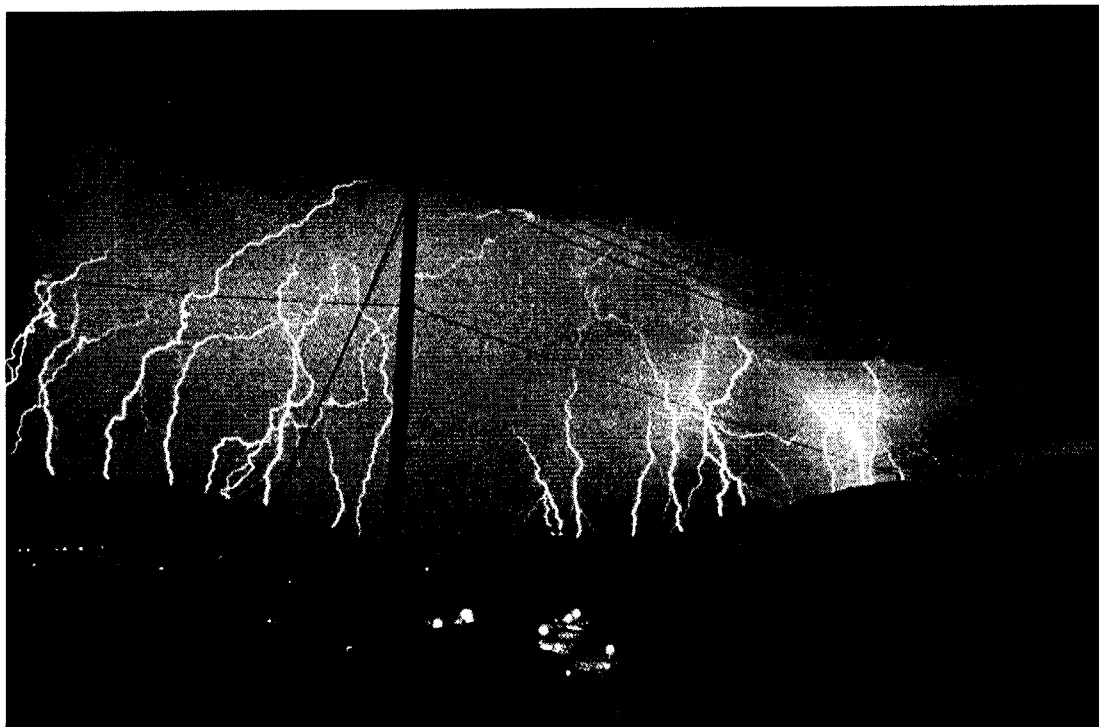
Obr. 9.5 Střední denní variace gradientu potenciálu v atmosféře za jasného dne nad oceány; údaje se vztahují ke greenwichskému času.

Jinými slovy, závisí na absolutním zemském čase, a ne na lokálním čase v místě měření. V jednom ohledu to není tak záhadné; shoduje se to s naší představou, že nahoře existuje velká horizontální vodivost, která znemožňuje, aby se napětí mezi zemí a vrchní vrstvou atmosféry měnilo podle místa. Jakékoliv změny potenciálu by měly být celosvětové, a také jsou. Od této víme, že napětí horní vrstvy atmosféry klesá a stoupá o 15 % v závislosti na absolutním čase na zemi.

9.3 PŮVOD ATMOSFÉRIKÝCH PROUDŮ

Dále se budeme zabývat zdrojem velkých záporných proudů, které musí téci „shora“ k zemskému povrchu, aby udržely záporný náboj Země. Kde je tento zdroj? Zdroj ukazuje *obr. 9.6*. Je to bouřka a bouřkový blesk. Ukazuje se, že blesky „nevybíjejí“ to napětí, o kterém jsme hovořili (jak by se vám mohlo zprvu zdát). Bouřky s blesky přivádějí do země záporné náboje. Když udeří blesk, s pravděpodobností 10 : 1 dolů přináší velké množství záporného náboje. Jsou to právě bouřky na celém světě, které nabíjejí Zemi elektrickým proudem s průměrem 1800 A, jenž se potom vybíjí v oblastech s klidným počasím.

Na celé zeměkouli je asi 40 000 bouřek za den. Bouřky můžeme pokládat za „zdroje“, které načerpávají elektrinu do horních vrstev atmosféry a udržují rozdíl potenciálů. Nyní si představte, jak vypadá naše Země – odpoledne jsou bouřky v Brazílii, tropické bouřky v Africe atd. Vědci odhadli počet blesků, které v každém okamžiku zasahují zeměkouli, a není snad třeba dodávat, že jejich odhady více či méně souhlasí s měřeními napětí. Na celé zeměkouli je největší bouřková aktivita asi v sedm hodin večer londýnského času. Ale dělat takové odhady bouřek je velmi těžké a udělaly se pouze *potom*, když se vědělo, jaká variace se má v nich objevit.



Obr. 9.6 Mechanismus generující elektrické pole v atmosféře (foto William L. Widmayer)

Problém je totiž v tom, že nemáme dostatek pozorování na moři a ve všech částech světa, abychom počet bouřek znali přesně. Ti vědci, kteří se domnívají, že „to udělali správně“, přicházejí k výsledku, že na celém světě udeří asi 100 blesků za sekundu s maximem bouřkové aktivity v 7.00 h večer greenwichského středního času.

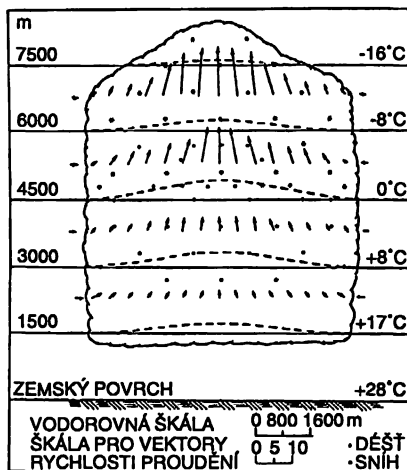
Abychom porozuměli, jak pracují tyto zdroje, všimneme si bouřky detailněji. Co se děje uvnitř bouřky? Popíšeme to, co zatím známe. Vnikáme-li do tohoto neobyčejného úkazu v reálné přírodě, místo dokonale vodivých koulí uvnitř jiných koulí, jež umíme tak pěkně řešit, zjišťujeme, že toho nevíme příliš mnoho. A je to opravdu vzrušující. Každý, kdo zažil bouřku, se z ní radoval, nebo byl vystrašený, nebo alespoň něco pocítoval. A na těch místech v přírodě, které evokují emoce, obvykle nacházíme i odpovídající složitost i tajemnost přírody. Není možné exaktně popsat, jak se bouřka odehrává, neboť ještě mnoho nevíme. Ale zkusíme trochu pohovořit o tom, co se při ní děje.

9.4 BOUŘKY

Především je nutno říci, že běžná bouřka se skládá z množství těsně k sobě přiléhajících, ale navzájem téměř nezávislých buněk. Proto bude nejlepší popsat tu zároveň jednu takovou buňku.

Buňkou rozumíme ohraničenou oblast v horizontálním směru, v níž probíhají všechny základní procesy. Obvykle vedle sebe existuje několik buněk, z nichž v každé probíhá zhruba totéž, ale ne současně. Obr. 9.7 schematicky naznačuje, jak taková buňka vypadá v počátečním stádiu bouřky. Ukazuje se, že v určitém místě ve vzduchu za určitých podmínek, které popíšeme

dále, dochází k obecnému vzestupu vzduchu rychlostí, která směrem vzhůru roste. Dole teplý a vlhký vzduch se při vzestupu ochlazuje a vlaha se kondenzuje. Na obrázku označují křížky snh a kroužky déšť. Protože je však stoupající proud dost velký a kapky jsou dost malé, ani snh ani déšť v tomto stádiu nedopadnou dolů. To je počáteční stádium a ještě ne opravdová bouřka v tom smyslu, že při zemi se nic neděje. Současně, jak teplý vzduch stoupá, dochází k přívalu vzduchu ze stran; to je důležitý fakt, jenž se po mnoho let zanedbával. Vzduch tedy stoupá nejen zdola, ale i určité množství vzduchu ze stran.

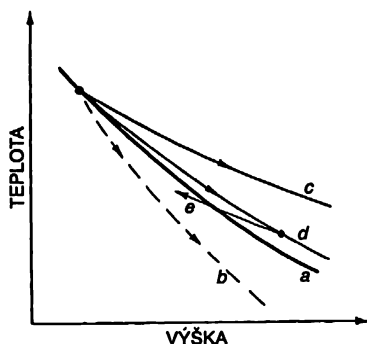


Obr. 9.7 Bouřková buňka v prvních stádiích vývoje (obr. 9.7, 9.9, 9.10 a 9.11 podle U. S. Department of Commerce Weather Bureau Report, June 1949).

Proč vzduch takto stoupá? Jak víte, nahoře je vzduch chladnější. Slunce vyhřívá zemský povrch a vysoko v atmosféře vyzářuje vodní pára teplo vzhůru; proto je ve velkých výškách vzduch chladný, velmi chladný, zatímco níže je vzduch teplý. Můžete říci: „Pak je to velmi jednoduché. Teplý vzduch je lehčí než chladný, proto je tato kombinace mechanicky nestabilní a teplý vzduch stoupá.“ Samozřejmě, je-li v různých výškách různá teplota, vzduch je *termodynamicky* nestabilní. Kdyby byl ponechán sám o sobě, získal by všechen vzduch tutéž teplotu. Ale vzduch není ponechán sám o sobě, neboť Slunce vždy svítí (ve dne). Ve skutečnosti tedy nejde o problém *termodynamické*, ale *mechanické* rovnováhy. Nakreslíme-li graf (obr. 9.8) závislosti teploty vzduchu na výšce nad zemským povrchem, za obvyklých podmínek bychom dostali klesající křivku označenou *a*; při nárůstu výšky teplota klesá.

Jak může být atmosféra stabilní? Proč horký vzduch zdola prostě nevystoupí nahoru k chladnému? Kdyby vzduch stoupal, jeho tlak by klesal a – máme-li namysli určitý balík stoupajícího vzduchu – adiabaticky by se rozpínal. (Teplo by do něj nepřicházelo a ani neunikalo, neboť v takových velkých rozměrech, o jakých uvažujeme, není dost času na přechod velkého množství tepla.) Náš balík by se tedy při stoupání ochlazoval. Závislost teploty na výšce při takovém adiabatickém procesu znázorňuje křivka *b* na obr. 9.8. Jakýkoliv vzduch, který se nahoru dostal zdola, by byl *chladnější* než prostředí, do kterého vnikl. Takže horký vzduch nemá důvod stoupat; kdyby stoupal, ochlazoval by se na nižší teplotu než má vzduch, který už tam je, stával by se těžším než okolní vzduch, zachtělo by se mu opět dolů. Za pěkného, jasného dne s velmi malou vlhkostí

existuje určitý pokles teploty v atmosféře s výškou. Obecně je menší než maximální stabilní spád, který reprezentuje křivka *b*. Vzduch se tehdy nachází ve stavu stabilní mechanické rovnováhy.

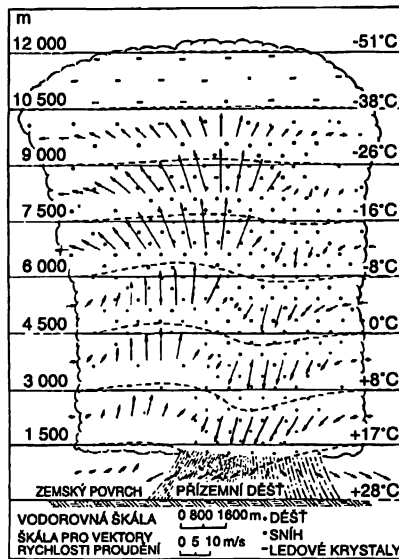


Obr. 9.8 Závislost teploty atmosféry na výšce; a – statická atmosféra; b – adiabatické ochlazování suchého vzduchu, c – adiabatické ochlazování vlhkého vzduchu, d – vlhký vzduch s určitou příměsí okolního vzduchu

Na druhou stranu, uvažujeme-li o balíku vzduchu, který obsahuje mnoho vodní páry a stoupá vzhůru, bude křivka jeho adiabatického ochlazování jiná. Při jeho rozpínání a ochlazování se v něm obsažená vodní pára bude kondenzovat a kondenzující voda bude uvolňovat teplo. Vlhký vzduch proto není ochlazován tak intenzivně jako suchý. Začne-li tedy stoupat vzduch, který má nadprůměrnou vlhkost, bude se jeho teplota měnit podle křivky *c* na obr. 9.8. Trochu se ochladí, ale ještě stále bude teplejší než okolní vzduch v téže výšce. Máme-li tedy oblast teplého, vlhkého vzduchu a něco ji přiměje stoupat, vždy zůstane lehčí a teplejší než vzduch okolo a bude pokračovat ve stoupání až do obrovských výšek. V tom spočívá podstata mechanismu, jenž přivádí vzduch v bouřkové buňce k výstupu.

Tak jednoduše se bouřková buňka vysvětlovala dlouhé roky. Pozdější měření však ukázala, že teplota v oblaku v různých výškách nebyla ani přibližně tak vysoká, jak by vyplývalo z křivky *c*. Příčina je v tom, že když „bublina“ vlhkého vzduchu stoupá, unáší s sebou vzduch z okolí a je jím ochlazována. Graf závislosti teploty na výšce vypadá tak, jako křivka *d*, která je mnohem blíže k původní křivce než ke křivce *c*.

Poté, co začala právě popsaná konvekce, vypadá svislý průřez bouřkové buňky tak, jak ukazuje obr. 9.9. Jde o tzv. „zralou“ bouřku. V ní vzniká velmi rychlé vzestupné proudění, jež v tomto stádiu sahá asi až do 10 až 15 km a někdy i mnohem výše. Bouřková oblaka s probíhající kondenzací vystupují z celkového řetězu oblaků, unáší je vzestupný proud rychlostí přibližně $100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Když je vodní pára unášena vzhůru a kondenzuje, tvoří drobné kapičky, které se rychle ochlazují na teploty pod bodem mrazu. Měly by zmrznout, ale nemrzou hned – jsou „přechlazené“. Voda a jiné kapaliny se obvykle před krystalizací snadno ochladí pod své teploty tuhnutí, neobsahují-li „jádra“, na nichž by krystalizační proces začal. Vodní kapka zmrzne na malý kousek ledu, pouze obsahuje-li nějaký kousek materiálu – takový, jako droboučký krystalek NaCl. V rovnováze se potom vodní kapky vypařují a ledové krystaly rostou. Tak voda v určitém okamžiku rychle mizí a stejně rychle se tvoří led. Kromě toho může docházet k přímým srážkám vodních kapek s ledem – jejich důsledkem je, že přechlazená voda se přichytává ke krystalkům ledu a okamžitě krystalizuje. V určitém stádiu rozpínání oblaku tedy dochází k prudkému hromadění velkých částic ledu.



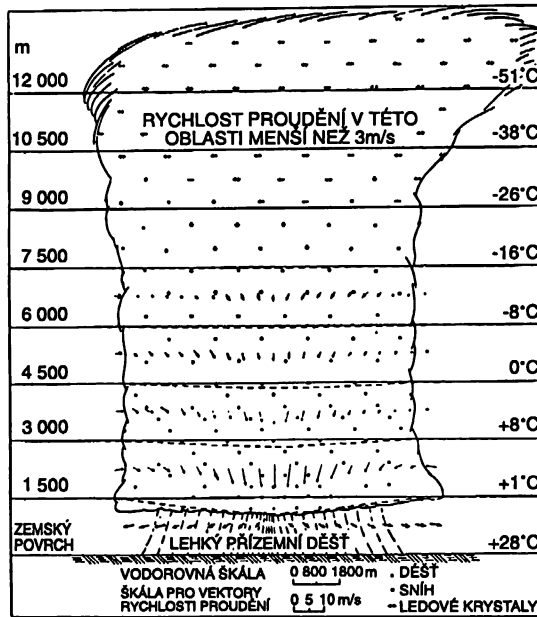
Obr. 9.9 Zralá bouřková buňka

Jsou-li částice ledu dost těžké, začnou propadat stoupajícím proudem vzduchu, který je už nemůže udržet. Při pádu s sebou unášejí trochu vzduchu a začíná sestupný proud. A je dost překvapující, o čemž je snadné se přesvědčit, že jakmile sestupný proud začal, udržuje se sám do sebe. Vzduch se nyní sám žene dolů.

Všimněte si, že křivka *d* na obr. 9.8 má pro reálné rozdělení teploty v oblaku jiný sklon než křivka *c* platící pro vlhký vzduch. Teplota padajícího vlhkého vzduchu se bude měnit tak, jak udává sklon křivky *c*, a bude tedy při dostatečně velkém poklesu nižší než teplota okolí, což na obrázku vyznačuje křivka *e*. V té chvíli však bude padající vzduch mít větší hustotu než okolní prostředí a bude pokračovat v rychlém sestupu. Můžete namítnout: „To je věčný pohyb. Nejdříve dokazujete, že vzduch musí stoupat, a když jej máte nahoře, s velkou vervou dokazujete, že musí padat.“ Ale nejde o věčný pohyb. V nestabilních podmínkách, kdy je teplý vzduch hnán vzhůru, musí samozřejmě něco přijít na jeho místo. Taktéž je pravda, že klesající chladný vzduch by ihned zaujal místo teplého vzduchu, ale uvědomte si, že to, co přichází dolů, není původní vzduch. První teorie o izolovaném, nejdříve stoupajícím a vzápětí klesajícím oblaku měly určitý háček: potřebovaly déšť k udržení sestupného proudu. Tomuto důvodu lze těžko uvěřit. Jakmile si uvědomíte, že k stoupajícímu vzduchu je přimíseno dost vzduchu, který se v uvažované výšce nacházel původně, termodynamické důvody vás donutí uznat, že může docházet k poklesu chladného vzduchu, který se původně nacházel v nějaké velké výšce. To objasňuje obraz aktivní bouřky, schematicky nakreslený na obr. 9.9.

Jakmile se vzduch dostane dolů, začne ze spodní části bouřkového mraku pršet. Kromě toho se poměrně chladný vzduch šíří po dosažení zemského povrchu na všechny strany. Proto je bezprostředně před deštěm pozorován chladný vítr, varující nás před bouřkou. V bouřce samotné se objevují náhlé a nepravidelné porывy větru, v oblaku vzniká ohromná turbulence. Ale v podstatě jde o vzestupný a potom sestupný proud – obecně velmi komplikovaný proces.

Okamžik, kdy začíná pršet, je okamžikem, kdy začíná velké sestupné proudění a je i okamžikem, kdy vlastně vznikají elektrické úkazy.



Obr. 9.10 Pozdější stádium bouřkové buňky

Dříve než popíšeme blesk, však chceme zakončit naše vyprávění tím, že se podíváme, co se s bouřkovou buňkou stane asi po půl hodině nebo po hodině. Buňka vypadá tak, jak ukazuje *obr. 9.10*. Vzestupný proud ustane, protože už není dost teplého vzduchu k jeho udržení. Nějaký čas ještě prší, poslední velké kapky dopadají dolů a vše se postupně uklidňuje, ačkoliv ve vzduchu ještě zůstaly malé krystalky ledu. Protože ve velké výšce dují větry v různých směrech, rozptyluje se horní část oblaku obvykle do tvaru kovadliny. Buňka končí svůj život.

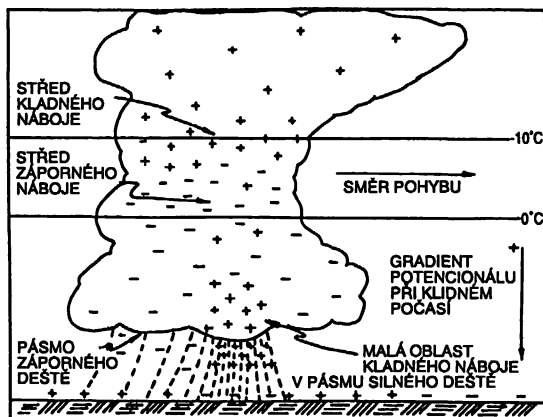
9.5 MECHANIZMUS ODDĚLOVÁNÍ NÁBOJŮ

Nyní chceme popsat z hlediska našich cílů nejdůležitější aspekt – vznik elektrických nábojů. Nejrůznější experimenty, včetně letadel proletujících bouřkami (piloti, kteří to dělají, jsou stateční lidé!), ukazují, že rozdělení náboje v bouřkové buňce vypadá nějak tak, jak je nakresleno na *obr. 9.11*. Vrchol buňky je nabit kladně a spodek záporně – s výjimkou malé lokální oblasti kladného náboje na dně oblaku, která způsobuje dost starostí. Nezdá se, že by někdo věděl, proč existuje a jaký má význam – zda je sekundárním efektem kladného padajícího deště nebo podstatnou částí celého mechanismu. Situace by se hodně zjednodušila, kdyby tato mladá oblast neexistovala.

V každém případě převážně záporný náboj dole a kladný náboj nahoře představuje správnou polaritu zdroje, který by měl nabíjet Zemi záporně. Kladné náboje jsou ve výšce 6 až 7 km, kde je teplota vzduchu asi $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$, zatímco záporné náboje jsou ve výšce 3 až 4 km při teplotách mezi $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ a $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Náboj vespod oblaku je dostatečně velký, aby vytvořil mezi oblakem a Zemí napětí 20 nebo 30, ba i 100 milionů voltů, což je mnohem více než 0,4 milionu voltů mezi „oblohou“ a zemským

povrchem při jasném počasí. Tato velká napětí způsobují průrazy vzduchu a vyřezávají obrovské obloukové výboje. Při průrazu přecházejí záporné náboje zespodu oblaku do země ve formě úderů blesku.

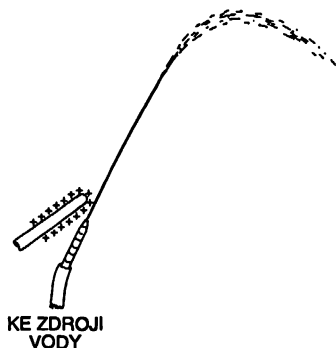


Obr. 9.11 Rozdělení elektrických nábojů ve zralé bouřkové buňce

Nyní si blíže všimneme charakteru blesku. Především v okolí existují tak velká napětí, že dochází k průrazu vzduchu. Blesky mohou udeřit mezi různými částmi téhož oblaku, mezi různými oblaky nebo mezi oblakem a Zemí. V každém nezávislém výbojovém záblesku, v úderu blesku, který vidíte, se dolů přenáší náboj přibližně 20 až 30 coulombů. Otázkou je, kolik je třeba času, aby oblak generoval těch 20 až 30 coulombů, jež odnesl blesk? Je to možné určit měřením – daleko od oblaku – elektrického pole vytvořeného dipólovým momentem oblaku. V takových měřeních se zjišťuje náhlý pokles pole při úderu blesku a následující exponenciální návrat do původní velikosti s časovou konstantou, která případ od případu trochu kolísá kolem pěti sekund. Oblaku tedy stačí pouze 5 sekund po každém úderu blesku, aby znovu vytvořil svůj náboj. To však nutně neznamená, že přesně každých 5 sekund následuje další úder blesku, protože se mění geometrie situace apod. Údery se dostávají více méně nepravidelně, ale je důležité, že znovuvytvoření původních podmínek zabere asi 5 sekund. V bouřkovém generátoru tedy procházejí proudy přibližně 4 ampéry. To znamená, že každý model, který má vysvětlit, jak bouřka generuje elektrinu, musí být modelem s dostatkem „šťavy“ – musí to být obrovské, rychle pracující zařízení.

Dříve než se dostaneme dále, všimněme si něčeho, co je skoro určitě docela bezvýznamné, ale přesto zajímavé, neboť ukazuje vliv elektrického pole na vodní kapky. Řekli jsme, že to nemusí mít význam, neboť jde pouze o pokus, který je možné provést v laboratoři s proudem vody, aby se demonstroval značný účinek elektrického pole na vodní kapky. V bouřce nejde o proud vody, tam je oblak kondenzujícího ledu a vodních kapek. Proto otázka mechanismu uplatňujícího se v bouřce pravděpodobně nijak nesouvisí s tím, co můžete vidět na jednoduchém pokusu, který popíšeme. Připojíme-li k vodovodnímu kohoutku nástavec se zúženým hrdlem a nasměrujeme ho přímo vzhůru (obr. 9.12), bude voda vystupovat tenkým proudem, jenž se případně rozpráší na malé kapičky. Vytvoříme-li v prostoru vodního proudu u nástavce elektrické pole (například pomocí nabitých tyčinky), tvar proudu se změní. Zjistíte, že při slabém elektrickém poli je proud rozdroben na menší počet velkých kapek. Použijete-li však silnější pole, rozpráší se proud na velké

množství drobounkých kapiček, menších než předtím¹³⁾. Při slabém elektrickém poli se uplatňuje tendence zabránit rozbití proudu na kapky. Při silnějším poli však tendence rozdělit proud do kapek roste.



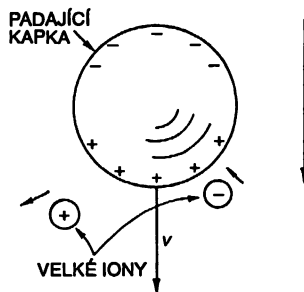
Obr. 9.12 Proud vody s elektrickým polem v blízkosti nástavce

Tyto úkazy je možné vysvětlit takto. Vytéká-li z nástavce proud vody a prochází slabým elektrickým polem, nabije se jedna strana vodního proudu trochu kladně a druhá strana trochu záporně. Budou se navzájem přitahovat a jevit větší tendenci splynout, než jevíly předtím – proud se bude méně rozprašovat. Na druhé straně, je-li pole silnější, bude náboj každé jednotlivé kapky mnohem větší a sám náboj bude svým vlastním odpuzováním napomáhat rozdrobování kapek. Každá kapka se rozbije na mnoho menších, z nichž každá bude nabita, takže se budou všechny navzájem odpuzovat a rychle se rozptýlí. Zvětšujeme-li tedy pole, rozptýlí se v něm vodní proud jemněji. Jediné, na co tu chceme poukázat, je to, že za určitých podmínek může elektrické pole mít na kapky velký vliv. Přesný mechanismus toho, co se děje v bouřce, není vůbec známý a vůbec není nutné klást ho do souvislosti s tím, co jsme právě popsali. Zahrnuli jsme to sem pouze proto, abyste získali představu o složitosti jevů, které by tu mohly hrát úlohu. Ve skutečnosti nikdy nevytvořil teorii oblaků založenou na této představě.

Rádi bychom popsali dvě teorie, jež byly vymyšleny, aby se vysvětlilo rozdělení náboje v bouřce. Všechny teorie obsahují myšlenku, že částice v dešťových srážkách mají určitý náboj a vzduch má náboj opačný. K rozdělení elektrického náboje pak dochází pohybem srážkových částic – vody nebo ledu – ve vzduchu. Jediná otázka je: Jak se kapky nabíjejí? Jedna ze starších teorií se nazývá teorie „trhání kapky“. Kdosi objevil, že roztrhne-li se vodní kapka proudem vzduchu na dvě části, nabije se voda kladně a vzduch záporně. Tato teorie má několik nedostatků, z nichž nejvýznamnější je ten, že dává nesprávné *znaménko*. Kromě toho v převážné většině bouřek v mírném pásu provázených blesky bývají srážky ve velkých výškách *nikoliv* vodní, ale ledové.

Z toho co jsme právě řekli, je vidět, že kdybychom si dokázali nějak představit, jak může kapka nabýt shora a zespodu opačné náboje, a kdybychom také znali nějaký důvod, proč se ve vzdušném proudu s velkou rychlostí kapky trhají na nestejně části (větší vpředu a menší vzadu v důsledku pohybu vzduchu nebo něčeho jiného), měli bychom teorii (odlišnou od dosud známých!). V důsledku odporu prostředí by pak malé kapky nepadaly ve vzduchu tak rychle jako velké a došlo by k oddělení opačných nábojů. Jak vidíte, je možné vymýšlet si nejrůznější možnosti.

¹³⁾ Praktický způsob pozorování rozměrů kapek je nechat proud dopadat na velkou kovovou desku. Větší kapky způsobují silnější šum.



Obr. 9.13 Teorie C. T. R. Wilsona o oddělování nábojů v bouřkovém oblaku

Jedna z důvtipnějších a v mnoha směrech uspokojivějších teorií než teorie trhající se kapek je teorie C. T. R. Wilsona. Popíšeme ji, podobně jako Wilson, pro vodní kapky, ačkoli tentýž mechanismus je uplatněn i v případě ledu. Představme si, že máme vodní kapku, která padá v elektrickém poli s intenzitou asi 100 V m^{-1} k záporně nabitě Zemi. Kapka bude mít indukovaný dipólový moment s kladnou spodní a zápornou vrchní částí (obr. 9.13). Ve vzduchu existují již zmíněná „jádra“ – velké, pomalu se pohybující ionty. (Rychlé ionty tu nehrají důležitou úlohu.) Předpokládejme, že při pádu dolů se kapka přiblíží k velkému iontu. Jde-li o kladný iont, bude kladnou spodní částí kapky odpuzován a odstrčen na stranu. Neuvízne tedy v kapce. Kdyby se iont přiblížil svrchu, mohl by se přitáhnout k záporné vrchní části. Ale protože kapka padá vzduchem, existuje kolem ní vzdušné proudění směrem vzhůru, jež unáší i ionty, je-li jejich pohyb dostatečně pomalý. Kladné ionty se tedy nepřichytí ani k horní části kapky. Jak je vidět, platí to pouze pro velké, pomalu se pohybující ionty. Takové kladné ionty se samy nepřitáhnou ani k přední, ani k zadní části padající kapky. Naproti tomu velké, pomalé záporné ionty se budou v její blízkosti k ní přitahovat a jí zachytávat. Kapka bude nabíjena záporně – znaménko náboje bylo určeno z původního rozdílu potenciálů na celé zeměkouli – a dostáváme tak správné znaménko. Kapky budou shromažďovat záporný náboj vespod oblaku, zatímco různé v sestupné proudy unesou kladně nabitě ionty, které při pádu zůstaly, do horní části oblaku. Tato teorie vypadá dost dobře a aspoň dává správné znaménko. Kromě toho se neváže pouze na kapky kapaliny. Když budeme studovat polarizaci dielektrika, uvidíme, že kousky ledu se budou chovat stejně. V elektrickém poli se na jejich koncích také objeví kladné a záporné náboje.

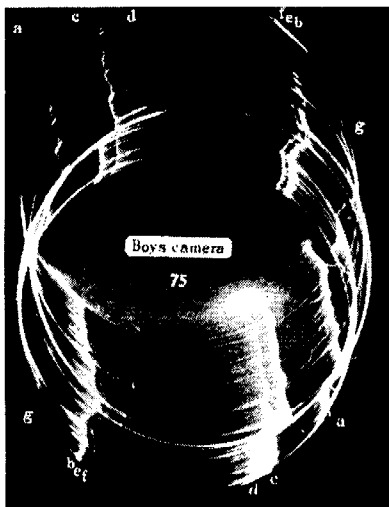
Is touto teorií jsou však určité těžkosti. Především celkový náboj vyskytující se v bouřce je velmi velký. Zásoba velkých iontů se brzy vyčerpá. Proto Wilson a jiní badatelé museli udělat předpoklad, že existují další zdroje velkých iontů. Jakmile začalo rozdělování nábojů, vznikají silná elektrická pole a v těchto polích mohou být místa, v nichž dochází k ionizaci vzduchu. Silně nabitý hrot nebo jakýkoliv malý objekt, například kapka, může pole tak silně koncentrovat, že vznikne korónový výboj. Je-li elektrické pole dostatečně silné (předpokládejme, že náboj hrotu je kladný), budou do něj padat elektrony a mezi srážkami budou nabírat velkou rychlost. Ta bude tak velká, že při srážce s atomem z něj vytrhnou elektrony a zanechají za sebou kladný iont. Tyto nové elektrony se také urychlí a při nárazech uvolní další elektrony. Vzniká jakási řetězová reakce nebo lavina a k rychlému hromadění iontů. Kladné náboje zůstávají blízko svých původních poloh, takže výsledný účinek spočívá v přerozdělení kladného náboje z hrotu do oblasti kolem něj. Pak, samozřejmě, silné pole vymizí a proces se zastaví. To je podstata korónového výboje. Není vyloučeno, že v oblaku mohou vznikat dostatečně silná pole, aby způsobila cosi jako korónový výboj; mohou také existovat mechanismy, které by ihned po spuštění způsobovaly velkou ionizaci. Ale nikdo přesně neví, jak to funguje. Podstata původu blesku tedy není podrobně objasněna.

Víme, že blesk pochází z bouřek. (A víme, samozřejmě, že hrom pochází z blesku – z tepelné energie uvolněné jeho úderem.)

Nyní můžeme alespoň částečně pochopit původ atmosférické elektřiny, Působením vzdušných proudů, iontů, vodních kapek nebo částic ledu se kladné a záporné náboje od sebe oddělí. Kladné náboje jsou vynášeny do horní části oblaku (viz obr. 9.11) a záporné náboje jsou zanášeny do země bleskovými výboji. Kladné náboje opouštějí horní část oblaku, dostávají se do vysokých vrstev, kde je vzduch vodivější, a rozptylují se nad celou zeměkoulí. V oblastech, v nichž je jasné počasí, se kladné náboje z těchto vrstev pomalu odvádějí do země tokem iontů ve vzduchu – iontů vytvářených kosmickým zářením, mořem a lidskou činností. Atmosféra je neustále pracující elektrický stroj!

9.6 BLESK

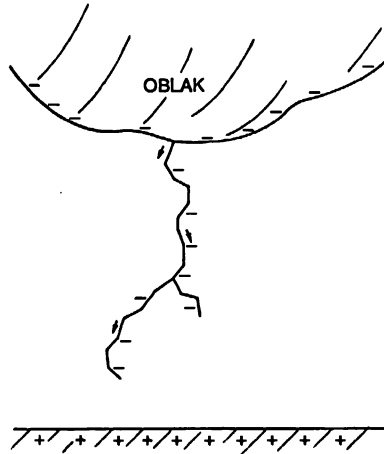
První svědectví o tom, co se děje při úderu blesku, poskytly fotografie získané aparátem držným rukou a přemísťovaným při otevřené závěrce sem a tam ve směru k místu, kde se očekával blesk. První fotografie získané tímto způsobem jasně ukázaly, že úder blesku jsou obvykle mnohonásobné výboje po téže dráze. Později byla vyvinuta kamera „Boys“, která má dvě čočky namontované pod úhlem 180° na rychle rotujícím disku. Obraz vytvořený každou z čoček se pohybuje po filmu, a tak dostáváme obrázek rozvinutý v čase. Například zopakuje-li se blesk, na snímku se objeví dva obrazy vedle sebe. Porovnáním obrazů z obou čoček můžeme zjistit podrobnosti o časové následnosti záblesků. Na *obrázku 9.14* je fotografie získaná kamerou „Boys“.



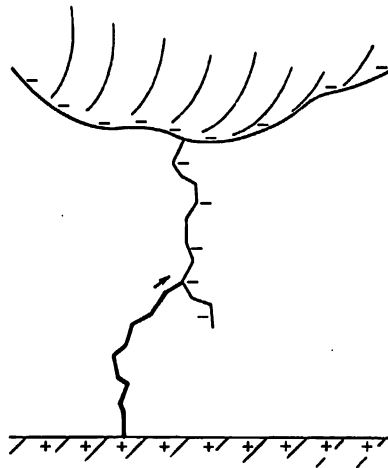
Obr. 9.14 Fotografie blesku získaná kamerou „Boys“ [Schonland, Malan a Colens, Proc. Roy. Soc., London, Vol. 152 (1935)]

Nyní popíšeme vlastní blesk. To, jak probíhá, se přesně neví. Zde uvedeme kvalitativní popis toho, jak se blesk jeví, ale obejdeme příčiny, *proč* by měl blesk probíhat tak, jak se zdá, že probíhá. Budeme uvažovat pouze obvyklý případ oblaku se zápornou částí nad rovinnatou krajinou. Oblak má záporný potenciál vzhledem k zemskému povrchu pod sebou, takže záporné elektrony jsou

urychlovány k zemi. Dochází k následujícím jevům. Vše začíná tím, co se nazývá stupňovitý vůdčí výboj (též „lídr“), který není tak oslňující jako vlastní úder blesku. Na fotografiích můžeme na začátku vidět malou jasnou skvrnu, která se velkou rychlostí (šestina rychlosti světla!) pohybuje dolů. Projde pouze zhruba 50 m a zastaví se. Stojí asi 50 mikrosekund a potom provede další krok. Znovu se zastaví a projde další úsek atd. K zemi se pohybuje sledem kroků po dráze, která vypadá tak, jak ukazuje *obr. 9.15*. Ve vůdčím výboji jsou záporné náboje z oblaku; celý kanál je plný záporného náboje.



Obr. 9.15 Vznik vůdčího výboje



Obr. 9.16 Při blesku se zpětný úder řítí vzhůru po dráze vytvořené vůdčím výbojem

Kromě toho rychlým pohybem nábojů, jenž vůdčí výboj vyvolává, se vzduch ionizuje a podél jeho dráhy se stává vodivým. V okamžiku, kdy se vůdčí výboj dotkne zemského povrchu, vzniká vodivý „drát“, který sahá až k oblaku a je vyplněn záporným nábojem. Teď konečně může záporný náboj z oblaku prostě vytéct. Jako první to udělají elektrony ze spodní části vůdčího výboje; vyhr-

nou se dolů a zanechávají za sebou kladný náboj. Ten přitahuje další záporné náboje z vyšších oblastí vůdčívho výboje, které se postupně vyroní atd. Vytvořeným kanálem nakonec vyteče velkou rychlostí všechny záporné náboje z nějaké části oblaku. Ten úder blesku, který *vidíte*, se proto šíří od *země nahoru*, jak je to vyznačeno na *obr. 9.16*. Tento hlavní úder – zdaleka nejjasnější část úkazu – se opravdu nazývá *zpětný úder*. Vydává velmi jasné světlo a teplo, které způsobí prudkou expanzi vzduchu vyvolávající zadunění hromu.

Proud v úderu blesku dosahuje v maximu až 10 000 ampérů a unáší dolů zhruba 20 coulombů.

Ale ještě nejsme na konci. Po uplynutí snad několika setin sekundy od vyhasnutí zpětného výboje přichází dolů další úder. Ale nyní už nedělá žádné pauzy. Nazývá se temný vůdčív výboj a celou cestu shora dolů projde naráz. Plnou parou se žene po staré trase, protože je tam dostatek trosek, které pro něj vytvářejí nejschůdnější cestu. Nový lídr je opět naplněn záporným nábojem. Ve chvíli, kdy se dotkne zemského povrchu – bác! – objevuje se zpětný úder, řítící se po téže dráze vzhůru. Vy uvidíte blesk ještě jednou a ještě jednou a ještě jednou. Někdy přeskochí jednou nebo dvakrát, někdy pět nebo desetkrát. Bylo zaznamenáno až 42 přeskoků po téže dráze, ale vždy za sebou v rychlém sledu.

Jindy se situace ještě více zkomplikuje. Například po jedné ze svých zastávek se může vůdčív výboj rozvětvit vysláním *dvou* odnoží, obou k zemi, ale v trochu odlišných směrech, jak ukazuje *obr. 9.15*. Co se stane potom, závisí na tom, zda jedna větev dosáhne zemského povrchu výrazně dříve než druhá. Stane-li se tak, jasné zpětné úder (záporného náboje vrhaného do země) si udělá cestu vzhůru po té větvi, jež se dotýká země, a když na cestě k oblaku dosáhne a mjíř bod větvení, objevuje se jasné výboje směrem *dolů* po druhé větvi. Proč? Protože z oblaku se vyhrne záporný náboj, a to je to, co rozsvěcuje blesk. Tento náboj se při vrcholu sekundární větve uvede do pohybu, postupně vyprazdňuje následující, delší úseky větve, takže se objevuje jasné záblesk směřující po této větvi dolů a zároveň proniká i nahoru do oblaku. Stane-li se však, že jedna z těchto přídatných větví vůdčívho výboje dosáhne povrchu téměř současně s původním vůdčív výbojem, může někdy dojít k tomu, že temný úder druhého blesku půjde po druhé větvi. Potom uvidíte první hlavní záblesk na jednom místě a druhý na jiném místě. Jde o variantu původní představy.

Kromě toho je náš popis pro oblast velmi blízko u země zjednodušený. Existují důkazy, že když se stupňovitý vůdčív výboj dostane do výšky asi 100 m od země, zvedá se k němu z povrchu Země protisměrný výboj. Pole pravděpodobně nabývá velikosti postačující pro vznik korónového výboje. Je-li tam ostrý objekt, například budova s hrotem navrchu, a prochází-li dolů vůdčív výboj, pole se natolik zvětší, že z ostrého výčnělku vyrazí samostatný výboj a spojí se s vůdčív výbojem. Blesk má sklon udeřit do takového hrotu.

Zřejmě je už dávno známo, že blesk zasahuje vysoké předměty. Existuje citát z Artabanise, Xerxova poradce, dávajícího radu svému pánovi o zamýšleném útoku na Řeky v době Xerxovy výpravy, kterou chtěl přivést celý známý svět do perského područí. Artabanis řekl: „Podívej, jak Bůh svým bleskem vždy poráží větší zvířata a nedovolí jim stát se drzími, zatímco ta menší ho nedráždí. A taktéž jeho údery dopadají na největší domy a nejvyšší stromy.“ A potom vysvětluje důvod: „Tak, zřejmě, rád ponižuje všechno, co se samo vyvyšuje.“

Teď si myslíte, že když znáte správné vysvětlení zasahování vysokých stromů blesky, že byste dokázali moudřeji radit králům ve vojenských otázkách než Artabanis před 2300 lety? Nevyšujte se. Mohli byste to dělat pouze méně poeticky.

Dielektrika

10.1 PERMITIVITA

10.2 VEKTOR ELEKTRICKÉ POLARIZACE P

10.3 POLARIZAČNÍ NÁBOJE

10.4 ELEKTROSTATICKÉ ROVNICE PRO DIELEKTRIKA

10.5 POLE A SÍLY V PŘÍTOMNOSTI DIELEKTRIK

10.1 PERMITIVITA

Na tomto místě začneme hovořit o dalších z charakteristických vlastností látky nacházející se pod vlivem elektrického pole. V jedné z předcházejících kapitol jsme se zabývali vlastnostmi *vodičů*, v nichž se účinkem elektrického pole náboje volně přemisťují do takových míst, že uvnitř vodiče nezůstane žádné pole. Nyní budeme hovořit o *izolantech*, tedy o látkách, které elektřinu nevedou. Na první pohled by se mohlo zdát, že se s nimi v elektrickém poli nestane vůbec nic. Ale Faraday pomocí jednoduchého elektroskopu a deskového kondenzátoru objevil, že tomu tak není. Jeho pokusy ukázaly, že kapacita takového kondenzátoru *vzroste*, když se mezi jeho elektrody vloží izolant. Vyplní-li izolant prostor mezi elektrodami, kapacita se zvětší ϵ_r -krát, přičemž koeficient ϵ_r závisí pouze na vlastnostech izolační látky. Izolační látky se také nazývají *dielektrika*; součinitel ϵ_r je tedy vlastností dielektrika a nazývá se *relativní permitivita*. Relativní permitivita vakua je, samozřejmě, rovna jedné.

Naší úlohou je nyní vysvětlit, proč vůbec nějaký elektrický efekt nastává, jsou-li izolanty opravdu izolanty a elektřinu nevedou. Vyjdeme z experimentálního faktu, že kapacita vzrůstá a pokusíme se vymyslet, co by se přitom mohlo dít. Uvažujme deskový kondenzátor s nějakými náboji na povrchu vodičů, řekněme se záporným nábojem na horní a s kladným nábojem na dolní elektrodě. Předpokládejme, že vzdálenost mezi elektrodami je d a plošný obsah každé elektrody je S . Jak jsme viděli už dříve, kapacita kondenzátoru je

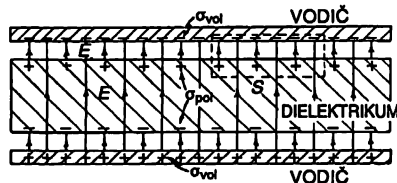
$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (10.1)$$

a náboj souvisí s napětím na kondenzátoru podle vztahu

$$Q = CU. \quad (10.2)$$

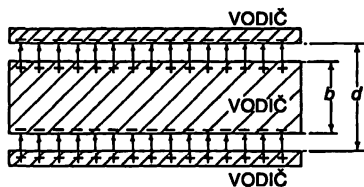
Experimentálním faktem je, že vložíme-li mezi desky kus izolantu, například skla nebo plexi-skla, zjistíme, že se kapacita zvětší. To ovšem znamená, že při téže náboji se napětí snížilo. Ale napětí je integrálem elektrického pole počítaným napříč kondenzátorem; musíme tedy udělat závěr, že uvnitř kondenzátoru se zeslabilo elektrické pole, i když náboje na deskách zůstávají nezměněny.

Jak je to možné? Máme větu, pocházející od Gausse, která nám říká, že tok elektrického pole uzavřenou plochou je v přímém vztahu s náboji uvnitř plochy. Uvažujme gaussovskou plochu S vyznačenou na obr. 10.1 čárkovaně. Protože elektrické pole se v přítomnosti dielektrika zeslabilo, usuzujeme, že celkový náboj uvnitř plochy musí být menší, než byl bez látky. Pak existuje jediný možný závěr a ten je, že na povrchu dielektrika musí sídlit kladné náboje. Protože se sice pole zeslabilo, ale ne na nulu, očekáváme, že tento kladný náboj je menší než záporný náboj na vodiči. Celý úkaz by bylo možné vysvětlit, kdybychom nějak uměli pochopit, proč se při umístění dielektrické látky do elektrického pole na jednom povrchu indukuje kladný a na druhém záporný náboj.



Obr. 10.1 Deskový kondenzátor s dielektrikem. Vyznačeny jsou siločáry elektrického pole E .

Něco takového bychom očekávali v případě vodiče. Mějme například kondenzátor se vzdáleností d mezi elektrodami a vložíme mezi ně neutrální vodič, jehož tloušťka je b (obr. 10.2). Elektrické pole indukuje kladný náboj na jeho horním povrchu a záporný náboj na jeho dolním povrchu, takže uvnitř vodiče pole není. Ve zbyvajícím prostoru je pole totéž, jako by bylo bez vodiče, neboť je rovno plošné hustotě náboje dělené ϵ_0 ; ale vzdálenost, přes kterou musíme integrovat, abychom dostali napětí (rozdíl potenciálů), se zmenšila.



Obr. 10.2 Vložíme-li mezi elektrody deskového kondenzátoru vodivou desku, indukované náboje zeslabí pole uvnitř vodiče na nulovou hodnotu.

Napětí je

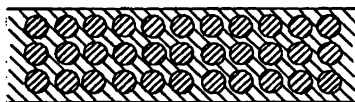
$$U = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (d - b).$$

Výsledný výraz pro kapacitu je stejný jako (10.1), ale d je nahrazeno rozdílem $(d - b)$

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d [1 - (b/d)]}. \quad (10.3)$$

Kapacita se zvětšila v poměru, jenž závisí na (b/d) , tj. na poměrné části objemu, kterou zaujal vodič.

To nám však poskytuje zřejmý model toho, co se děje s dielektrikou – uvnitř látky se nachází množství tenkých vodivých vrstev. S takovým modelem je však spojena jedna obtíž – má významnou osu, normálu kvrstvám, zatímco většina dielektrik takovou osu nemá. Ale tuto obtíž je možno vyloučit, uděláme-li předpoklad, že všechny izolační látky obsahují malé navzájem izolované vodivé koule, jak ukazuje *obr. 10.3*. Permittivita je vysvětlována působením nábojů, které by byly indukovány na každé kuličce. Je to jeden z prvních fyzikálních modelů dielektrika, použitých na vysvětlení jevu pozorovaného Faradayem. Konkrétněji řečeno, předpokládalo se, že každý z atomů látky je dokonalým vodičem, ale izolovaným od jiným atomů. Relativní permittivita ϵ_r bude záviset na tom, jakou část objemu zabírají vodivé koule. Dnes však tento model nepoužíváme.



Obr. 10.3 Model dielektrika: malé vodivé kuličky zapuštěné do idealizovaného izolátoru

10.2 VEKTOR ELEKTRICKÉ POLARIZACE P

Pokračujeme-li v naší analýze, přijdeme na to, že představa o oblastech s dokonalou vodivostí a izolací mezi nimi není podstatná. Každá z malých kuliček se chová jako dipól, jehož moment je indukován vnějším polem. Jediná věc, jež je pro pochopení dielektrik podstatná je ta, že v dielektrické látce je indukováno mnoho malých dipólů. To, zda se dipóly indukují proto, že existují vodivé malé kuličky, nebo z nějakého jiného důvodu, je bezvýznamné.

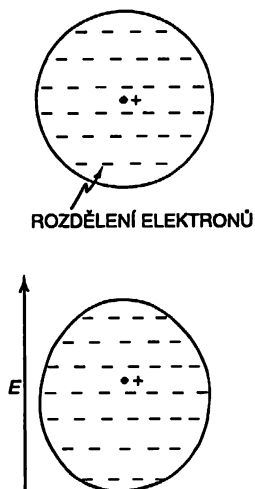
Proč by pole mělo v atomu indukovat dipólový moment, není-li atom vodivou koulí? O této otázce budeme mluvit mnohem podrobněji v následující kapitole, která bude věnována vnitřním procesům v dielektrických látkách. Zde však uvedeme jeden příklad, abychom ilustrovali možný mechanismus. Kladný náboj atomu je v jádře, jež je obklopeno zápornými elektrony. Orbity nebo vlnové balíčky elektronů (nebo jakékoliv zobrazení použité v kvantové mechanice) jsou v nějaké míře pokriveny (*obr. 10.4*); těžiště záporného náboje se posune a nebude už splývat s kladným nábojem jádra. My jsme už o takovém rozdělení náboje hovořili. Díváme-li se na něj z velké vzdálenosti, je taková neutrální konfigurace v prvním přiblížení ekvivalentní malému dipólu.

Asi je rozumné předpokládat, že není-li pole příliš silné, velikost indukovaného dipólového momentu bude přímo úměrná poli. Slabé pole tedy posune náboje jen o malý kousíček, zatímco silné pole je posune víc, a to přímo úměrně poli, jen když posunutí nebude příliš velké. Do konce této kapitoly budeme dipólový moment považovat za přesně přímo úměrný poli.

Dále budeme předpokládat, že v každém atomu jsou náboje q ve vzájemné vzdálenosti δ , takže $q\delta$ je elektrický dipólový moment připadající na jeden atom. (δ používáme proto, neboť d jsme už použili pro vzdálenost elektrod.) Je-li v jednotkovém objemu N atomů, bude *dipólový moment jednotkového objemu* roven $Nq\delta$. Tento elektrický dipólový moment připadající na jednotkový objem budeme označovat vektorem P . Není třeba zdůrazňovat, že leží ve směru jednotlivých dipólových momentů, tj. ve směru posunutí nábojů δ .

$$P = Nq\delta. \quad (10.4)$$

DIELEKTRIKA

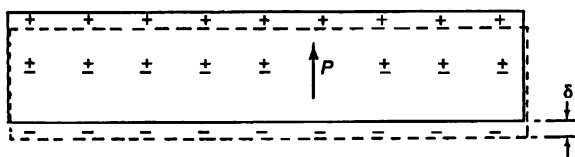


Obr. 10.4 Rozdělení elektronů v atomu nacházejícím se v elektrickém poli se vzhledem k jádru posune.

Obecně se bude P v dielektriku měnit od místa k místu. Ale v každém bodě látky je přímo úměrné elektrickému poli. Součinitel této úměrnosti je určen tím, jak snadno se elektron posune, a závisí na druhu atomů v látce.

O tom, co doopravdy určuje, jak se tento součinitel chová, jak přesně konstantní je ve velmi silných polích a co se děje uvnitř různých látek, budeme mluvit později. V této chvíli budeme prostě předpokládat, že existuje mechanismus, jímž se indukuje elektrický dipólový moment přímo úměrný elektrickému poli.

10.3 POLARIZAČNÍ NÁBOJE



Obr. 10.5 Dielektrická vrstva v homogenním poli. Kladné náboje jsou posunuty do vzdálenosti δ vzhledem k záporným.

Nyní prozkoumejme, co z tohoto modelu vyplývá pro teorii kondenzátoru vyplněného dielektrikem. Nejdříve uvažujeme destičku z látky, která má určitý elektrický dipólový moment připadající na jednotkový objem. Vznikne v důsledku toho v průměru nějaká hustota náboje v látce? Ne, je-li P homogenní. Mají-li kladné a záporné náboje po posunutí stejné hustoty náboje, z jejich posunutí nevzniká v objemu žádný výsledný náboj. Na druhé straně, kdyby P bylo v jednom místě větší a v druhém místě menší, znamenalo by to, že se do některé oblasti přesunulo více náboje, než se z ní vysunulo ven; tehdy bychom mohli očekávat nenulovou objemovou hustotu náboje. V případě deskového kondenzátoru předpokládáme, že P je homogenní, takže je nutné pro-

zkoumat pouze to, co se děje na povrchu. Na jednom povrchu se záporné náboje – elektrony efektivně vysunuly do vzdálenosti δ , zatímco na druhém povrchu se posunuly dovnitř a zanechaly určitý kladný náboj na vzdálenosti δ . Jak ukazuje *obr. 10.5*, na povrchu vznikne plošná hustota náboje, který budeme nazývat povrchovým *polarizačním nábojem*.

Tento náboj je možné vypočítat následujícím způsobem. Počet elektronů, které se objeví na povrchu destičky je roven součinu jejího plošného obsahu S , počtu elektronů v jednotkovém objemu N a posunutí δ , o němž zde předpokládáme, že nastane kolmo k povrchu. Výsledný náboj dostaneme vynásobením této hodnoty nábojem elektronu q_e . Abychom dostali plošnou hustotu polarizačního náboje indukovaného na povrchu, musíme výsledek dělit plošným obsahem S . Velikost plošné hustoty náboje tedy bude

$$\sigma_{\text{pol}} = Nq_e \delta.$$

To je však právě rovno velikosti P vektoru elektrické polarizace P , daného vztahem (10.4), tj.

$$\sigma_{\text{pol}} = P. \quad (10.5)$$

Plošná hustota náboje na povrchu látky je rovna elektrické polarizaci v jejím vnitřku. Povrchový náboj je samozřejmě kladný na jedné straně a záporný na opačné straně povrchu.

Dále předpokládáme, že naše deska představuje dielektrikum v rovinném kondenzátoru. Na elektrodách kondenzátoru se také nachází plošný náboj, jehož hustotu označíme σ_{vol} , neboť ve vodiči se náboje mohou „volně“ pohybovat. Jde, samozřejmě, o náboj, který jsme dodali při nabíjení kondenzátoru. Je nutné zdůraznit, že σ_{pol} existuje jen proto, že existuje σ_{vol} . Odstraní-li se vybitím kondenzátoru σ_{vol} , vymizí také σ_{pol} . Neodejde však vodičem, kterým se vybije kondenzátor, ale pohybem zpět dovnitř látky, a to rozptýlením polarizace uvnitř látky.

Nyní můžeme na gaussovskou plochu S , znázorněnou na *obr. 10.1*, použít Gaussův zákon. Elektrické pole E v dielektriku je rovno *celkové* plošné hustotě náboje dělené ϵ_0 . Je zřejmé, že σ_{pol} a σ_{vol} , mají opačná znaménka, takže

$$E = \frac{\sigma_{\text{vol}} - \sigma_{\text{pol}}}{\epsilon_0}. \quad (10.6)$$

Všimněte si, že pole E_0 mezi kovovou elektrodou a povrchem dielektrika je větší než pole E ; odpovídá pouze hustotě σ_{vol} . Zde se však zajímáme o pole uvnitř dielektrika. Vyplňuje-li dielektrikum téměř celou mezeru mezi elektrodami, je toto pole rozprostřeno prakticky v celém objemu uvnitř kondenzátoru. Použijeme-li vztah (10.5), můžeme napsat

$$E = \frac{\sigma_{\text{vol}} - P}{\epsilon_0}. \quad (10.7)$$

Z této rovnice se nemůžeme dovědět, jaké je elektrické pole, bez znalosti P . Zde však předpokládáme, že P závisí na E , konkrétně, že je přímo úměrné E . Tato přímá úměrnost se obvykle zapisuje takto:

$$P = \chi \epsilon_0 E \quad (10.8)$$

Konstanta χ (řecké „chí“) se nazývá *elektrická susceptibilita* dielektrika.

Potom vztah (10.7) nabude tvaru

$$E = \frac{\sigma_{\text{vol}}}{\epsilon_0} \frac{1}{1 + \chi}, \quad (10.9)$$

podle kterého se pole zmenšilo v poměru $1/(1 + \chi)$.

Napětí mezi elektrodami vyjadřuje integrál elektrického pole. Protože jde o homogenní pole, integrál je redukován na součin intenzity pole E a vzdálenosti d mezi elektrodami. Dostáváme

$$U = Ed = \frac{\sigma_{\text{vol}} d}{\epsilon_0 (1 + \chi)}.$$

Celkový náboj na kondenzátoru je $\sigma_{\text{vol}} S$, takže pro kapacitu definovanou vztahem (10.2) dostaneme vyjádření

$$C = \frac{\epsilon_0 S(1 + \chi)}{d} = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 S}{d}. \quad (10.10)$$

Vysvětlili jsme pozorovaná fakta. Vyplníme-li rovinný deskový kondenzátor dielektrikem, vzroste jeho kapacita ϵ_r -krát, přičemž

$$\epsilon_r = 1 + \chi \quad (10.11)$$

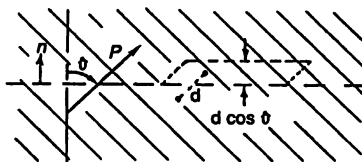
a charakterizuje vlastnosti látky. Je pravda, že naše vysvětlení nebude úplné, dokud nevysvětlíme (uděláme to později), jak dochází k polarizaci atomů.

Zabývejme se nyní něčím trochu složitějším – případem, kdy elektrická polarizace P není všude stejná. Jak jsme již řekli, není-li polarizace konstantní, je možné obecně očekávat nenulovou objemovou hustotu náboje, protože z jedné strany může do malého objemového elementu vejít více náboje, než z něj může na druhé straně vyjít. Jak zjistíme, kolik náboje do malého objemu přibýlo nebo se z něj ztratilo?

Nejdříve vypočítáme, jaký náboj projde myšlenou plochou při polarizaci látky. V případě, že polarizace má směr normály k ploše, množství náboje procházející plochou je rovno součinu Pa obsahu plochy. Samozřejmě, když má polarizace směr *tečný* k ploše, neprochází plochou žádný náboj.

Týmiž úvahami, které jsme již provedli, se snadno převědčtme, že náboj, jenž projde libovolným plošným elementem, je přímo úměrný složce vektoru P kolmé na plochu. Porovnejme obr. 10.6 s obr. 10.5. Vidíme, že vztah (10.5) je nutné obecně psát takto:

$$\sigma_{\text{pol}} = P \cdot n. \quad (10.12)$$



Obr. 10.6 Náboj, který prošel v dielektriku elementární myšlenou ploškou, je přímo úměrný složce vektoru P ve směru normály k ploše.

Máme-li na mysli plošný element *uvnitř* dielektrika, udává vztah (10.12) náboj, který prošel plochou, ale nevede k vzniku plošného náboje, neboť příspěvky od dielektrika jsou po obou stranách plochy stejné a mají opačná znaménka.

Posunutí nábojů však mohou vést ke vzniku objemové hustoty náboje. Celkový náboj vysunutý polarizací ven z nějakého objemu V je roven integrálu normálové složky vektoru P plochou S , která ohraničuje V (obr. 10.7). Stejně velký přebytek náboje opačného znaménka zůstane uvnitř. Označíme-li jej ΔQ_{pol} , bude platit

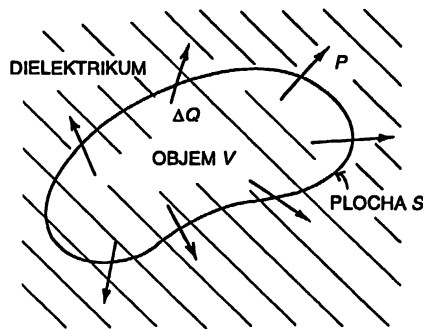
$$\Delta Q_{\text{pol}} = - \int_S P \cdot n \, dS. \quad (10.13)$$

ΔQ_{pol} můžeme vyjádřit pomocí objemového rozdělení náboje s hustotou ρ_{pol}

$$\Delta Q_{\text{pol}} = \int_V \rho_{\text{pol}} \, dV. \quad (10.14)$$

Z rovnosti pravých stran obou těchto výrazů vyplývá

$$\int_V \rho_{\text{pol}} \, dV = - \int_S P \cdot n \, dS. \quad (10.15)$$



Obr. 10.7 Nehomogenní polarizace P může vést ke vzniku náboje v objemu dielektrika.

Dostali jsme něco jako Gaussovu větu, která uvádí do souvislosti hustotu náboje v polarizovaných látkách a vektor elektrické polarizace P . Můžeme se přesvědčit, že souhlasí s výsledkem, který jsme dostali pro povrchový polarizační náboj nebo pro dielektrikum v deskovém kondenzátoru. Aplikujeme-li rovnici (10.15) na gaussovskou plochu z obr. 10.1, bude plošný integrál roven $P \Delta S$ a náboj uvnitř plochy bude $\sigma_{\text{pol}} \Delta S$, takže opět dostáváme $\sigma = P$.

Stejně jako v případě elektrostatického Gaussova zákona můžeme i rovnici (10.15) transformovat na diferenciální tvar použitím Gaussovy věty z matematiky:

$$\int_S P \cdot n \, dS = \int_V \nabla \cdot P \, dV.$$

Dostaneme

$$\rho_{\text{pol}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (10.16)$$

Je-li polarizace nehomogenní, dává její divergence výslednou hustotu náboje vznikající v látce. Zdůrazňujeme, že jde o naprosto *reálnou* hustotu náboje; „polarizačním nábojem“ jej nazýváme proto, abychom připomněli, odkud se vzal.

10.4 ELEKTROSTATICKÉ ROVNICE PRO DIELEKTRIKA

Nyní už spojme uvedený výsledek s naší elektrostatickou teorií. Základní rovnice je

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (10.17)$$

kde ρ je hustota *všech* elektrických nábojů. Protože není snadné sledovat polarizační náboje, je vhodné rozdělit ρ na dvě části. Opět budeme jako ρ_{pol} označovat náboje vyvolané nehomogenní polarizací a jako ρ_{vol} všechny ostatní náboje. Obvykle představuje ρ_{vol} náboj, který jsme přivedli na vodiče, nebo náboj, který je v prostoru rozdělen známým způsobem. Rovnice (10.17) pak získá tvar

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{vol}} + \rho_{\text{pol}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{\text{vol}} - \nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0}$$

resp.

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right) = \frac{\rho_{\text{vol}}}{\epsilon_0}. \quad (10.18)$$

Rovnice pro $\text{rot } \mathbf{E}$ se, přirozeně, nemění, tj.

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (10.19)$$

Dosadíme-li \mathbf{P} ze vztahu (10.8), dostaneme jednodušší rovnici

$$\nabla \cdot [(1 + \chi) \mathbf{E}] = \nabla \cdot (\epsilon_r \mathbf{E}) = \frac{\rho_{\text{vol}}}{\epsilon_0}. \quad (10.20)$$

To jsou rovnice elektrostatiky pro dielektrika. Přirozeně, neřekají nic nového, jsou pouze v takovém tvaru, který je vhodnější pro výpočet v případech, kdy ρ_{vol} je známé a vektor polarizace \mathbf{P} je přímo úměrný poli \mathbf{E} .

Všimněte si, že relativní permitivitu ϵ_r jsme nevytkli před symbol divergence. Je to proto, že nemusí být všude stejná. Má-li všude stejnou hodnotu, může být vytknuta jako součinitel a naše rovnice budou přesně takové, jaké jsme měli v elektrostatice, pouze hustota náboje bude vydělena hodnotou ϵ_r . Ve tvaru, ve kterém jsme je uvedli, se hodí pro obecný případ, kdy se na různých místech v poli mohou nacházet různá dielektrika. Může se však stát, že tyto rovnice potom budou jen obtížně řešitelné.

Je třeba se zde zmínit o jedné okolnosti důležité z historického hlediska. V prvním období nauky o elektřině nebyl znám atomový mechanismus polarizace a o existenci ρ_{pol} se nevědělo. Náboj ρ_{vol} byl pokládán za celkovou hustotu nábojů. Aby se Maxwellovy rovnice mohly psát v jednoduchém tvaru, byl definován nový vektor D rovnající se lineární kombinaci vektorů E a P .

$$D = \varepsilon_0 E + P. \quad (10.21)$$

V důsledku toho se rovnice (10.18) a (10.19) psaly ve zdánlivě jednoduchém tvaru:

$$\nabla \cdot D = \rho_{\text{vol}}, \quad \nabla \times E = 0. \quad (10.22)$$

Lze je řešit? Pouze je-li udána i třetí rovnice, vyjadřující vztah mezi D a E . Platí-li (10.18), je tento vztah

$$D = \varepsilon_0 (1 + \chi) E = \varepsilon_r \varepsilon_0 E. \quad (10.23)$$

Tato rovnice byla obvykle psána ve tvaru

$$D = \varepsilon E, \quad (10.24)$$

kde ε představuje další konstantu popisující elektrické vlastnosti látek. Nazývá se *permitivita*. (Nyní vidíte, proč v našich rovnicích vystupuje ε_0 – jako permitivita vakua). Zřejmě

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 = (1 + \chi) \varepsilon_0. \quad (10.25)$$

Dnes se na tyto záležitosti díváme z jiného hlediska. Pro vakuum totiž bereme jednodušší rovnice, a započteme-li v každém případě všechny náboje bez ohledu na jejich původ, budou tyto rovnice platit vždy. Oddělíme-li některé z nábojů ať už pro pohodlnost nebo proto, že nehodláme detailně zkoumat, co se děje, můžeme, chceme-li, psát naše rovnice v jakémkoliv jiném tvaru.

Ještě jednu věc je třeba zdůraznit. Rovnice typu $D = \varepsilon E$ představuje pokus popsat vlastnosti látky. Ale látka je krajně složitá a takováto rovnice ve skutečnosti není správná. Například, bude-li E příliš velké, přestane být D přímo úměrné E . Pro některé látky přestává přímá úměrnost už při poměrně malých polích. Kromě toho „konstanta“ úměrnosti může záviset na tom jak rychle se E mění v čase. Proto rovnice takového typu představuje jakousi aproximaci podobně jako Hookův zákon. Nemůže to být hluboká a fundamentální rovnice. Naproti tomu naše základní rovnice pro E (10.17) a (10.19) vyjadřují naše nejhlubší a nejúplnější pochopení elektrostatiky.

10.5 POLE A SÍLY V PŘÍTOMNOSTI DIELEKTRIK

Nyní dokážeme některé dost obecné věty elektrostatiky pro takové situace, v nichž se vyskytují i dielektrika. Viděli jsme, že když se prostor mezi elektrodami deskového kondenzátoru vyplní dielektrikem, kapacita kondenzátoru se v určitém poměru zvětší. Lze ukázat, že to platí pro kondenzátor *každého* tvaru za předpokladu, že celý prostor v okolí obou vodičů je vyplněn homogenním lineárním dielektrikem. V případě bez dielektrika je třeba řešit tyto rovnice

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_0 = \frac{\rho_{\text{vol}}}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{E}_0 = 0.$$

V přítomnosti dielektrika se první z těchto rovnic změní, a budeme tedy mít rovnice

$$\nabla \cdot (\epsilon_r \mathbf{E}) = \frac{\rho_{\text{vol}}}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (10.26)$$

Protože ϵ_r považujeme všude za stejné, je možné je zapsat takto:

$$\nabla \cdot (\epsilon_r \mathbf{E}) = \frac{\rho_{\text{vol}}}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times (\epsilon_r \mathbf{E}) = 0. \quad (10.27)$$

Pro veličinu $\epsilon_r \mathbf{E}$ máme proto stejné rovnice jako pro \mathbf{E}_0 , jejich řešením je tedy $\epsilon_r \mathbf{E} = \mathbf{E}_0$. Jinými slovy, pole bude všude slabší v poměru $1/\epsilon_r$ vzhledem k tomu, jaké by bylo bez dielektrika. Jelikož rozdíl potenciálů je křivkovým integrálem intenzity pole, v tomtéž poměru se zmenší i napětí. Protože náboj na elektrodách kondenzátoru se bral v obou případech stejný, ze vztahu (10.2) vyplývá, že kapacita kondenzátoru se všude homogenním dielektrikem vzroste ϵ_r -krát.

Nyní se zeptejme, jaká síla působí mezi dvěma nabitými vodiči v dielektriku. Uvažujme tekuté dielektrikum, které je všude homogenní. Už jsme viděli, že jeden způsob, jak dostat sílu, je derivovat energii podle vhodné vzdálenosti. Mají-li vodiče stejně velké opačné náboje, je energie $W = Q^2/2C$, kde C je jejich kapacita. Podle principu virtuální práce je každá složka síly dána derivací, například

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{Q^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{C} \right). \quad (10.28)$$

Protože dielektrikum zvětšuje kapacitu ϵ_r -krát, musíme všechny síly *zmenšit* ve stejném poměru.

Je třeba zdůraznit jednu věc. Co jsme řekli platí pouze tehdy, když je dielektrikum tekutina. Každý pohyb vodičů zapuštěných v pevném dielektriku mění podmínky pro vznik mechanických napětí v dielektriku, jeho elektrické vlastnosti a vyvolává i změnu mechanické energie dielektrika. Pohyb vodičů v tekutině nemění tekutinu. Tekutina se sice přemístí na nové místo, ale její elektrické charakteristiky se nezmění.

Mnohé starší knihy o elektřině vycházejí ze „základního“ zákona, že síla působící mezi dvěma náboji je

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2}. \quad (10.29)$$

Toto hledisko je naprosto neuspokojivé. Zaprvé, tento zákon neplatí obecně; platí pouze ve světě zaplněném tekutinou. Za druhé, závisí na skutečnosti, že ϵ_r je konstanta, což pro většinu reálných látek platí pouze přibližně. Je mnohem lepší začít Coulombovým zákonem pro náboje ve *vakuu*, který je správný vždy (pro nepohybující se náboje).

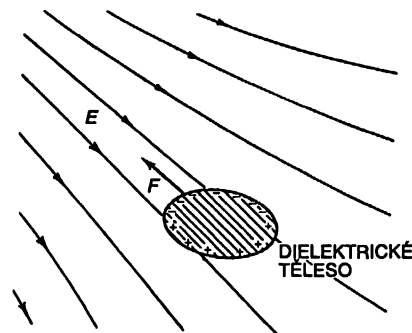
Co se stane v pevné látce? To je velmi obtížný problém, který není vyřešen, neboť je v určitém smyslu neurčitý. Vkládáte-li náboje dovnitř pevného dielektrika, vznikají mnohé tlaky a napětí. Nemůžete tedy pracovat s virtuální prací, aniž byste zahrnuli i mechanickou energii potřebnou

na stlačení pevné látky. Obecně je však těžké jednoznačně rozlišit elektrické síly od mechanických sil vyvolaných samotnou pevnou látkou. Naštěstí, ve skutečnosti nikdo nikdy nepotřebuje znát odpověď na námi položenou otázku. Někdy je snad třeba znát velikost napětí vznikajících v pevné látce a to lze spočítat. Je to však mnohem složitější než jednoduchý výsledek, který jsme dostali pro tekutiny.

V teorii dielektrik je překvapivě složitý následující problém: Proč nabitě těleso přitahuje malé kousky dielektrika? Když si v suchý den pročesáte vlasy, hřeben ihned přitáhne malé útržky papíru. Pokud jste o tom přemýšleli povrchně, pravděpodobně vás napadlo, že na hřebeni je náboj jednoho druhu, zatímco papír má náboj opačný. Ale papír byl původně elektricky neutrální. Nemá žádný zbytkový náboj, ale i tak je přitahován. Je pravda, že někdy papírek přiskočí k hřebenu a potom odskočí, odpuzen okamžitě, jakmile se hřebene dotkl. Příčina je, samozřejmě, v tom, že když se papírek dotkne hřebene, přibere nějaké záporné náboje a stejné náboje se pak odpuzují. Ale to není odpověď na původní otázku. Proč papírek přiskočí k hřebeni poprvé?

Můžeme to vysvětlit polarizací dielektrika, nacházejícího se v elektrickém poli. Vznikají polarizační náboje obou znamének, které jsou hřebenem přitahovány, resp. odpuzovány. Výsledkem však bude přitahování, protože blíže k hřebenu je pole silnější než dále od něj – hřeben není nekonečnou rovinou. Jeho náboj je lokalizovaný. Neutrální kousek papíru se nepřitáhne ani k jedné z elektrod rovinného kondenzátoru. Nehomogenita pole představuje podstatnou část mechanismu přitahování.

Jak ukazuje *obr. 10.8*, je dielektrikum vždy přitahováno z oblasti se slabým polem do oblasti se silnějším polem. Je možné dokázat, že pro malá tělesa je síla přímo úměrná gradientu druhé mocniny intenzity elektrického pole. Proč závisí na druhé mocnině intenzity pole? Protože indukované polarizační náboje jsou přímo úměrné poli a pro dané náboje jsou síly přímo úměrné poli. Ale jak jsme právě naznačili, bude výsledná síla nenulová pouze tehdy, když se druhá mocnina pole od bodu k bodu mění. Součinitel úměrnosti obsahuje mezi jiným permitivitu tělesa a závisí i na velikosti a tvaru tělesa.

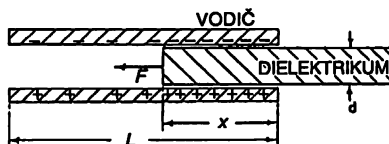


Obr. 10.8 V nehomogenním poli působí na dielektrické těleso síla směřující do prostoru s vyšší intenzitou pole.

Existuje příbuzná úloha, v níž je možné vypočítat sílu působící na dielektrikum zcela přesně. Máme-li deskový kondenzátor s dielektrickou destičkou vsunutou mezi elektrody pouze částečně (*obr. 10.9*), vznikne síla vtahující dielektrikum dovnitř. Podrobné prozkoumání této síly je velmi složité; souvisí s nehomogenitami pole v blízkosti hran dielektrika a elektrod. Ale odhlédneme-li

od těchto detailů a použijeme pouze princip zachování energie, můžeme sílu jednoduše vypočítat. Najdeme ji ze vzorce, který jsme už odvodili dříve. Vztah (10.28) je ekvivalentní se vztahem

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} = +\frac{U^2}{2} \frac{\partial C}{\partial x}. \quad (10.30)$$



Obr. 10.9 Sílu působící v deskovém kondenzátoru na dielektrickou destičku můžeme vypočítat použitím principu zachování energie.

Potřebujeme pouze zjistit, jak se kapacita mění v závislosti na poloze dielektrické destičky.

Předpokládejme, že celková délka elektrod je L , jejich šířka je w , jejich vzájemná vzdálenost, jakož i tloušťka dielektrika je d a vzdálenost, do které bylo dielektrikum zasunuto, je x . Kapacita představuje poměr celkového volného náboje na elektrodách k napětí mezi nimi. Viděli jsme, že pro dané napětí U je plošná hustota volného náboje $\epsilon_r \epsilon_0 U/d$. Celkový náboj na elektrodách tedy je

$$Q = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 U}{d} xw + \frac{\epsilon_0 U}{d} (L - x)w,$$

odkud pro kapacitu vyplývá vzorec

$$C = \frac{\epsilon_0 w}{d} (\epsilon_r x + L - x). \quad (10.31)$$

Použijeme-li vztah (10.30), dostaneme

$$F_x = \frac{U^2}{2} \frac{\epsilon_0 w}{d} (\epsilon_r - 1). \quad (10.32)$$

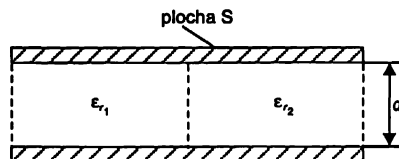
Tato rovnice nemá zvláštní význam, pouze potřebujete-li náhodou znát sílu právě v takových podmínkách. Chtěli jsme tu jen ukázat, že pojem energie lze často využít k tomu, abychom se vyhnuli ohromným komplikacím při určování sil působících na dielektrické látky (jak by to bylo v daném případě).

Náš výklad teorie dielektrik se týkal pouze elektrických jevů, přičemž jsme přijímali jako fakt, že polarizace látky je přímo úměrná elektrickému poli. Pro fyziku je asi zajímavější zkoumat, proč existuje taková přímá úměrnost. Pochopíme-li z atomového hlediska mechanismus původu permitivity, můžeme elektrická měření permitivit prováděná v různých podmínkách využít k získání podrobné informace o atomové nebo molekulové struktuře. O tomto aspektu se bude částečně hovořit v následující kapitole.

PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 10.1 ■ Prostor mezi deskami rovinného kondenzátoru je zaplněn dielektrikem rozděleným na dvě poloviny týchž rozměrů, ale s různou relativní permitivitou (viz obrázek). Ukažte, že kapacita takového kondenzátoru je

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \frac{\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}}{2}.$$



- 10.2 ■ Vzdálenost mezi elektrodami rovinného kondenzátoru s deskami čtvercového tvaru obsahu 400 cm^2 je 1 cm . Pomocí elektrické baterie se kondenzátor nabije na napětí 10 V a pak je odpojen. Pak je mezi elektrody zasunuta široká dielektrická deska tloušťky jen málo menší než 1 cm tak, že zakryje plochu $10 \times 20 \text{ cm}^2$ (viz obrázek). Relativní permitivita desky je rovna 4 .

- Jakou silou se přitahují elektrody kondenzátoru?
- Čemu je roven dipólový moment jednotky objemu dielektrika v kondenzátoru dostatečně daleko od krajů?
- Předpokládejte, že uvnitř dielektrika jsou rovnoměrně rozloženy malé kovové kuličky. Bude napětí na elektrodách větší, menší nebo stejné jako v případě homogenního dielektrika?



- 10.3 ■ Kapacita deskového kondenzátoru se vzduchovou mezerou tloušťky d je C_0 . Pak je mezi elektrody zasunuta dielektrická destička tloušťky $t < d$ s relativní permitivitou ϵ_r . Destička má plochu rovnou ploše elektrod a je zasunuta rovnoběžně s nimi. Zanedbáte-li okrajové jevy, ukažte, že kapacita kondenzátoru bude rovna

$$C = \frac{C_0}{1 - [(\epsilon_r - 1)/\epsilon_r](td)}$$

- 10.4 ■ Izolovaná kovová koule poloměru a je nabitá nábojem Q . Povrch koule je rovnoměrně pokryt vrstvou dielektrika s vnějším poloměrem b .

- Určete povrchový náboj indukovaný na vnitřním a vnějším povrchu dielektrika.
- Zjistěte, čemu je rovna hustota indukovaného náboje v objemu dielektrika.

- 10.5 ■ Deskový kondenzátor je připojen k elektrické baterii, která na jeho elektrodách udržuje napětí U_0 . Do mezery mezi elektrodami je zasunuta dielektrická destička s relativní permitivitou ϵ_r tak, že mezera je zcela vyplněna.

- Ukažte, že baterie přitom vykoná práci $q_0 U_0 (\epsilon_r - 1)$, kde q_0 je náboj kondenzátoru před jeho zaplněním dielektrikem.
- Jakou práci při zasouvání destičky vykonají vnější mechanické síly? Je tato práce kladná nebo záporná?

- 10.6 ■ Dvě koaxiální trubky s poloměry $a < b$ jsou svisle ponořeny do olejové vany. Relativní permitivita oleje je ϵ_r . Ukažte, že je-li mezi trubkami napětí U , vystoupí v nich olej do výšky

$$h = \frac{2U^2(\epsilon_r - 1)\epsilon_0}{\ln(b/a)\rho(b^2 - a^2)g}$$

- 10.7 ■ Ukažte, že siločáry elektrického pole, které procházejí rozhraním dvou dielektrik s relativními permitivitami ϵ_{r1} a ϵ_{r2} svírají s normálou k rozhraní úhly ϑ_1 a ϑ_2 vázané vztahem $\epsilon_{r1} \cotg \vartheta_1 = \epsilon_{r2} \cotg \vartheta_2$.

Vnitřní stavba dielektrik

11.1 MOLEKULOVÉ DIPÓLY

11.2 ELEKTRONOVÁ POLARIZACE

11.3 POLÁRNÍ MOLEKULY. ORIENTAČNÍ POLARIZACE

11.4 ELEKTRICKÁ POLE V DUTINÁCH DIELEKTRIKA

11.5 PERMITIVITA KAPALIN.

CLAUSIOVA-MOSOTTIOVA ROVNICE

11.6 PEVNÁ DIELEKTRIKA

11.7 FEROELEKTŘINA. BaTiO_3

11.1 MOLEKULOVÉ DIPÓLY

Přečtěte si znovu: kapitolu 31, díl 2, Původ indexu lomu
kapitolu 40, díl 2, Principy statistické mechaniky

V této kapitole budeme hovořit o tom, proč jsou látky dielektrické. V předcházející kapitole jsme řekli, že vlastnostem elektrických soustav s dielektriky můžeme porozumět, pochopíme-li, jak elektrické pole působící na dielektrikum indukuje v atomech dipólový moment. Jmenovitě, indukuje-li elektrické pole E v jednotce objemu střední dipólový moment P , určuje relativní permitivitu ϵ_r vztah

$$\epsilon_r - 1 = \frac{P}{\epsilon_0 E}. \quad (11.1)$$

Už jsme diskutovali o tom, jak se tato rovnice používá: nyní se musíme zmínit o mechanismu vzniku polarizace, je-li uvnitř látky elektrické pole. Začněme s nejjednodušším možným příkladem, a to s polarizací plynů. Ale už i s plyny jsou komplikace, neboť existují dva druhy plynů.

Molekuly některých plynů, jako například kyslíku, jehož každá molekula se skládá ze souměrného páru atomů, nemají žádný vlastní dipólový moment. Ale molekuly jiných plynů, jako například vodní páry (s nesouměrným uspořádáním vodíkových a kyslíkových atomů v molekule), se vyznačují permanentním elektrickým dipólovým momentem. Jak jsme ukázali v kapitolách 6 a 7, sídlí v molekule vodní páry kladný náboj v průměru na vodíkových atomech a záporný náboj na kyslíku. Protože těžiště záporného náboje nesplyvá s těžištěm kladného náboje, má výsledné rozložení náboje v molekule dipólový moment. Taková molekula se nazývá *polární*. V molekule kyslíku O_2 jsou v důsledku její souměrnosti těžiště kladného a záporného náboje totožné – jde o *nepolární* molekulu. Umístíme-li ji však do elektrického pole, stane se dipólem. Tvary obou druhů molekul jsou znázorněny na obr. 11.1.



Obr. 11.1 a) Molekula kyslíku s nulovým dipólovým momentem.
b) Molekula vody má permanentní dipólový moment p_0 .

11.2 ELEKTRONOVÁ POLARIZACE

Nejdříve se budeme zabývat polarizací nepolárních molekul. Můžeme začít s nejjednodušším případem jednoatomového plynu (například héliem). Nacházejí-li se atomy takového plynu v elektrickém poli, přitahuje pole elektrony na jednu a jádru na druhou stranu (obr. 10.4). Ačkoliv vzhledem k elektrickým silám, které je možno vyvinout v experimentech, se atomy jeví jako velmi pevné, přece dochází k nepatrnému výslednému posunu těžišť nábojů a indukuje se dipólový moment. Ve slabých polích je velikost posunu, jakož i dipólový moment, přímo úměrné intenzitě elektrického pole. Posunutí rozdělení elektronů v atomu, vedoucí k tomuto druhu indukovaného dipólového momentu, se nazývá *elektronová polarizace*.

O účinku elektrického pole na atom jsme hovořili už v 31. kapitole 1. dílu, když jsme se zabývali teorií indexu lomu. Když o tom trochu popřemýšlíte, přijdete na to, že nyní musíme dělat totéž, co jsme dělali tehdy. Tentokrát si však potřebujeme všimnout pouze polí, která se v čase nemění, zatímco index lomu určovala pole měnící se s časem.

V 31. kapitole 1. dílu jsme předpokládali, že nachází-li se atom v kmitavém elektrickém poli, řídí se pohyb těžiště náboje elektronů rovnicí

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m \omega_0^2 x = q_e E. \quad (11.2)$$

První člen představuje součin hmotnosti elektronu a jeho zrychlení, druhý člen je zpětná síla a na pravé straně vystupuje síla pocházející od vnějšího elektrického pole. Mění-li se toto pole s úhlovou frekvencí ω , má rovnice (11.2) řešení

$$x = \frac{q_e E}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (11.3)$$

jehož rezonance nastává při $\omega = \omega_0$. Když jsme našli toto řešení poprvé, interpretovali jsme jej tak, že ω_0 představuje úhlovou frekvenci, při níž se světlo (ve viditelné nebo ultrafialové oblasti, podle druhu atomu) pohlcuje. Pro naše účely nás však zajímá pouze případ neměnných polí, tj. $\omega = 0$, takže první člen na levé straně (11.2) můžeme vypustit z úvah a najdeme, že posunutí je

$$x = \frac{q_e E}{m\omega_0^2}. \quad (11.4)$$

Z tohoto výsledku vidíme, že dipólový moment p jednotlivého atomu je určen vztahem

$$p = q_e x = \frac{q_e^2 E}{m\omega_0^2}. \quad (11.5)$$

Dipólový moment p je v této teorii opravdu přímo úměrný elektrickému poli.

Obvykle se píše

$$p = \alpha \varepsilon_0 E \quad (11.6)$$

(ε_0 je zde vloženo opět z historických důvodů.) Součinitel α se nazývá *polarizovatelnost* atomu a má rozměr L^3 . Je mírou toho, jak snadno lze v atomu elektrickým polem indukovat dipólový moment. Na základě porovnání vztahů (11.5) a (11.6) z naší jednoduché teorie vyplývá

$$\alpha = \frac{q_e^2}{\varepsilon_0 m\omega_0^2} = \frac{4\pi e^2}{m\omega_0^2}. \quad (11.7)$$

Nachází-li se v jednotce objemu N atomů, elektrická polarizace P , tj. elektrický dipólový moment připadající na jednotku objemu, je dán vztahem

$$P = Np = N\alpha \varepsilon_0 E. \quad (11.8)$$

Dosadíme-li tento vztah do (11.1), dostaneme, že

$$\varepsilon_r - 1 = \frac{P}{\varepsilon_0 E} = N\alpha, \quad (11.9)$$

nebo využijeme-li vztahu (11.7),

$$\varepsilon_r - 1 = \frac{4\pi N e^2}{m\omega_0^2}. \quad (11.10)$$

Z výsledku (11.10) je možno předpovědět, že permitivita různých plynů bude záviset na hustotě plynu a na jeho rezonanční úhlové frekvenci ω_0 .

Náš vzorec představuje, samozřejmě, pouze velmi hrubou aproximaci, neboť v rovnici (11.2) jsme použili model, který nebere v úvahu kvantověmechanické efekty. Například jsme předpokládali, že atom má pouze jednu rezonanční frekvenci, zatímco ve skutečnosti jich má mnoho. Abychom polarizovatelnost atomů α vypočítali správně, museli bychom použít důslednou kvantověmechanickou teorii. Ale klasický model, který jsme uvedli, nám pro ni poskytuje přiměřený odhad.

Podívejme se, zda z našeho výsledku můžeme dostat řádově správnou hodnotu permitivity nějaké látky. Zkusme například vodíkový atom. Kdysi (38. kapitola 1. dílu) jsme zjistili, že energie potřebná k ionizaci vodíkového atomu bude přibližně

$$E \approx \frac{1}{2} \frac{m e^4}{\hbar^2}. \quad (11.11)$$

Abychom získali odhad vlastní úhlové frekvence ω_0 , můžeme položit tuto energii rovnu $\hbar\omega_0$ tj. energii atomového oscilátoru, jehož vlastní frekvence je ω_0 . Dostaneme

$$\omega_0 \approx \frac{1}{2} \frac{m e^4}{\hbar^3}.$$

Dosadíme-li tuto hodnotu ω_0 do vztahu (11.7), vyplyne pro elektronovou polarizovatelnost α vztah

$$\alpha \approx 16\pi \left[\frac{\hbar^2}{m e^2} \right]^3. \quad (11.12)$$

Veličina $(\hbar^2/m e^2)$ je poloměr orbity elektronu v základním stavu Bohrova atomu (38. kapitola 1. dílu) a je rovna 0,0529 nm. V plynu při normálním tlaku a teplotě (101325 Pa a 0 °C) je $2,69 \cdot 10^{25}$ atomů/m³, takže ze vztahu (11.9) dostaneme

$$\epsilon_r = 1 + 2,69 \cdot 10^{25} \cdot 16 \cdot \pi \cdot (0,0529 \cdot 10^{-9})^3 = 1,00020. \quad (11.13)$$

Naměřená permitivita vodíku je

$$(\epsilon_r)_{\text{exp}} = 1,00026.$$

Vidíme, že naše teorie je téměř správná. Lepší shodu jsme ani nemohli očekávat, neboť měření se, samozřejmě, prováděla s normálním vodíkovým plynem, který se skládá z dvojjatomových molekul a ne z jednotlivých atomů. Neměli bychom se divit, kdyby polarizace atomů v molekule nebyla zcela tatáž jako v případě oddělených atomů. Molekulový efekt však není tak velký. Přesný kvantověmechanický výpočet α pro vodíkové atomy dává výsledek asi o 12 % větší než vzorec (11.12) (místo 16π by mělo být 18π), a proto předpovídá permitivitu o něco blíže naměřené hodnotě. V každém případě je jasné, že náš model dielektrika je dost dobrý.

Jiný test naší teorie spočívá v prověření vztahu (11.12) na atomech s vyšší frekvencí excitace. Například je zapotřebí asi 24,5 eV, aby byl vytržen elektron z hélia narozdíl od 13,5 eV potřebných

k ionizaci vodíku. Můžeme proto čekat, že v případě hélia bude absorpční frekvence ω_0 asi dvakrát vyšší než u vodíku a α se zmenší na čtvrtinu. Očekáváme tedy

$$(\epsilon_r)_{\text{hélium}} \approx 1,000050.$$

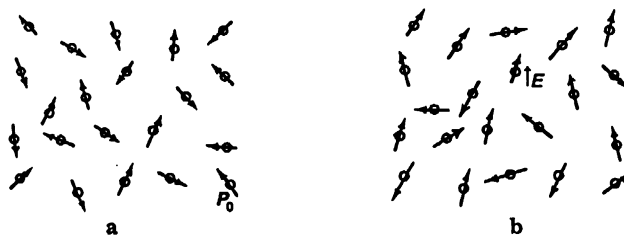
Experimentálně se zjistilo

$$(\epsilon_r)_{\text{hélium}} \approx 1,000068,$$

takže vidíte, že naše hrubé odhady jsou na správné stopě. Pochopili jsme tedy permitivitu nepolárního plynu, ale pouze kvalitativně, neboť zatím jsme nepoužili korektní teorii pohybu atomových elektronů.

11.3 POLÁRNÍ MOLEKULY. ORIENTAČNÍ POLARIZACE

Dále budeme uvažovat molekulu, která se vyznačuje stálým elektrickým dipólovým momentem, například molekulu vody. Není-li přítomno elektrické pole, mají jednotlivé dipóly náhodné směry, takže sumární dipólový moment je v jednotce objemu roven nule. Aplikuje-li se elektrické pole, stanou se dvě věci. Zaprvé, silami působícími na elektrony je indukován dodatečný dipólový moment; tato část způsobuje elektronovou polarizaci téhož druhu jako pro nepolární molekuly. Při velmi přesných úvahách je třeba tento efekt vzít v úvahu, ale nyní jej zanedbáme. (Vždy je možné přidat jej na konci.) Za druhé, elektrické pole má tendenci uspořádat jednotlivé dipóly a vytvořit tak nenulový výsledný moment v jednotce objemu. Kdyby byly všechny dipóly v plynu uspořádány, byla by polarizace velmi velká. To se však nestane. Při obvyklých teplotách a elektrických polích srážky molekul při tepelném pohybu znemožňují jejich příliš dokonalé uspořádání. Ale k určitému výslednému zorientování molekul a tím i k určité polarizaci dojde (obr. 11.2). Polarizaci, která při tom nastává, můžeme počítat metodami statistické mechaniky, jež jsme popsali ve 40. kapitole 1. dílu.



Obr. 11.2 a) V plynu skládajícím se z polárních molekul jsou jednotlivé dipólové momenty orientovány náhodně; střední dipólový moment v nevelkém objemu je roven nule.
b) Při působení elektrického pole existuje nějaká střední orientace molekul

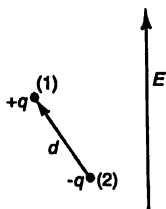
Abychom mohli tuto metodu použít, je nutné znát energii dipólu v elektrickém poli. Uvažujme elektrický dipól s momentem \vec{p}_0 v elektrickém poli (obr. 11.3). Kladný náboj má energii $q\varphi(1)$ a energie záporného náboje je $-q\varphi(2)$. Energie dipólu je tedy

$$W = q\varphi(1) - q\varphi(2) = q\vec{d} \cdot \nabla\varphi$$

resp.

$$W = -\boldsymbol{p}_0 \cdot \boldsymbol{E} = -p_0 E \cos \vartheta, \quad (11.14)$$

kde ϑ je úhel mezi \boldsymbol{p}_0 a \boldsymbol{E} . Jak jsme čekali, je tato energie nižší, jsou-li dipóly seřazeny ve směru pole.



Obr. 11.3 Energie dipólu \boldsymbol{p}_0 v poli \boldsymbol{E} je rovna $-\boldsymbol{p}_0 \cdot \boldsymbol{E}$

Použitím metod statistické mechaniky nyní najdeme, v jaké míře dochází k uspořádání dipólů. V 40. kapitole 1. dílu jsme zjistili, že poměrný počet molekul s potenciální energií W je ve stavu tepelné rovnováhy přímo úměrný veličině

$$e^{-W/kT},$$

kde $W(x, y, z)$ je potenciální energie jako funkce polohy. Na základě stejných úvah by se zjistilo, že použijeme-li pro potenciální energii jako funkci úhlu vztah (11.14), je počet molekul odkloněných o úhel ϑ , přepočtený na jednotkový prostorový úhel, přímo úměrný veličině $e^{-W/kT}$.

Nechť $n(\vartheta)$ znamená počet molekul odkloněných o úhel ϑ , připadajících na jednotkový prostorový úhel. Potom

$$n(\vartheta) = n_0 e^{-p_0 E \cos \vartheta / kT}. \quad (11.16)$$

Pro běžné teploty a pole je mocnina v (11.16) malý, takže můžeme mocninu rozvinout do řady a aproximovat prvními dvěma členy

$$n(\vartheta) = n_0 \left(1 + \frac{p_0 E \cos \vartheta}{kT} \right). \quad (11.17)$$

Hodnotu n_0 najdeme, zintegrujeme-li (11.17) přes všechny úhly: výsledek musí dát N , tj. celkový počet molekul v jednotce objemu. Střední hodnota $\cos \vartheta$ přes všechny úhly je rovna nule, takže integrál je roven součinu n_0 a plného prostorového úhlu 4π . Dostáváme, že

$$n_0 = \frac{N}{4\pi}. \quad (11.18)$$

Z (11.17) je vidět, že ve směru pole ($\cos \vartheta = 1$) bude orientováno víc molekul než proti poli ($\cos \vartheta = -1$). Proto v každém malém objemu obsahujícím mnoho molekul vznikne nenulový dipólový moment připadající na jednotku objemu, tj. elektrická polarizace P . Abychom vypočetili P , musíme vytvořit vektorový součet momentů všech molekul v jednotce objemu. Protože víme,

že výsledný vektor bude ležet ve směru E , budeme počítat pouze složky momentů v tomto směru (složky kolmé na E dají součet rovný nule):

$$P = \sum_{\text{jednotka}} p_0 \cos \vartheta.$$

objemu

Tuto sumu můžeme vypočítat integrováním úhlového rozdělení molekulových dipólů. Hodnotě ϑ přísluší prostorový úhel $2\pi \sin \vartheta d\vartheta$, a tak bude platit

$$P = \int_0^\pi n(\vartheta) p_0 \cos \vartheta 2\pi \sin \vartheta d\vartheta. \quad (11.19)$$

Dosadíme-li sem za $n(\vartheta)$ ze vztahu (11.17), dostaneme, že

$$P = -\frac{N}{2} \int_0^\pi \left(1 + \frac{p_0 E}{kT} \cos \vartheta \right) p_0 \cos \vartheta d(\cos \vartheta),$$

což lze snadno zintegrovat na výsledek:

$$P = \frac{N p_0^2 E}{3 kT}. \quad (11.20)$$

Polarizace je přímo úměrná poli E , takže jde o normální dielektrické chování. Kromě toho, jak očekáváme, je polarizace nepřímo úměrná teplotě, neboť při vyšších teplotách dochází k intenzivnějšímu dezorientování dipólů srážkami. Tato nepřímá úměrnost teplotě se nazývá *Curieův zákon*. Permanentní moment p_0 vystupuje ve vzorci (11.20) ve druhé mocnině z následujících důvodů: Polarizační síla působící na dipóly v daném elektrickém poli závisí na p_0 a střední moment způsobený uspořádáním dipólů je taktéž přímo úměrný veličině p_0 . Střední indukovaný moment je tedy přímo úměrný veličině p_0^2 .

Nyní se pokusíme zjistit, nakolik vztah (11.20) souhlasí s experimentem. Všimněme si případu vodní páry. Protože p_0 neznáme, nemůžeme počítat P přímo. Ale podle vztahu (11.20) $\epsilon_r - 1$ se má měnit nepřímo úměrně teplotě, a to je třeba prověřit.

Z (11.20) dostaneme, že

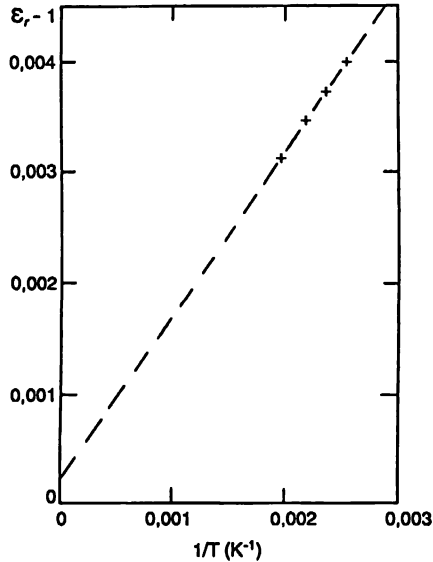
$$\epsilon_r - 1 = \frac{P}{\epsilon_0 E} = \frac{N p_0^2}{3 \epsilon_0 kT}, \quad (11.21)$$

takže $\epsilon_r - 1$ se má měnit přímo úměrně hustotě N a nepřímo úměrně absolutní teplotě. Permittivita byla měřena při několika odlišných tlacích a teplotách zvolených tak, aby počet molekul byl v jednotkovém objemu stálý¹⁴⁾.

(Všimněte si, že kdyby se všechna měření prováděla za stejného tlaku, klesal by počet molekul připadajících na jednotkový objem s rostoucí teplotou lineárně a $\epsilon_r - 1$ by se mělo měnit jako T^{-2} místo T^{-1} .) Na obr. 11.4 jsou vyznačeny experimentální hodnoty v závislosti na $1/T$. Závislost, vyplývající ze vztahu (11.21) se docela dobře potvrzuje.

¹⁴⁾ Sängler, Steiger a Gächter, Helvetica Physica Acta 5, 200 (1932)

Permitivita polárních molekul má další zvláštnost – závislost na frekvenci přiloženého pole. V důsledku momentu setrvačnosti molekul je třeba určitá doba k tomu, aby se těžké molekuly natočily do směru pole. Proto použijeme-li frekvence z horní mikrovlnné oblasti nebo někde nad ní, začne se polární příspěvek k permitivitě zmenšovat, protože molekuly nestačí sledovat pole. Narozdíl od toho zůstává elektronová polarizovatelnost stejná až do optických frekvencí, neboť setrvačnost elektronů je menší.



Obr. 11.4 Experimentálně zjištěné hodnoty permitivity vodní páry při různých teplotách

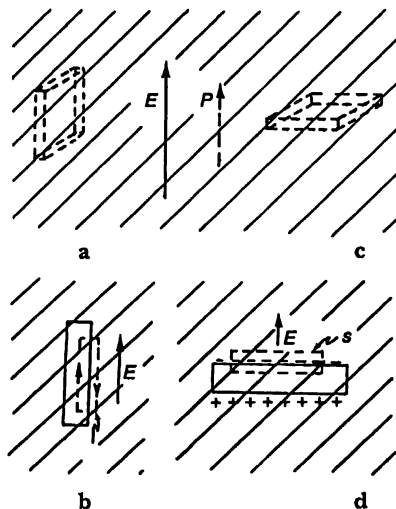
11.4 ELEKTRICKÁ POLE V DUTINÁCH DIELEKTRIKA

Nyní přejdeme k zajímavé, ale komplikované otázce, a to problému permitivity kondenzovaných látek. Vezměme například kapalně helium nebo kapalně argon nebo některou jinou nepolární látku. Očekáváme, že i v ní dochází k elektronové polarizaci. Ale v kondenzované látce může být P velké, takže pole působící na jednotlivý atom bude ovlivněno polarizací atomů v jeho bezprostředním okolí. Otázka zní: Jaké elektrické pole působí na jednotlivý atom?

Představte si, že kapalinu vložíme mezi elektrody kondenzátoru. Jsou-li elektrody nabitý, vznikne v kapalině elektrické pole. Ale kromě toho existují náboje i v jednotlivých atomech. Výsledné pole E je součtem obou těchto efektů. V kapalině se toto reálné elektrické pole velmi prudce mění od bodu k bodu. Ohromně velké je uvnitř atomů, obzvláště v těsné blízkosti jádra, a poměrně malé je mezi atomy. Rozdíl potenciálů mezi elektrodami udává křivkový integrál tohoto výsledného pole. Zanedbáme-li všechny „jemnozrné“ fluktuace, můžeme hovořit o *středním* elektrickém poli E , které je právě rovno U/d . (Toto pole jsme používali v předcházející kapitole.) Můžeme jej chápat jako střední hodnotu v prostoru obsahujícím mnoho atomů.

Teď byste se mohli domnívat, že na nějaký „střední“ atom bude v nějaké „střední“ poloze působit právě toto střední pole. Není to ale tak jednoduché, můžeme ukázat zkoumáním, co se stane, když si představíme v dielektriku dutiny různého tvaru. Například předpokládejme, že jsme

v polarizovaném dielektriku vyřízli štěrbinu orientovanou rovnoběžně s polem (obr. 11.5 a). Protože, jak víme, $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, musí být křivkový integrál \mathbf{E} po křivce Γ , jejíž tvar je nakreslen v části b na obr. 11.5, roven nule. Pole uvnitř štěrbiny musí poskytnout takový příspěvek, který přesně zruší příspěvek vnějšího pole. Proto pole \mathbf{E}_0 , skutečně zjištěné ve středu dlouhé tenké štěrbiny, je rovno střednímu elektrickému poli \mathbf{E} naměřenému v dielektriku.



Obr. 11.5 Pole ve štěrbině vyříznuté v dielektriku závisí na tvaru a orientaci štěrbiny

Nyní uvažujme jinou štěrbinu s delšími stranami kolnými na \mathbf{E} (obr. 11.5 c). V tomto případě není pole \mathbf{E}_0 ve štěrbině totéž jako pole \mathbf{E} , neboť na stěnách štěrbiny se objeví polarizační náboje. Použijeme-li Gaussovu větu na plochu S zvolenou tak, jak ukazuje obr. 11 d, zjistíme, že pole \mathbf{E}_0 uvnitř štěrbiny je možné vyjádřit takto

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}, \quad (11.22)$$

kde \mathbf{E} je opět elektrické pole v dielektriku. (Gaussovská plocha obsahuje plošný polarizační náboj s hustotou $\sigma_{\text{pol}} = P$.) V kapitole 10 jsme se zmínili o tom, že $\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ se často označuje jako \mathbf{D} , takže $\epsilon_0 \mathbf{E}_0 = \mathbf{D}_0$ je rovno hodnotě \mathbf{D} v dielektriku.

V dřívějším období vývoje fyziky, kdy se pokládalo za velmi důležité každou veličinu definovat přímým experimentem, lidi potěšil objev, že mají možnost definovat, co je myšleno pod \mathbf{E} a \mathbf{D} v dielektriku aniž by museli „prolézat“ mezi atomy. Střední pole \mathbf{E} je číselně rovno poli \mathbf{E}_0 , které by se naměřilo ve štěrbině vyříznuté rovnoběžně s polem. A pole \mathbf{D} můžeme změřit tak, že najdeme \mathbf{E}_0 ve štěrbině vyříznuté kolmo k poli. Ale i tak nikdo nikdy neměřil tyto veličiny takovým způsobem, takže šlo pouze o akademický problém.

U většiny kapalin s ne příliš složitou strukturou bychom mohli očekávat, že atom je v průměru obklopen jinými atomy takovým způsobem, jehož dobrým přiblížením je *kulová dutina*. A proto si položíme otázku: „Jaké pole by bylo v kulové dutině?“ Odpověď můžeme najít, uvědomíme-li si, že vyříznutím kulové dutiny v homogenně polarizované látce vlastně vybereme ven kouli z polarizované látky. (Musíme si představit, že před vyříznutím dutiny byla polarizace v látce jakoby

„zamrzlá“.) Na základě principu superpozice pole uvnitř dielektrika před vybráním koule je součtem polí pocházejících od všech nábojů nacházejících se mimo objem koule a polí od nábojů uvnitř polarizované koule. Označíme-li tedy pole v homogenním dielektriku E , můžeme napsat

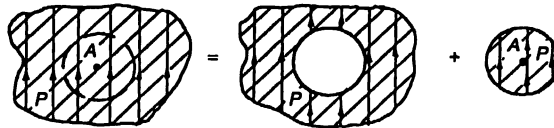
$$E = E_{\text{dut}} + E_{\text{kul}}, \quad (11.23)$$

kde E_{dut} je pole v dutině a E_{kul} je pole uvnitř homogenně polarizované koule (obr. 11.6). Pole homogenně polarizované koule znázorňuje obr. 11.7. Elektrické pole uvnitř koule je homogenní a má hodnotu

$$E_{\text{kul}} = -\frac{P}{3\epsilon_0}. \quad (11.24)$$

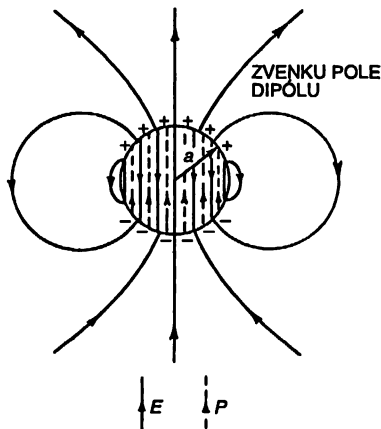
Z (11.23) potom dostáváme

$$E_{\text{dut}} = E + \frac{P}{3\epsilon_0}. \quad (11.25)$$



Obr. 11.6 Pole v jakémkoliv bodu A v dielektriku je možné považovat za součet pole v kulové dutině a pole kulové výplně.

Pole v kulové dutině je o hodnotu $P/3\epsilon_0$ větší než střední pole. (Kulová dutina vytváří pole, které leží v jedné třetině mezi polem ve šterbině rovnoběžné a polem ve šterbině kolmé k poli.)



Obr. 11.7 Elektrické pole homogenně polarizované koule

11.5 PERMITIVITA KAPALIN. CLAUSIOVA-MOSSOTTIOVA ROVNICE

V případě kapaliny očekáváme, že pole polarizující jednotlivý atom není rovno E , ale je blíže k poli E_{dut} . Dosadíme-li do vztahu (11.6) jako polarizační pole E_{dut} z (11.25), pak vztah (11.8) získá tvar

$$P = N\alpha\epsilon_0 \left(E + \frac{P}{3\epsilon_0} \right), \quad (11.26)$$

resp.

$$P = \frac{N\alpha}{1 - (N\alpha/3)} \epsilon_0 E. \quad (11.27)$$

Připomeneme-li si, že $\epsilon_r - 1$ je rovno právě $P/\epsilon_0 E$, dostaneme

$$\epsilon_r - 1 = \frac{N\alpha}{1 - (N\alpha/3)}. \quad (11.28)$$

Tento vztah vyjadřuje permitivitu kapaliny v závislosti na polarizovatelnosti atomu α a nazývá se *Clausiova-Mossottiova* rovnice.

Je-li $N\alpha$ velmi malé, jako v případě plynů, které mají hustotu N , je možno člen $N\alpha/3$ ve srovnání s jednotkou zanedbat, a dostaneme náš původní výsledek (11.9)

$$\epsilon_r - 1 = N\alpha. \quad (11.29)$$

Porovnejme vztah (11.28) s některými experimentálními výsledky. Nejdříve je třeba si všimnout plynů, pro které můžeme z měření ϵ_r určit α pomocí vztahu (11.29). Například permitivita sirouhlíku CS_2 při 0°C je 1,0029, takže je pro něj $N\alpha$ rovno 0,0029. Hustotu plynu lze snadno vypočítat a hustotu kapaliny můžete najít v příručkách. Při 20°C je hustota kapalného CS_2 381krát větší než hustota plynu při 0°C . To znamená, že N je v kapalině 381krát větší než v plynu, takže připustíme-li, že základní atomová polarizovatelnost sirouhlíku se při kondenzaci do kapalného stavu nemění, je $N\alpha$ v kapalině rovno 381-násobku 0,0029, tj. 1,11. Všimněte si, že člen $N\alpha/3$ dosahuje téměř 0,4, takže je dost významný. Na základě těchto čísel předpovídáme, že permitivita je rovna 2,76, což dostatečně dobře souhlasí s pozorovanou hodnotou 2,64.

Tabulka 11.1 Výpočet permitivity kapalin z permitivity plynů

Látka	Plyn			Kapalina				
	ϵ_r (exp)	$N\alpha$	Hustota	Hustota	Poměr ¹	$N\alpha$	ϵ_r (předp)	ϵ_r (exp)
CS_2	1,002 9	0,002 9	0,003 39	1,293	381	1,11	2,76	2,64
O_2	1,000 523	0,005 23	0,001 43	1,19	832	0,435	1,509	1,507
CCl_4	1,003 0	0,003 0	0,004 89	1,59	325	0,977	2,45	2,24
Ar	1,000 545	0,000 545	0,001 78	1,44	810	0,441	1,517	1,54

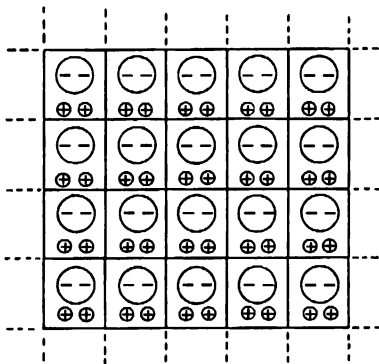
¹ Poměr = hustota kapaliny/hustota plynu

V tab. 11.1 uvádíme některé experimentální údaje o různých látkách (převzato z *Handbook of Chemistry and Physics*) spolu s permitivitami vypočítanými právě popsáním způsobem ze vztahu (11.28). Souhlas mezi pozorováním a teorií je v případě argonu a kyslíku ještě lepší než v případě CS_2 , ale horší je v případě chloridu uhličitého CCl_4 . Vcelku však tyto výsledky ukazují, že vztah (11.28) platí velmi dobře.

Naše odvození vztahu (11.28) platí pouze pro *elektronovou* polarizaci v kapalinách. Není správné pro polární molekulu, například H_2O . Provedeme-li tytéž výpočty pro vodu, dostaneme pro $N\alpha$ hodnotu 13,2, z čehož vyplývá, že permitivita kapaliny je *záporná*, zatímco naměřená hodnota ϵ_r je 80. Tento problém souvisí s korektním zacházením s permanentními dipóly. Onsager ukázal, jak máme správně postupovat. Nemáme čas se tím nyní zabývat, ale jestli vás to zajímá, je o tom psáno v Kittelově knize *Úvod do fyziky pevných látek*.

11.6 PEVNÁ DIELEKTRIKA

Nyní si všimněme pevných látek. První zajímavostí u nich je, že mohou mít zabudovanou permanentní polarizaci, existující i bez použití vnějšího elektrického pole. Příkladem jsou takové látky jako vosk, který obsahuje dlouhé molekuly s permanentním dipólovým momentem. Když rozpustíte trochu vosku a v kapalném stavu jej vložíte do elektrického pole, aby se dipólové momenty částečně seřadily, zůstanou seřazeny, když kapalina ztuhne. Taková pevná látka se bude vyznačovat permanentní polarizací i po odstranění pole a nazývá se *elektret*.



Obr. 11.8 Složitá krystalová mřížka může mít vlastní permanentní polarizaci P .

Elektret má na povrchu permanentní polarizační náboje. Představuje elektrický analog magnetu. Není však tak užitečný, neboť k jeho povrchu se ze vzduchu přitahují volné náboje a v konečném důsledku neutralizují polarizační náboje. Elektret se „vybíjí“ a netvoří znatelné vnější pole.

Permanentní vnitřní polarizace P se přirozeně vyskytuje i v některých krystalických látkách. V takových krystalech má každá elementární buňka mřížky stejný permanentní dipólový moment, jak je znázorněno na obr. 11.8. Všechny dipóly mají tentýž směr i bez vnějšího elektrického pole. Takovou polarizaci se skutečně vyznačují mnohé složité krystaly; obvykle ji však nezjistíme, neboť stejně jako v případě elektretů jsou vnější pole vykompenzována.

Vnější pole se však objeví, když se tyto vnitřní dipólové momenty v krystalu mění, protože rozptýlené náboje se nestačí shromáždit a zneutralizovat polarizační náboje. Nachází-li se takové

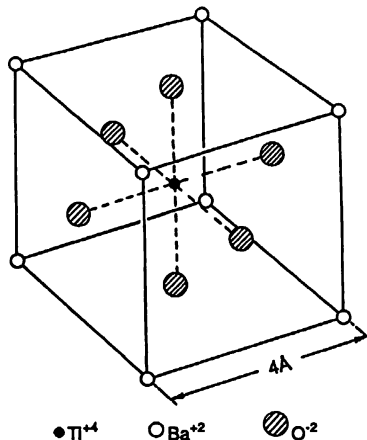
dielektrikum v kondenzátoru, budou se na elektrodách indukovat volné náboje. Dipólové momenty se mohou měnit například zahříváním dielektrika v důsledku teplotní roztažnosti. Tento úkaz se nazývá *pyroelektrina*. Podobně, měníme-li napětí v krystalu, například když krystal ohýbáme, může se moment také trochu měnit a je možné zaznamenat malý elektrický efekt nazývaný *piezoelektrina*.

Pro krystaly, které nemají permanentní moment, lze teorii permitivity vypracovat na základě elektronové polarizovatelnosti atomů. Postupuje se téměř shodně jako pro kapaliny. Některé krystaly obsahují i otáčivé dipóly, jejichž orientování bude také přispívat k ϵ_r . V iontových krystalech, například NaCl, existuje i *iontová polarizovatelnost*. Takový krystal se skládá ze šachovnicově uspořádaných kladných a záporných iontů. V elektrickém poli se kladné ionty přitahují jedním směrem a záporné směrem opačným. Výsledkem je relativní posun kladných a záporných nábojů, a tedy objemová polarizace. Velikost iontové polarizovatelnosti bychom mohli odhadnout na základě našich znalostí pevnosti krystalů kamenné soli, ale do tohoto tématu se tu pouštět nebudeme.

11.7 FEROELEKTRINA; BaTiO_3

Nyní chceme popsat jednu zvláštní třídu krystalů, které mají téměř náhodou zabudovaný permanentní elektrický moment. Situace je s nimi natolik kritická, že zvýšíme-li teplotu jen trochu, permanentní moment se ihned ztratí. Na druhé straně jde-li o přibližně kubické krystaly, jejichž dipólové momenty se mohou natáčet různými směry, je možné při změnách vnějšího elektrického pole zaznamenat velké změny momentu. Všechny momenty se natáčejí a dostáváme velký efekt. Látky, které se vyznačují tímto druhem permanentního elektrického momentu, se nazývají *feroelektrika* podle analogie s feromagnetickými jevy, poprvé objevenými v železe.

Mechanismus feroelektriny bychom rádi vysvětlili popisem konkrétního příkladu feroelektrické látky. Existuje několik způsobů, jak může látka získat charakter feroelektrika. Rozebereme však pouze jeden záhadný případ – titanit baryt BaTiO_3 . Tato látka má krystalickou mřížku, jejíž základní buňka je nakreslena na obr. 11.9. Ukazuje se, že titanit baryt je nad určitou teplotou, totiž nad 118°C , obyčejným dielektrikem s obrovskou permitivitou. Pod touto teplotou však náhle získává permanentní moment.



Obr. 11.9 Elementární buňka BaTiO_3 . Ve skutečnosti zaplňují atomy většinu prostoru; pro přehlednost jsou ukázány pouze polohy jejich středů.

Při výpočtu polarizace pevné látky musíme nejdříve zjistit, jaká lokální pole existují v každé elementární buňce. V úvahu přitom musíme vzít i pole od samotné polarizace, stejně, jako jsme to dělali v případě kapaliny. Krystal však není homogenní kapalinou, a proto nemůžeme jako lokální pole brát to, co bychom dostali pro kulovou dutinu.

Provedete-li výpočet pro krystal, zjistíte, že ve vztahu (11.24) se součinitel $1/3$ trochu změnil, ale ne mnoho. (Pro jednoduchý kubický krystal je to právě $1/3$.) Proto v naší předběžné diskuzi budeme předpokládat, že pro BaTiO₃ je tento součinitel roven $1/3$.

Když jsme zapsali vztah (11.28), možná vás napadlo, co by se stalo, kdyby $N\alpha$ převýšilo 3. Zdá se, jakoby se ϵ_r stalo záporným, což jistě nemůže být správné. Podívejme se, co se děje, když v nějakém konkrétním krystalu postupně zvětšujeme α . Když vzrůstá α , vzrůstá polarizace, a tím i lokální pole. Ale větší lokální pole bude víc polarizovat každý atom, čímž se lokální pole ještě víc zvětší. Je-li příspěvek atomů dostatečný, bude proces pokračovat; vzniká určitý druh zpětné vazby, která vyvolá neohraničený vzrůst polarizace (za předpokladu, že polarizace každého atomu roste přímo úměrně poli). Podmínky pro vznik tohoto procesu nastanou právě při $N\alpha = 3$. Polarizace, samozřejmě, nenabude nekonečně velké hodnoty, neboť přímá úměrnost mezi indukovaným momentem a intenzitou elektrického pole se při vysokých polích narušuje, takže naše vzorce přestanou platit. Následkem tohoto procesu se v mřížce „uvězní“ velká, sebe sama udržující, vnitřní polarizace.

V případě BaTiO₃ existuje kromě elektronové polarizace i dost velká iontová polarizace. Předpokládá se, že ji vyvolávají ionty titanu, které se mohou v kubické mřížce trochu pohybovat. Mřížka však klade odpor velkým posunům, takže jen co se ion titanu trochu posune, zabrzdí se a zastaví. Ale tím získá krystalová mřížka permanentní dipólový moment.

Ve většině krystalů vypadá situace opravdu takto při všech dosažitelných teplotách. V případě titaničitanu barnatého však existuje zajímavý jemný úkaz. Když se $N\alpha$ jen trochu zmenší, dipólový moment se uvolní. Protože N klesá při růstu teploty (v důsledku teplotní roztažnosti), lze $N\alpha$ měnit změnou teploty. V oblasti pod kritickou teplotou se moment právě usazuje, takže tehdy je snadné – pomocí vnějšího pole – pootočit polarizaci do jiného směru a v něm ji „uzamknout“.

Zkusme, zda dokážeme podrobněji zanalyzovat, co se přitom děje. Kritickou teplotu, při níž je $N\alpha$ přesně tři, označíme T_c . Když teplota stoupne, v důsledku roztažnosti mřížky N trochu poklesne. Protože roztažnost je malá, můžeme napsat, že blízko kritické teploty

$$N\alpha = 3 - \beta(T - T_c), \quad (11.30)$$

kde β je malý součinitel, jehož řád je roven řádu koeficientu teplotní roztažnosti, tj. asi 10^{-5} až 10^{-6} na kelvin. Dosadíme-li vztah (11.30) do (11.28), dostaneme

$$\epsilon_r - 1 = \frac{3 - \beta(T - T_c)}{\beta(T - T_c)/3}.$$

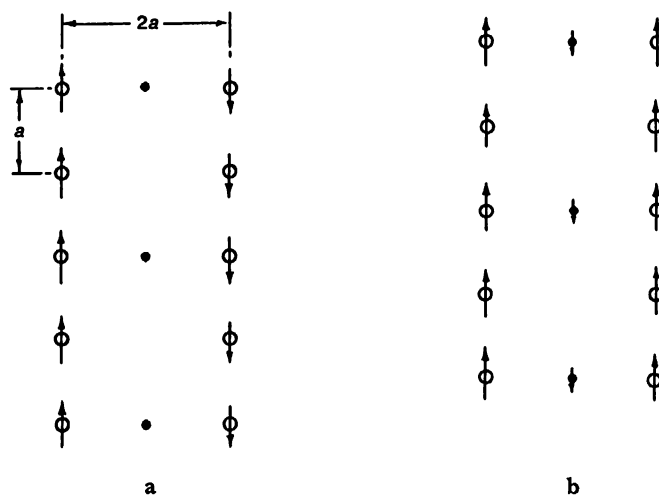
Tento vzorec můžeme nahradit přibližným vzorcem

$$\epsilon_r - 1 = \frac{9}{\beta(T - T_c)}, \quad (11.31)$$

neboť jsme předpokládali, že $\beta(T - T_c)$ je malá hodnota ve srovnání s jednotkou.

Vztah (11.31) platí, ovšem, jen pro $T > T_c$. Vidíme, že těsně nad kritickou teplotou je ϵ_r obrovské. Protože $N\alpha$ je velmi blízké 3, dochází k úžasnému zesilovacímu účinku a relativní permitivita může snadno dosáhnout hodnoty 50 000 až 100 000. Velmi citlivá je i na teplotu. Při zvýšení teploty klesá nepřímo úměrně teplotě. Zatímco však v případě dipólového plynu $\epsilon_r - 1$ je nepřímo úměrně *absolutní* teplotě, ve feroelektrikách se tato veličina mění nepřímo úměrně rozdílu mezi absolutní a kritickou teplotou (tento zákon se nazývá *Curieovým-Weissovým zákonem*).

Co se stane, snížíme-li teplotu na kritickou teplotu? Představme-li si mřížku skládající se z takových elementárních buněk, jako je *obr. 11.9*, přesvědčíme se, že lze vybrat řetězce iontů směřující podél vertikálních přímk. Jeden z nich se skládá ze střídavě uložených iontů kyslíku a titanu. Existují i jiné řetězce vytvořené z iontů barya nebo kyslíku, ale rozestupy podél těchto přímk jsou větší. Jednoduchý model imitující tuto situaci dostaneme, představíme-li si takovou soustavu iontových řetězců, jako ukazuje *obr. 11.10 a*. V řetězci, který nazveme hlavním, je vzdálenost mezi sousedními ionty a , což představuje *polovinu* mřížkové konstanty; příčná vzdálenost totožných řetězců je $2a$.



Obr. 11.10 Modely feroelektrika: a) v případě antiferoelektrika b) v případě normálního feroelektrika

V mezerách mezi nimi se nacházejí řídkěji obsazené řetězce, jichž si zatím nebudeme všimnout. Abychom si analýzu trochu usnadnili, budeme také předpokládat, že všechny ionty v hlavním řetězci jsou identické. (To není závažné zjednodušení, neboť všechny důležité úkazy nastanou i při něm. Jde o jeden z obrátů teoretické fyziky. Formuluje se odlišná úloha, neboť je snáze řešitelná a potom, když se porozumí chodu věci, nastane čas, aby se vzaly v úvahu všechny komplikace.)

Nyní se pokusíme prozkoumat, co se děje v našem modelu. Předpokládáme, že každý atom má dipólový moment p a chceme vypočítat pole v jednom z atomů v řetězci. Musíme najít součet polí pocházející od všech jiných atomů. Nejdříve budeme počítat pole pouze od dipólů nacházejících se v jednom vertikálním řetězci; o dalších řetězcích budeme hovořit později. Pole ve vzdálenosti r od dipólu ve směru jeho osy vyjadřuje vztah

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3}. \quad (11.32)$$

Dipóly rozmístěné v řetězci ve stejných vzdálenostech nad a pod zvoleným atomem vytvářejí v jeho poloze pole se stejným směrem. Pro celý řetězec tedy dostaneme

$$E_{\text{řet}} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{a^3} \cdot \left(2 + \frac{2}{8} + \frac{2}{27} + \frac{2}{64} + \dots \right) = \frac{p}{\epsilon_0} \frac{0,383}{a^3}. \quad (11.33)$$

Není těžké ukázat, že kdyby náš model představoval dokonalý kubický krystal, tj. kdyby sousední totožné řetězce byly pouze ve vzdálenosti a od uvažovaného řetězce, změnil by se v (11.33) součinitel 0,383 na $1/3$. Jinými slovy, kdyby se sousední přímký nacházely ve vzájemné vzdálenosti a , přispěly by do našeho součtu pouze hodnotou $-0,050 p/\epsilon_0 a^3$. Ale v případě, o němž tu uvažujeme, se sousední hlavní řetězec nachází až ve vzdálenosti $2a$, jak si pamatujete z kapitoly 7, pole vytvořené periodickou strukturou, klesá exponenciálně se vzdáleností. Protože příspěvek těchto přímků je mnohem menší než $-0,050$ jednotek, můžeme všechny ostatní řetězce prostě zanedbat.

Dále musíme vypočítat, jaká polarizovatelnost α je potřebná, aby se začal uplatňovat mechanismus spontánního zesilování polarizace. Předpokládejme, že indukovaný moment p každého atomu v řetězci je přímo úměrný poli, které na něj působí (vztah 11.6). Polarizační pole působící na atom dostaneme z $E_{\text{řet}}$, použijeme-li vztah (11.32). Dostáváme tak dvě rovnice:

$$p = \alpha \epsilon_0 E_{\text{řet}}$$

a

$$E_{\text{řet}} = \frac{0,383}{a^3} \frac{p}{\epsilon_0}.$$

Tato soustava má dvě řešení: E a p rovnající se nule nebo

$$\alpha = \frac{a^3}{0,383}$$

při konečných hodnotách E a p . Dosáhne-li α hodnoty $a^3/0,383$, dostaví se permanentní polarizace udržovaná vlastním polem. Této kritické rovnosti se musí u titaničitanu barnatého dosáhnout právě při teplotě T_c . (Všimněte si, že kdyby α bylo větší než kritická hodnota pro slabá pole, pokleslo by při silnějších a v rovnovážném stavu by se uplatnila tatáž rovnost, kterou jsme našli.)

V případě BaTiO₃ je vzdálenost a rovna $2 \cdot 10^{-8}$ cm. Musíme tedy očekávat, že $\alpha = 21,8 \cdot 10^{-24}$ cm³. Tuto hodnotu můžeme porovnat se známými polarizovatelnostmi jednotlivých atomů. Pro kyslík je $\alpha = 30,2 \cdot 10^{-24}$ cm³ – jsme na správné stopě! Ale pro titan je $\alpha = 2,4 \cdot 10^{-24}$ cm³, což je dost málo. Aby náš model byl použitelný, musíme pravděpodobně vzít průměr. (Mohli bychom znovu počítat řetězec ze střídajících se atomů; výsledek by však byl zhruba tentýž.) Tedy α (průměrné) = $16,3 \cdot 10^{-24}$ cm³, což není dostatečně vysoké, aby vedlo k permanentní polarizaci.

Ale okamžik! Dosud jsme počítali pouze elektronové polarizovatelnosti. Existuje i určitá iontová polarizace způsobená posunutím iontu titanu. To, co potřebujeme, je iontová polarizovatelnost s velikostí $9,2 \cdot 10^{-24}$ cm³. (Přesnější výpočet, který bere v úvahu střídající se atomy, ukazuje, že ve skutečnosti potřebujeme $11,9 \cdot 10^{-24}$ cm³.) Abychom porozuměli vlastnostem BaTiO₃, musíme předpokládat, že v něm vzniká právě taková iontová polarizovatelnost.

Proč by měl ion titanu v titaničitanu barnatém mít takovou velkou iontovou polarizovatelnost, není známo. Není jasné ani to, proč se při nižší teplotě polarizuje stejně dobře ve směru tělesové

úhlopříčky krychle i ve směru úhlopříčky stěny. Vypočteme-li skutečnou velikost koulí na *obr. 11.9* a budeme zkoumat, zda má titan trochu volnosti v dutině vytvářené jeho sousedními kyslíkovými atomy (a právě v to doufáme, neboť pak by se dal lehko vysunout), zjistíme pravý opak. Sedí tam pevně. Atomy barya jsou trochu volné, ale budete-li předpokládat, že jsou to ony, které se posouvají, také nedostanete správný výsledek. Vidíte tedy, že tento problém není stoprocentně jasný; ještě jsou tajemství, která bychom rádi pochopili.

Vraťme se k našemu jednoduchému modelu z *obr. 11.10 a*. Vidíme, že pole pocházející od jednoho řetězce bude polarizovat sousední řetězec v *opačném* směru. To znamená, že i když bude každý řetězec uzavřen, nevznikne v jednotce objemu žádný výsledný permanentní moment. (Ačkoliv navenek by se tedy neprojevil žádné elektrické účinky, bylo by možné pozorovat určité termodynamické efekty.) Takové soustavy existují a nazývají se *antiferoelektrika*. To, co jsme vysvětlovali, je vlastně antiferoelektrikum. Titanicitan barnatý má ve skutečnosti takové uspořádání, jako je na *obr. 11.10 b*. Kyslíko-titanové řetězce jsou všechny polarizovány v téměř směru, neboť v mezerách mezi nimi se nacházejí jiné řetězce atomů. Ačkoliv atomy v nich nejsou příliš polarizovatelné, ani nejsou hustě u sebe, tyto řetězce budou částečně polarizované v opačném směru než kyslíko-titanové řetězce. Slabá pole vytvořená v sousedním kyslíko-titanovém řetězci jej přinutí polarizovat se rovnoběžně s prvním takovým řetězcem. Ba TiO_3 je tedy ve skutečnosti feroelektrikem, a to v důsledku působení atomů v mezipolohách. Můžete se zeptat: „A jak to bude s účinkem mezi dvěma O-Ti-řetězci?“ Pamatujte si však, že přímé působení klesá exponenciálně se vzdáleností; účinek řetězce *silných* dipólů může být ve vzdálenosti $2a$ menší než účinek slabých dipólů ve vzdálenosti a .

Tímto uzavíráme náš dost podrobný výklad o současném chápání permitivit plynů, kapalin a pevných látek.

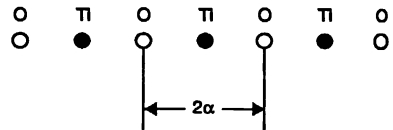
PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 11.1 ■ Určete elektrické pole uvnitř a vně homogenně zpolarizované koule poloměru a (viz obr. 11.7).
- 11.2 ■ Relativní permitivita plynného helia při 0°C a tlaku 1 atmosféry je 1,000074. Určete dipólový moment atomu helia v homogenním elektrickém poli s intenzitou 100 V/cm.

- 11.3 ■ Relativní permitivita vodní páry, která představuje plyn polárních molekul, závisí silně na teplotě. V následující tabulce jsou uvedeny experimentální výsledky měření této závislosti. Budete-li považovat vodní páru za ideální plyn, můžete vypočítat polarizovatelnost jeho molekul jako funkci teploty a nakreslit graf této závislosti. Na vodorovné ose vynášejte převrácenou hodnotu teploty. Podle náklonu křivky určete dipólový moment molekul vody.

T, K	$\rho,$	$(\epsilon_r - 1) \cdot 10^5$
393	7,532	400,2
423	8,124	371,7
453	8,712	348,8
483	9,300	328,7

- 11.4 ■ Uvažujte soustavu skládající se ze dvou atomů nacházejících se ve vzájemné vzdálenosti a . Polarizovatelnost každého z atomů je rovna α . Najděte vztah mezi a a α , aby tato soustava byla feroelektrikum. Mělo by vám vyjít $\alpha = 2\pi a^3$. Zdá-li se vám tato úloha příliš jednoduchá, uvažte lineární řetězec atomů kyslíku ve vzájemných vzdálenostech $2a$, mezi nimiž jsou rozmístěny atomy titanu (obrázek). Najděte vztah mezi a a polarizovatelnostmi atomu kyslíku α_o a titanu α_π , aby tato soustava byla feroelektrikum.



Může se vám hodit vztah $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx 1,2$.

- 11.5 ■ Jako model dielektrika si představte prostorovou mřížku pravidelně rozložených skleněných kuliček s průměrem d a minimální vzdáleností mezi sousedními kuličkami $3d$. Za předpokladu, že polarizace indukovaná ve vnějším elektrickém poli v každé kuličce nezávisí na přítomnosti ostatních kuliček (tj. zanedbáte-li přerozdělení indukovaných nábojů vlivem vzájemného působení kuliček) najděte relativní permitivitu takového „dielektrika“.

Analogie elektrostatiky

12.1 STEJNÉ ROVNICE MAJÍ STEJNÁ ŘEŠENÍ

12.2 PROUDĚNÍ TEPLA. BODOVÝ ZDROJ V BLÍZKOSTI
NEKONEČNÉHO ROVINNÉHO ROZHRANÍ

12.3 NAPNUTÁ MEMBRÁNA

12.4 DIFUZE ELEKTRONŮ. KULOVĚ SYMETRICKÝ
ZDROJ V HOMOGENNÍM PROSTŘEDÍ

12.5 BEZVÍROVÉ PROUDĚNÍ KAPALINY.
OBTÉKÁNÍ KOULE

12.6 OSVĚTLENÍ. HOMOGENNÍ OSVĚTLENÍ ROVINY

12.7 „FUNDAMENTÁLNÍ JEDNOTA“ PŘÍRODY

12.1 STEJNÉ ROVNICE MAJÍ STEJNÁ ŘEŠENÍ

Celkové množství informací, které se od začátku vědeckého pokroku o fyzikálním světě nashromáždilo, je ohromné a zdá se téměř nemožné, aby si z něj jednotlivec dokázal osvojit nějakou dostatečně rozsáhlou část. Ale ve skutečnosti si fyzik spíše dokáže uchovat široké vědomosti o fyzikálním světě, než se stát specialistou v nějaké úzké oblasti. Má to tři příčiny: Zaprvé, existují velké principy, jež platí pro všechny různé druhy jevů – například principy zachování energie a momentu hybnosti. Důkladné pochopení takových principů umožňuje porozumět mnoha věcem najednou. Za druhé, faktem je, že mnohé složité jevy, např. vlastnosti pevných těles pod tlakem, jsou v podstatě určeny elektrickými a kvantově mechanickými silami; porozumí-li tedy někdo základním zákonům elektřiny a kvantové mechaniky, vyplývá z toho

přinejmenším určitá možnost porozumět mnoha jevům, k nimž dochází ve složitých situacích. Nakonec, existuje tato nejpozoruhodnější shoda: *rovnice pro mnohé odlišné fyzikální problémy vypadají přesně stejně*. Pravda, symboly se přitom mohou lišit – jedno písmeno je nahrazeno jiným, ale matematický tvar rovnic je tentýž. Znamená to, že jestliže jsme prozkoumali jednu věc, okamžitě jsme dostali mnoho přesných poznatků i o řešení jiných problémů.

Nyní jsme skončili s elektrostatikou a brzy budeme pokračovat studiem magnetizmu a elektrodynamiky. Ale ještě předtím bychom rádi ukázali, že při studiu elektrostatiky jsme se současně dozvěděli i o velkém počtu jiných témat. Uvidíme, že rovnice elektrostatiky se vyskytují i na několika jiných místech ve fyzice. Přímým přenesením jejich řešení (samozřejmě, stejné matematické rovnice musí mít stejná řešení) je možné řešit úlohy v jiných oblastech stejně snadno – nebo stejně obtížně – jako v elektrostatice.

Jak víte, rovnice elektrostatiky vypadají takto:

$$\nabla \cdot (\epsilon_r \mathbf{E}) = \frac{\rho_{\text{vol}}}{\epsilon_0}, \quad (12.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (12.2)$$

(Uvádíme rovnice elektrostatiky pro dielektrika, abychom měli co nejobecnější situaci.) Tentýž fyzikální obsah je možno vyjádřit v jiném matematickém tvaru:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad (12.3)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_r \nabla\varphi) = -\frac{\rho_{\text{vol}}}{\epsilon_0}. \quad (12.4)$$

Nyní jde o to, že existuje mnoho fyzikálních problémů, jejichž matematické rovnice mají tento tvar. Existuje potenciál (φ), jehož gradient vynásobený skalární funkcí (ϵ_r) má divergenci rovnající se jiné skalární funkci ($-\rho/\epsilon_0$).

Cokoliv víme o elektrostatice, můžeme ihned transformovat na tentýž problém a *naopak*. (Funguje to, samozřejmě, v obou směrech: má-li ten jiný problém nějaké charakteristiky, které známe, můžeme tyto poznatky aplikovat na příslušný elektrostatický problém.) Nyní prozkoumáme řadu příkladů z různých oblastí, které vedou k rovnicím tohoto tvaru.

12.2 PROUDĚNÍ TEPLA.

BODOVÝ ZDROJ V BLÍZKOSTI NEKONEČNÉHO ROVINNÉHO ROZHRANÍ

O jednom příkladu – proudění tepla jsme již hovořili dříve (článek 3.4). Představme si nějaké těleso (ne nevyhnutelně homogenní, takže se může na různých místech skládat z různých látek), ve kterém se teplota mění od bodu k bodu. V důsledku těchto teplotních variací probíhá proudění tepla, jež je možno charakterizovat pomocí vektoru hustoty tepelného toku \mathbf{h} . Tento vektor udává, jaké množství tepelné energie pronikne za jednotku času jednotkovou plochou, kolmou na směr proudění. Divergence vektoru \mathbf{h} určuje rychlost, přepočtenou na jednotku objemu, kterou teplo z některé oblasti uniká:

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = \text{rychlost úniku tepla připadajícího na jednotku objemu.}$$

(Tuto rovnici bychom mohli samozřejmě napsat v integrálním tvaru, tj. přesně tak, jak jsme to udělali v elektrostatice s Gaussovým zákonem, podle kterého je tok plochou roven rychlosti, kterou se mění tepelná energie uvnitř látky. Nebudeme se zabývat transformováním rovnic z diferenciálního tvaru na integrální a zpět, neboť postup je přesně tentýž jako v elektrostatice.)

Rychlost, jíž se na různých místech teplo generuje nebo absorbuje, závisí ovšem na podmínkách dané úlohy. Předpokládejme například, že uvnitř tělesa se nachází zdroj tepla (mohlo by jít o radioaktivní zdroj nebo o rezistor zahříváný elektrickým proudem). Tepelnou energii uvolněnou za sekundu a přepočtenou na jednotkový objem označme s . V daném objemu může docházet i ke ztrátám (nebo přírůstkům) tepelné energie na úkor jiných forem vnitřní energie. Je-li u tepelná energie připadající na jednotkový objem, bude $-du/dt$ také „zdrojem“ tepelné energie. Pak dostaneme

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = s - \frac{du}{dt}. \quad (12.5)$$

Nyní nebudeme hovořit o úplné rovnici, v níž se veličiny s časem mění, neboť se zabýváme analogiemi elektrostatiky, kde na čase nic nezávisí. Budeme uvažovat pouze úlohy se *stacionárním prouděním tepla*, v nichž konstantní zdroje vytvořily rovnovážný stav. V takových případech

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = s. \quad (12.6)$$

Je nutné mít, samozřejmě, ještě další rovnici, která popisuje, jak teplo proudí na různých místech. V mnohých látkách je hustota tepelného toku přibližně přímo úměrná rychlosti změny teploty s polohou: čím větší je rozdíl teplot, tím větší je hustota toku. Jak víme, vektor hustoty tepelného toku je přímo úměrný gradientu teploty. Součinitel přímé úměrnosti λ , který je charakteristickou veličinou látky, se nazývá *tepelná vodivost*:

$$\mathbf{h} = -\lambda \nabla T. \quad (12.7)$$

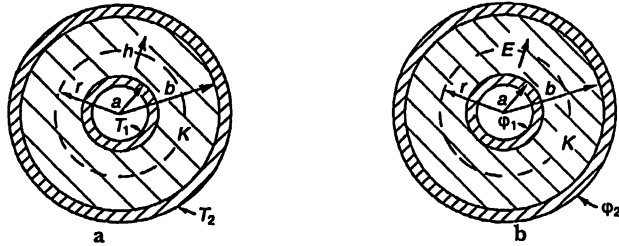
Mění-li se vlastnosti látky od místa k místu, je λ funkcí polohy: $\lambda = \lambda(x, y, z)$. Rovnice (12.7) není natolik fundamentální jako rovnice (12.5), neboť závisí na vlastnostech konkrétní látky. Dosadíme-li \mathbf{h} z (12.7) do rovnice (12.6), dostaneme rovnici

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla T) = -s, \quad (12.8)$$

kteřá má přesně tentýž tvar jako rovnice (12.4). *Úlohy o stacionárním proudění tepla a elektrostatické úlohy jsou tedy stejné.* Vektor hustoty tepelného toku \mathbf{h} odpovídá vektoru \mathbf{E} a teplota T odpovídá potenciálu φ . Již jsme se zmínili, že bodový zdroj tepla vytváří tepelné pole, které se mění se vzdáleností r jako $1/r$, a hustotu tepelného toku, která se mění jako $1/r^2$. To není nic víc než přenesení tvrzení z elektrostatiky o tom, že bodový náboj generuje potenciál, který se mění jako $1/r$, a elektrické pole, které se mění jako $1/r^2$. Obecně můžeme úlohy o stacionárním proudění tepla řešit právě tak snadno jako elektrostatické úlohy.

Prozkoumejme jednoduchý příklad. Mějme válec s poloměrem a a s teplotou T_1 udržovanou generováním tepla ve válci samém. (Mohlo by jít například o drát, kterým protéká proud, nebo o trubici, uvnitř které kondenzuje pára.) Nechť je válec pokryt koncentrickou vrstvou izolační látky, jejíž tepelná vodivost je λ . Vnější poloměr izolační vrstvy nechť je b a její vnější okraj je udržován na teplotě T_2 (obr. 12.1 a). Chceme určit, jakou rychlostí se bude teplo ztrácet z drátu nebo z tru-

bice nebo z čehokoliv, co se nachází ve středu válce. Označme celkové množství tepelných ztrát z trubice, jejíž délka je L , jako G , což je právě to, co se snažíme určit.



Obr. 12.1 a) Proudění tepla ve válcové geometrii. b) Odpovídající elektrická úloha.

Jak můžeme tuto úlohu řešit? Máme k dispozici diferenciální rovnice, ale protože jsou tytéž jako v elektrostaticce, jejich matematické řešení už vlastně máme. Analogická je úloha o vodiči s poloměrem a a potenciálem φ_1 , odděleném koncentrickou vrstvou dielektrické látky od dalšího vodiče s poloměrem b a potenciálem φ_2 (obr. 12. 1 b) Protože hustota tepelného toku h odpovídá elektrickému poli E , odpovídá veličina G , kterou chceme určit, toku elektrického pole z jednotkové délky (jinými slovy, elektrickému náboji připadajícímu na jednotku délky a dělenému veličinou ϵ_0). Tuto elektrostatickou úlohu jsme řešili pomocí Gaussova zákona. Stejný postup budeme sledovat i v naší úloze o proudění tepla.

Ze symetrie úlohy vidíme, že h závisí pouze na vzdálenosti od osy. Proto naši trubici obklopíme gaussovským válcem s délkou L a poloměrem r . Z Gaussova zákona víme, že hustota tepelného toku h vynásobená plošným obsahem povrchu $2\pi rL$ musí být rovna celkovému množství tepla, jež je generováno uvnitř a jež jsme označili jako G :

$$2\pi rLh = G \quad \text{neboli} \quad h = \frac{G}{2\pi rL}. \quad (12.9)$$

Hustota tepelného toku je přímo úměrná gradientu teploty

$$h = -\lambda \nabla T$$

nebo, jako v tomto případě, velikost vektoru h určuje rovnice

$$h = -\lambda \frac{dT}{dr}.$$

Toto vyjádření spolu s (12.9) vede k rovnici

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{G}{2\pi\lambda Lr}. \quad (12.10)$$

Integrujeme-li ji od $r=a$ do $r=b$, dostaneme

$$T_2 - T_1 = -\frac{G}{2\pi\lambda L} \ln \frac{b}{a}. \quad (12.11)$$

Vyřešíme-li tuto rovnici vzhledem ke G , dostaneme

$$G = \frac{2\pi\lambda L(T_1 - T_2)}{\ln(b/a)}. \quad (12.12)$$

Tento výsledek přesně odpovídá výrazu pro náboj válcového kondenzátoru

$$Q = \frac{2\pi\epsilon_0 L(\varphi_1 - \varphi_2)}{\ln(b/a)}.$$

Tyto úlohy jsou stejné a mají stejná řešení. Na základě našich vědomostí o elektrostatice také umíme určit, kolik tepla se ztrácí z izolovaného potrubí.

Prozkoumejme ještě jeden příklad o vedení tepla. Dejme tomu, že chceme znát hustotu tepelného toku v okolí bodového zdroje tepla nacházejícího se ne hluboko pod povrchem Země nebo v blízkosti povrchu velkého kovového tělesa. Takovýmto lokalizovaným zdrojem tepla by mohla být atomová bomba odpálená v podzemí, představující intenzivní zdroj tepla, nebo by mohlo jít o malý radioaktivní zdroj, nacházející se v železném bloku. Možností je mnoho.

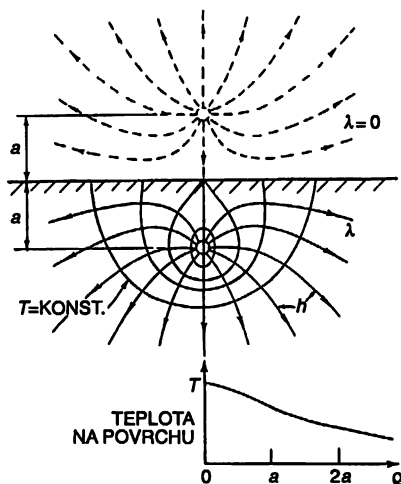
Budeme řešit idealizovanou úlohu o bodovém tepelném zdroji s výkonem G , nacházejícím se ve vzdálenosti a pod povrchem nekonečného bloku homogenní látky, jež má tepelnou vodivost λ . Tepelnou vodivost vzduchu nad povrchem látky zanedbáme. Chceme určit rozdělení teploty na povrchu bloku. Jaká je teplota přímo nad zdrojem a také v různých místech na povrchu bloku?

Jak tedy budeme tuto úlohu řešit? Podobá se elektrostatičké úloze o dvou látkách s odlišnými permitivitami ϵ_r , oddělených rovinným rozhraním. Vypadalo to, že jde o analogii bodového náboje nacházejícího se v blízkosti rozhraní mezi dielektrikem a vodičem nebo o něco podobného. Podívejme se, jaká situace je v blízkosti povrchu. Protože jsme předpokládali, že nedochází k úniku tepla z bloku, platí fyzikální podmínka, že normálová složka vektoru \mathbf{h} je na povrchu rovna *nule*. Musíme se tedy zeptat: ve které elektrostatičké úloze se uplatňuje podmínka, že normálová složka elektrického pole \mathbf{E} (jež je analogií vektoru \mathbf{h}) je na povrchu rovna *nule*? V žádné.

Je to jeden z případů, kdy musíme být obzvlášť opatrní. V matematických podmínkách, které vznikají v každém jednotlivém příkladě, může z fyzikálních důvodů docházet k určitým omezením. Proto když jsme rozebrali diferenciální rovnici pouze pro určitý omezený okruh případů, mohlo se stát, že jsme přehlédli některé druhy řešení, které se mohou objevit v jiných fyzikálních situacích. Například látka s permitivitou rovnou nule neexistuje, zatímco nulovou tepelnou vodivost má vakuum. Dokonalý tepelný izolátor tedy nemá elektrostatičkou analogii. Ale i tak můžeme použít stejné *metody*. Můžeme se pokusit představit si, co by se stalo, kdyby byla permitivita *rovna nule*. (Přirozeně permitivita v reálném případě nikdy není rovna nule. Ale mohl by nastat případ, v němž by se uplatnila látka s velmi *vyšokou* permitivitou, takže permitivitu vnějšího vzduchu bychom mohli zanedbat.)

Jak tedy najdeme elektrické pole, jež nemá složku kolmou na povrch, tj. takové, které je na povrchu vždy *tangenciální*? Uvědomte si, že máme opačnou úlohu, než je ta o bodovém náboji v blízkosti rovinného vodiče. Tam jsme hledali pole *kolmé* na povrch, neboť celý vodič měl stejný potenciál. V elektrické úloze jsme našli řešení pomocí zrcadlového obrazu bodového náboje za vodivou rovinou. Tutéž myšlenku můžeme použít opět. Budeme se snažit vybrat takový „zrcadlový zdroj“, který automaticky vynuluje normálovou složku pole na povrchu.

Řešení ukazuje *obr. 12.2*. Zrcadlový zdroj se *stejným znaménkem* a s toutéž velikostí, umístěný ve vzdálenosti a nad povrchem způsobí, že pole na povrchu bude vždy horizontální. Jeho normálové složky od obou zdrojů se vruší.



Obr. 12.2 Proudění tepla a izotermy v blízkosti bodového zdroje tepla ve vzdálenosti a pod povrchem dobrého vodiče tepla. Myšlený zrcadlový zdroj se nachází mimo těleso.

Tím je naše úloha o proudění tepla vyřešena. Z přímé analogie vyplývá, že teplota je všude tatáž jako potenciál dvou stejných bodových nábojů. Teplota T ve vzdálenosti r od izolovaného bodového zdroje G v nekonečném prostředí je

$$T = \frac{G}{4\pi\lambda r}. \quad (12.13)$$

(To je, samozřejmě, úplná analogie s výrazem $\varphi = q/4\pi\epsilon_0 r$.) Teplotu v případě bodového zdroje spolu s jeho zrcadlovým zdrojem vyjadřuje výraz

$$T = \frac{G}{4\pi\lambda r_1} + \frac{G}{4\pi\lambda r_2}. \quad (12.14)$$

Tento vzorec nám dává teplotu v celém tělese. Několik izotermických ploch je znázorněno na obr. 12.2. Ukázány jsou také křivky vektoru \mathbf{h} , které lze dostat ze vztahu $\mathbf{h} = -\lambda\nabla T$.

Původně jsme se ptali na rozdělení teploty na povrchu. Pro bod na povrchu ve vzdálenosti ρ od osy platí $r_1 = r_2 = \sqrt{\rho^2 + a^2}$, takže

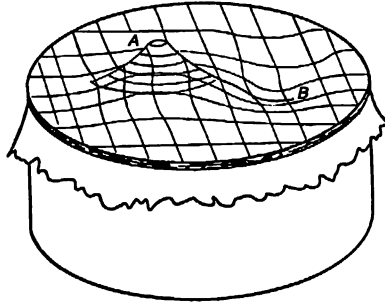
$$T_{\text{na povrchu}} = \frac{1}{4\pi\lambda} \frac{2G}{\sqrt{\rho^2 + a^2}}. \quad (12.15)$$

Tato funkce je na obrázku také zakreslena. Teplota je, přirozeně, vyšší přímo nad zdrojem než ve větší vzdálenosti. Je to úloha, kterou často potřebují řešit geofyzici. Teď vidíme, že jde o stejné problémy, jaké jsme řešili už v elektřině.

12.3 NAPNUTÁ MEMBRÁNA

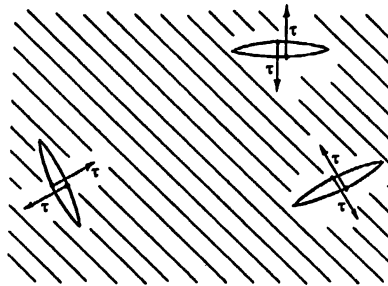
Nyní přejdeme ke zcela odlišné fyzikální situaci, která však vede k týmž rovnicím. Mějme tenkou gumovou blánu, membránu, která byla natažena na velký vodorovný rám (jako kůže na bubnu). Dále předpokládejme, že membrána je v jednom místě vysunuta nahoru a na jiném místě přitlačena dolů (obr. 12.3). Dokážeme popsat tvar její plochy? Ukážeme, jak lze tuto úlohu řešit, když výchylky membrány nejsou příliš velké.

V bláně působí síly, neboť je napnutá. Kdybychom kdekoliv v ní udělali malý řez, obě strany řezu se od sebe oddálí (obr. 12.4).



Obr. 12.3 Tenká gumová blána na válcovém rámu (jako kůže na bubnu). Jaký má tvar, je-li v bodě A vysunuta nahoru a v bodě B stlačena dolů?

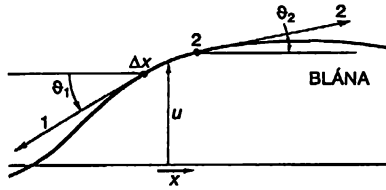
V bláně tedy existuje *povrchové napětí*, analogické s jednorozměrným napětím napjaté struny. Velikost povrchového napětí τ definujeme jako sílu připadající na *jednotkovou délku*, která udržuje pohromadě strany takového řezu, jako je jeden z těch na obr. 12.4.



Obr. 12.4 Povrchové napětí τ napnuté gumové blány je rovno síle připadající na jednotku délky a směřující kolmo na tuto délku

Nyní předpokládejme, že se díváme na vertikální řez membránou. Bude se jevit jako křivka podobná té, která je na obr. 12.5. Nechť u je vertikální výchylka membrány z její normální polohy a x, y jsou souřadnice v horizontální rovině. (Zobrazený řez je rovnoběžný s osou x .)

Uvažujme malou část plochy membrány s délkou Δx a šířkou Δy . Na tuto plošku budou působit síly povrchového napětí, a to na každou její stranu. Síla na stranu 1 (viz obrázek) bude $\tau_1 \Delta y$ a bude směřovat tangenciálně vzhledem k ploše, tj. pod úhlem ϑ_1 vzhledem k vodorovné rovině.



Obr. 12.5 Průřez vychýlenou blánou

Na stranu 2 bude působit síla $\tau_2 \Delta y$ směřující pod úhlem ϑ_2 . (Podobné síly budou působit na druhých dvou stranách plošky, ale na chvíli na ně zapomeneme.) Výsledná síla, působící na plošku od stran 1 a 2 a směřující *nahoru*, bude

$$F = \tau_2 \Delta y \sin \vartheta_2 - \tau_1 \Delta y \sin \vartheta_1.$$

Naše úvahy omezíme na malé deformace membrány, tj. na *malé sklony*. Pak můžeme $\sin \vartheta$ nahradit funkcí $\operatorname{tg} \vartheta$, kterou lze psát jako $\partial u / \partial x$. Síla potom je

$$\Delta F = \left[\tau_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_2 - \tau_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_1 \right] \Delta y.$$

Veličinu v závorkách můžeme stejně dobře napsat (pro malá Δx) i ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x.$$

Pak bude platit

$$\Delta F = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x \Delta y.$$

Další příspěvek k ΔF bude od sil působících na druhých dvou stranách plošky; výsledek je zřejmé

$$\Delta F = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \Delta x \Delta y. \quad (12.16)$$

Deformace membrány vyvolávají vnější síly. Necht f představuje sílu, která *směřuje nahoru*, připadá na *jednotku plochy* a působí na blánu (nějaký druh „tlaku“) *následkem vnějších sil*. Když je membrána v rovnováze (statický případ), musí být tato síla vyvážena vnitřní silou, kterou jsme právě vypočetli (vztah 12.16), tj.

$$f = - \frac{\Delta F}{\Delta x \Delta y}.$$

Vztah (12.16) pak můžeme psát ve tvaru

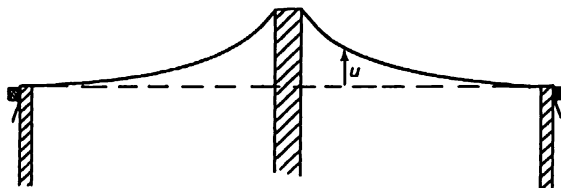
$$f = -\nabla \cdot (\tau \nabla u), \quad (12.17)$$

kde pod ∇ nyní samozřejmě rozumíme, operátor dvojrozměrného gradientu ($\partial/\partial x, \partial/\partial y$). Máme tedy diferenciální rovnici, která uvádí do vztahu $u(x, y)$ s vnějšími silami $f(x, y)$ a s povrchovým napětím $\tau(x, y)$, které se obecně mohou měnit na bláně od místa k místu. (Podobné rovnice popisují i deformace trojrozměrného pružného tělesa, ale my zůstaneme u dvou rozměrů.) Budeme se zajímat pouze o případ, kdy napětí τ je po celé bláně konstantní. Pak můžeme místo rovnice (12.17) napsat

$$\nabla^2 u = -\frac{f}{\tau}. \quad (12.18)$$

Dostali jsme další rovnici, která je stejná jako v elektrostatice, tentokrát se však omezuje na dva rozměry. Vychylka u odpovídá potenciálu φ a f/τ odpovídá ρ/ϵ_0 . Proto všechny výsledky, které jsme získali pro nekonečné nabitě roviny, dlouhé rovnoběžné dráty nebo nabitě válce, lze přímo použít na napnutou membránu.

Předpokládejme, že v některých bodech vytáhneme membránu do určité výšky, tj. na některých místech fixujeme hodnotu u . To je analogie s elektrickou situací, ve které je na příslušných místech předepsaný potenciál. Tak například můžeme vyrobit kladný „potenciál“, tlačíme-li membránu předmětem, který má průřez tvaru příslušného válcového vodiče. Tlačíme-li na blánu, řekněme, okrouhlou tyč, její povrch nabude takového tvaru, jaký ukazuje obr. 12.6. Výška u je stejná jako elektrostatický potenciál φ nabitě válcové tyče. Klesá jako $\ln(1/r)$. (Sklon, který odpovídá elektrickému poli E , klesá jako $1/r$.)



Óbr. 12.6 Průřez napnutou gumovou fólií vysunutou nahoru pomocí okrouhlé tyče. Funkce $u(x, y)$ je stejná jako elektrostatický potenciál $\varphi(x, y)$ v blízkosti velmi dlouhé nabitě tyče.

Napnutá gumová blána se často používá jako způsob experimentálního řešení elektrických úloh. Analogie se tedy využívá v zpětném směru. Různými tyčemi a pruty se membrány vysouvají do výšek, které odpovídají potenciálům soustavy elektrod. Měřením výšky se pak zjišťuje elektrický potenciál v daných elektrických podmínkách. Analogie se provádí ještě dále. Umístí-li se na membránu malé kuličky, jejich pohyb odpovídá přibližně pohybu elektronů v příslušném elektrickém poli. Tak je opravdu možné pozorovat, jak se „elektrony“ pohybují po svých trajektoriích. Tato metoda se využívá při projektování složité geometrie mnohých fotonásobičů (takových, jako ty, které se používají v scintilačních počítacích, nebo jako ten, který se používá k ovládní světelných svazků v reflektoru automobilu Cadillac). Používá se stále, ale její přesnost je ohraničena. Při nejpresnější práci je lépe určovat pole numerickými metodami pomocí velkých elektronických počítačů.

12.4 DIFUZE ELEKTRONŮ. KULOVĚ SYMETRICKÝ ZDROJ V HOMOGENNÍM PROSTŘEDÍ

Uvedeme další příklad, který vede k rovnici téhož druhu, týkající se tentokrát difuze. V 43. kapitole 1. dílu jsme se zabývali difuzí jednoho plynu v druhém. Tentokrát vezmeme jiný příklad – difuzi neutronů v takové látce jako grafit. Mluvit o grafitu (čistá forma uhlíku) jsme se rozhodli proto, že uhlík nepohlcuje pomalé neutrony. Neutrony v něm putují volně. Předtím, než jsou jádrem rozptýleny a vychýleny do nového směru, projdou v průměrném směru průměrně několik centimetrů. Proto máme-li velký grafitový blok s hranou dlouhou mnoho metrů, budou neutrony nacházející se původně v jednom místě v něm difundovat do jiných míst. Je nutné popsat jejich střední chování, tj. jejich *střední tok*.

Nechť $n(x, y, z)$ ΔV je počet neutronů v elementu objemu ΔV se středem v bodě (x, y, z) . V důsledku svého pohybu opustí některé z neutronů ΔV a jiné do něj přibudou. Je-li v jedné oblasti víc neutronů než v sousední, odejde víc neutronů z první do druhé, nežli přijde zpět; vznikne výsledný tok neutronů. Na základě stejných úvah jako v 43. kapitole 1. dílu popíšeme tok pomocí vektoru hustoty toku J . Jeho x -ová složka představuje výsledný počet neutronů procházejících za jednotku času jednotkovou plochou kolmou na směr osy x . Zjistili jsme, že

$$J_x = -D \frac{\partial n}{\partial x}, \quad (12.19)$$

kde koeficient difuze D je určen střední rychlostí v a střední volnou dráhou l mezi srážkami neutronů způsobujícími jejich rozptyl

$$D = \frac{1}{3} lv.$$

Vektorová rovnice určující J je

$$J = -D \nabla n. \quad (12.20)$$

Počet neutronů, které projdou za jednotku času nějakým plošným elementem dS , je roven $J \cdot n \, dS$, kde, jako obvykle, n je jednotkový vektor ve směru normály k plošnému elementu. Výsledný tok z *objemového elementu* pak (na základě obvyklých gaussovských úvah) bude $\nabla \cdot J \, dV$. Tento tok by způsobil pokles počtu neutronů v elementu ΔV v čase, pokud by se však v ΔV další neutrony nevytvářely (nějakým jaderným procesem). Nacházejí-li se v uvažovaném objemu zdroje, generující v jednotce objemu s neutronů za jednotku času, výsledný tok z ΔV bude roven $(s - \partial n / \partial t) \Delta V$. Pak dostaneme

$$\nabla \cdot J = s - \frac{\partial n}{\partial t}. \quad (12.21)$$

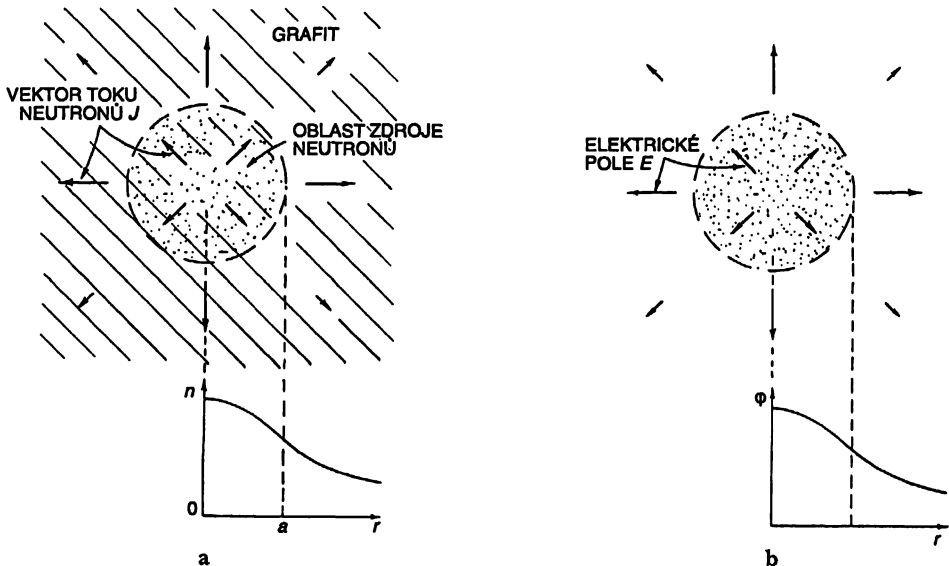
Když do (12.21) dosadíme J podle (12.20), dostaneme *rovnici difuze neutronů*

$$\nabla \cdot (-D \nabla n) = s - \frac{\partial n}{\partial t}. \quad (12.22)$$

Ve statickém případě, kdy $\partial n / \partial t = 0$, dostáváme opět rovnici (12.4). To, co víme z elektrostati-
ky, můžeme využít i k řešení úloh o difuzi neutronů. Řešme tedy nějakou úlohu. (Třeba se podívejte: „Proč řešit další úlohu, když už jsme všechny vyřešili v elektrostati-
ce?“ Tentokrát ji však můžeme vyřešit *rychleji*, neboť už *máme* elektrostati-
cké úlohy vyřešeny.)

Předpokládejme, že máme blok materiálu, v němž se, řekněme, štěpením uranu, homogenně generují neutrony v kulové oblasti s poloměrem a (obr. 12.7) Chtěli bychom vědět: Jaká je hustota neutronů kdekoli v prostoru? Nakolik homogenní je jejich hustota v oblasti, kde se generují? V jakém poměru je hustota neutronů ve středu k hustotě neutronů na povrchu oblasti jejich zdroje? Odpovědi na tyto otázky se najdou snadno. Hustota zdroje s nahrazuje hustotu ρ , takže naše úloha je totožná s úlohou o homogenně nabitě kouli. Najít n je totéž, jako najít potenciál φ . Pole uvnitř, jakož i vně, homogenně nabitě koule už jsme našli. Můžeme je integrovat, abychom dostali potenciál. Vně koule je potenciál roven $Q/4\pi\epsilon_0 r$, kde celkový náboj Q je dán výrazem $4\pi a^3 \rho/3$. Tedy

$$\varphi_{\text{vně}} = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r}. \quad (12.23)$$



Obr. 12.7 a) Neutrony vznikají homogenně v kouli s poloměrem a uvnitř velkého grafitového bloku a difundují ven. Ukazuje se, že hustota neutronů n je funkcí vzdálenosti r od středu zdroje.
 b) Analogická elektrostatická situace: homogenně nabitá koule, přičemž n odpovídá ρa a J odpovídá E

Ve vnitřních bodech je pole vytvářeno pouze nábojem $Q(r)$ uvnitř koule o poloměru r , tj. $Q(r) = 4\pi r^3 \rho/3$, takže

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}. \quad (12.24)$$

Intenzita pole roste lineárně s r . Integrováním E dostaneme

$$\varphi_{\text{uvnitř}} = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + \text{konstanta.}$$

Při poloměru a musí být $\varphi_{\text{uvnitř}}$ stejné jako $\varphi_{\text{vně}}$, takže konstanta musí být rovna $\rho a^2/2 \varepsilon_0$. (Předpokládejme, že ve velkých vzdálenostech od zdroje je φ rovno nule, což pro neutrony bude odpovídat nulovému n .) Proto

$$\varphi_{\text{uvnitř}} = \frac{\rho}{3 \varepsilon_0} \left(\frac{3 a^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right). \quad (12.25)$$

Hustotu neutronů se v naší úloze dovíme ihned. Výsledek je

$$n_{\text{vně}} = \frac{s a^3}{3 D r} \quad (12.26)$$

a

$$n_{\text{uvnitř}} = \frac{s}{3 D} \left(\frac{3 a^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right). \quad (12.27)$$

Graf n jako funkce r je na obr. 12.7.

Jaký je nyní poměr hustoty ve středu k hustotě na okraji? Ve středu ($r=0$) je hustota přímo úměrná veličině $3 a^2/2$. Na kraji ($r=a$) je přímo úměrná veličině $2 a^2/2$, tj. poměr obou hustot je roven $3/2$. Homogenní zdroj tedy negeneruje homogenní hustotu neutronů. Jak vidíte, naše vědomosti z elektrostatiky nám umožňují dobrý start do fyziky jaderných reaktorů.

Fyzikálních situací, v nichž difuze hraje velkou úlohu, je mnoho. I pohyb iontů v kapalině nebo elektronů v polovodiči probíhá podle téže rovnice. Znovu a znovu docházíme ke stejným rovnicím.

12.5 BEZVÍROVÉ PROUDĚNÍ KAPALINY. OBTĚKÁNÍ KOULE

Nyní vezměme příklad, který ve skutečnosti není příliš dobrý, neboť rovnice, které přitom použijeme, nebudou uvažovaný jev popisovat zcela obecně, ale pouze v umělé idealizované situaci. Uvažujme úlohu o proudění vody. V případě napnuté membrány představovaly naše rovnice aproximaci platící pouze pro *malé vychylky*. Při zkoumání proudění vody takovou aproximaci nebudeme provádět; musíme udělat taková omezení, která se k proudění reálné vody vůbec nehodí. Budeme se totiž zabývat pouze případem ustáleného proudění *nestlačitelné, neviskózní a neutřivé* kapaliny. Proudění pak budeme charakterizovat udáním rychlosti $v(r)$ jako funkce polohy r . Je-li ustálené (jediný případ pro který existuje elektrostatická analogie), nezávisí v na čase. Je-li ρ hustota kapaliny, pak ρv znamená hmotnost, jež prochází jednotkovou plochou za jednotku času. Podle principu zachování látky bude divergence vektoru ρv obecně rovna změně hmotnosti látky v jednotkovém objemu za jednotku času. Budeme předpokládat, že nedochází k procesům nepřetržitého vznikání nebo zanikání hmotnosti. Princip zachování látky pak požaduje, aby $\nabla \cdot \rho v = 0$. (Obecně by na pravé straně této rovnice mělo být $-\partial \rho / \partial t$, ale ρ se měnit nemůže, neboť naše kapalina je nestlačitelná.) Protože ρ je všude stejné, můžeme jím krátit a naše rovnice má jednoduchý tvar:

$$\nabla \cdot v = 0.$$

Výborně! Opět dostáváme elektrostatiku (bez nábojů); je to právě taková rovnice jako $\nabla \cdot E = 0$. Ale není to tak jednoduché. Elektrostatika nevyplyvá jen z toho, že $\nabla \cdot E = 0$. Zakládá se na *páru* rovnic. Jedna rovnice nám mnoho nepoví; potřebujeme ještě doplňující rovnici. Aby byla shoda

s elektrostatikou, mělo by také platit, že *rotace* vektoru v je rovna nule. Ale pro reálné kapaliny to obecně neplatí. Ve většině kapalin obvykle nějaké víření vzniká. musíme se tedy omezit na situace, v nichž víření kapaliny nenastává. Takové proudění se často nazývá *bezvírové*. Tak či onak, přijmeme-li všechny naše předpoklady, dokážeme si představit takový případ proudění kapaliny, který je analogický s elektrostatikou. Požadujeme tedy, aby

$$\nabla \cdot v = 0 \quad (12.28)$$

a

$$\nabla \times v = 0. \quad (12.29)$$

Chceme zdůraznit, že i když ty případy, v nichž proudění kapaliny probíhá podle těchto rovnic, nepředstavují ani zdaleka většinu možných případů, několik jich přece existuje. Musí to být takové případy, kdy můžeme zanedbat povrchové napětí, stlačitelnost a viskozitu a kdy můžeme dále předpokládat, že proudění je bezvírové. Pro reálnou vodu platí tyto předpoklady tak zřídka, že matematik John von Neumann řekl, že lidé, kteří analyzují rovnice (12.28) a (12.29), zkoumají „suchou vodu“. (Problémem proudění kapaliny se budeme podrobněji zabývat v kapitolách 40 a 41.)

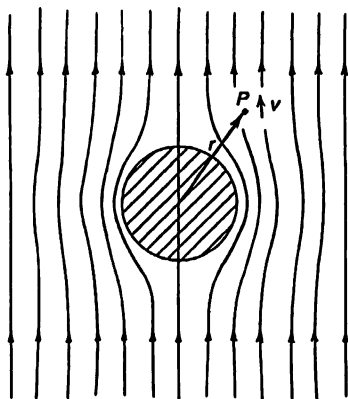
Protože $\nabla \times v = 0$, rychlost „suché vody“ lze zapsat jako gradient nějakého potenciálu:

$$v = -\nabla\psi. \quad (12.30)$$

Jaký fyzikální význam má ψ ? Žádný zvláštní. Rychlost lze napsat jako gradient potenciálu právě proto, že proudění je bezvírové. ψ se nazývá *potenciál rychlosti* pouze na základě analogie s elektrostatikou, ale s potenciální energií nespojuje takovým způsobem jako ϕ . Protože divergence vektoru v je rovna nule, dostáváme

$$\nabla \cdot (\nabla\psi) = \nabla^2\psi = 0. \quad (12.31)$$

Potenciál rychlosti ψ vyhovuje téže diferenciální rovnici jako elektrostatický potenciál v prázdném prostoru (tj. tam, kde $\rho=0$).



Obr. 12.8 Pole rychlosti při bezvírovém obtékání koule kapalinou

Vezměme nějakou úlohu o bezvírovém proudění a přesvědčíme se, zda ji dokážeme řešit metodami, které jsme se naučili. Uvažujme kouli padající v kapalině. Bude-li se pohybovat příliš pomalu, budou důležité sily vnitřního tření, které zanedbáváme. Bude-li se pohybovat příliš rychle, v její stopě se objeví malé víry (turbulence) a bude docházet k určitému víření vody. Ale nepohybuje-li se koule příliš rychle, ani příliš pomalu, proudění vody bude více méně vyhovovat našim předpokladům a pohyb vody můžeme popsat našimi jednoduchými rovnicemi.

Co se děje, je vhodné popisovat ve vztažné soustavě *spojené s koulí*. V této vztažné soustavě si položíme otázku: jak voda proudí okolo nepohyblivé koule, když proudění ve velkých vzdálenostech je homogenní, tj. když daleko od koule je tok všude stejný? Charakter proudění v blízkosti koule je znázorněn na *obr. 12.8* pomocí proudnic. Tyto křivky, které jsou vždy rovnoběžné s v , odpovídají siločárám elektrického pole. Chceme dostat kvantitativní popis pole rychlosti, tj. výraz pro rychlost v libovolném bodě P .

Rychlost můžeme dostat z gradientu ψ , proto nejprve vypočítejme potenciál. Chceme najít potenciál, který všude splňuje rovnici (12.31) a kromě toho vyhovuje dvěma omezením: 1. ve vnitřní oblasti ohraničené povrchem naší koule není proudění a 2. ve velkých vzdálenostech je proudění konstantní. Aby bylo vyhověno podmínce 1, musí být složka v , kolmá na povrch koule, rovna nule. To znamená, že $\partial\psi/\partial r$ je rovno nule při $r = a$. Aby se vyhovělo podmínce 2, musí platit, že $\partial\psi/\partial z = v_0$ se všech bodech, pro které $r \gg a$. Přesně vzato, elektrostatický případ, který odpovídá naší úloze, neexistuje. Naše úloha ve skutečnosti odpovídá umístění koule s nulovou permitivitou do homogenního elektrického pole. Kdybychom znali řešení úlohy o kouli s relativní permitivitou ϵ_r umístěné v homogenního poli, pak bychom položením $\epsilon_r = 0$ ihned dostali řešení naší úlohy.

Tuto konkrétní elektrostatickou úlohu jsme dosud vlastně podrobněji nepočítali. Udělejme to však nyní. (Mohli bychom přímo řešit úlohu o toku s v a ψ , ale budeme používat E a φ , neboť jsme na ně zvyklí.)

Úloha vyžaduje najít takové řešení rovnice $\nabla^2\varphi = 0$, aby pro velké hodnoty r byla řešením rovnice $E = -\nabla\varphi$ konstanta, řekněme E_0 , a aby při $r = a$ byla radiální složka vektoru E rovna nule, tj. aby platilo

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = 0. \quad (12.32)$$

Naše úloha obsahuje nový typ hraniční podmínky, kdy není na nějaké ploše konstantou φ ale $\partial\varphi/\partial r$. To je trochu rozdílné. Není snadné dostat odpověď ihned. Především bez koule by bylo φ rovno $-E_0 z$. Pak by vektor E měl všude směr osy z a konstantní velikost E_0 . Už jsme rozebírali případ dielektrické koule, která je uvnitř homogenně polarizovaná, a zjistili jsme, že pole uvnitř takové polarizované koule je homogenní a mimo ni je stejné jako pole bodového dipólu umístěného v jejím středu. Proto zkusme předpokládat, že námi hledané řešení představuje superpozici homogenního pole a pole dipólu. Potenciál dipólu (kapitola 6) je roven $pz/4\epsilon_0 r^3$. Předpokládejme tedy, že

$$\varphi = -E_0 z + \frac{pz}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (12.33)$$

Protože pole dipólu klesá jako $1/r^3$, dostáváme pro velké vzdálenosti právě intenzitu pole E_0 . Naš odhad automaticky vyhoví podmínce 2. Ale co považovat za moment dipólu p ? Abychom to zjistili, musíme na φ aplikovat další podmínku, tj. vztah (12.32). Musíme derivovat φ podle r , a to,

samozejmě, při konstantním úhlu ϑ . Proto je pohodlnější, vyjádříme-li nejdříve φ pomocí r a ϑ místo z a r . Protože $z = r \cos \vartheta$, dostáváme

$$\varphi = -E_0 r \cos \vartheta + \frac{p \cos \vartheta}{4\pi \varepsilon_0 r^2}. \quad (12.34)$$

Radiální složka E je

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial r} = +E_0 \cos \vartheta + \frac{p \cos \vartheta}{2\pi \varepsilon_0 r^3}. \quad (12.35)$$

Při $r = a$ musí být rovna nule pro všechna ϑ . To bude tehdy, když

$$p = -2\pi \varepsilon_0 a^3 E_0. \quad (12.36)$$

Dobře si všimněte, že kdyby oba členy ve vztahu (12.35) neobsahovaly stejnou závislost na ϑ , nebylo by možné zvolit p tak, aby výraz na pravé straně (12.35) dával nulu při $r = a$ pro všechny úhly. Ten fakt, že to nastává, znamená, že při psaní vyjádření (12.33) jsme hádali správně. Ovšem, přitom jsme se dívali dopředu; věděli jsme, že budeme potřebovat druhý člen, který a) vyhovuje vztahu $\nabla^2 \varphi = 0$ (každé reálné pole mu vyhovuje), b) závisí na $\cos \vartheta$, c) při velkých r klesá k nule. Pole dipólu je jediné, které splňuje všechny tyto tři podmínky.

Po dosazení (12.36) dostaneme pro náš potenciál vyjádření

$$\varphi = -E_0 \cos \vartheta \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right). \quad (12.37)$$

Řešení původní úlohy o proudění kapaliny můžeme psát v jednoduchém tvaru

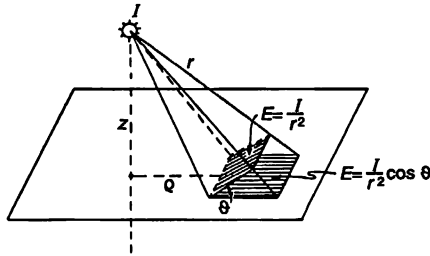
$$\psi = -v_0 \cos \vartheta \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right). \quad (12.38)$$

Z tohoto potenciálu lze přímo vyjádřit v . Dále se touto problematikou zabývat nebudeme.

12.6 OSVĚTLENÍ. HOMOGENNÍ OSVĚTLENÍ ROVINY

V tomto článku se obrátíme k úplně odlišné fyzikální úloze – vždyť chceme ilustrovat velkou rozmanitost možností. Tentokrát se budeme zabývat něčím, co vede k *integrálu* téhož typu, jako jsme dostali v elektrostatice. (Máme-li matematickou úlohu, v níž se objevuje určitý integrál, a je-li to tentýž integrál jako ten, s nímž jsme se už setkali v jiné úloze, pak už o jeho vlastnostech leccos víme.) Náš příklad vezmeme z osvětlovací techniky. Nechť se světelný zdroj nachází ve vzdálenosti a nad rovinou plochou. Jaké je osvětlení plochy, tj. jaký světelný tok dopadá (za jednotku času) na jednotku uvažované plochy (*obr. 12.9*)? Předpokládejme, že jde o kulově symetrický zdroj, takže světlo vyzářuje do všech směrů stejně. Pak se světelný tok, který prochází jednotkovou plochou k němu nastavenou *pod pravým úhlem*, tedy hustota světelného toku, mění nepřímo úměrně s druhou mocninou vzdálenosti. Je zřejmé, že hustotu světelného toku ve směru normály

k toku určuje vzorec stejného typu jako intenzitu elektrického pole bodového zdroje. Dopadají-li světelné paprsky na plochu pod úhlem ϑ k její normále, osvětlení E , tj. světelný tok dopadající na jednotku plochy, se zmenší na svůj $(\cos \vartheta)$ -násobek, neboť stejný tok nyní dopadá na plochu, která je větší $(1/\cos \vartheta)$ -krát.



Obr. 12.9 Osvětlení E_n plochy je rovno světelnému toku dopadajícímu (za jednotku času) na plošnou jednotku této plochy.

Označíme-li svítivost našeho zdroje I , pak E_n , tedy osvětlení plochy, je

$$E_n = \frac{I}{r^2} (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}), \quad (12.39)$$

kde \mathbf{e}_r je jednotkový vektor směřující od zdroje a \mathbf{n} je jednotkový vektor ve směru normály k ploše. Osvětlení E_n odpovídá normálové složce intenzity elektrického pole vytvořeného bodovým nábojem velikosti $4\pi\epsilon_0 I$. Uvědomíme-li si to, zjistíme, že je možné při jakémkoliv rozdělení světelných zdrojů dostat odpověď řešením odpovídající elektrostatické úlohy. Přitom počítáme vertikální složku intenzity elektrického pole na rovině vyvolanou rozdělením náboje tímž způsobem jako pro rozdělení světelných zdrojů.¹⁵⁾

Mějme následující příklad. Pro nějakou speciální experimentální situaci chceme zařídit, aby horní povrch stolu měl velmi homogenní osvětlení. Máme k dispozici dlouhá fluorescenční svítidla ve tvaru trubice, která vyzařují homogenně podél jejich délek. Stůl můžeme osvětlit umístěním zářivek ve tvaru trubice do pravidelných řad na stropě, který je ve výšce z nad stolem. Jaká je nejširší mezera mezi sousedními trubicemi, kterou bychom neměli překročit, chceme-li, aby osvětlení povrchu bylo homogenní s přesností, řekněme, na jednu tisícinu? Odpověď: 1. Najděte elektrické pole od homogenně nabitě drátěné sítě s mezerou b . 2. Vypočítejte vertikální složku elektrického pole. 3. Zjistíte, jaké musí být b , aby výšky pole nepřesahovaly jednu tisícinu.

V kapitole 7 jsme viděli, že elektrické pole mřížky nabitých drátů lze vyjádřit ve tvaru součtu členů, z nichž každý dává sinusovou změnu pole s periodou b/n , kde n je přirozené číslo. Amplitudu jakéhokoliv z těchto členů vyjadřuje vztah (7.44):

$$F_n = A_n \cdot e^{-2\pi n z / b}.$$

¹⁵⁾ Protože hovoříme o nekoherentních zdrojích, jejichž intenzity se vždy sčítají lineárně, budou mít analogické elektrické náboje vždy stejné znaménko. Kromě toho naše analogie se týká pouze světelné energie dopadající na vrchní stranu neprůsvitné plochy, takže do našeho integrálu musíme vzít pouze zdroje, které svítí na plochu (a přirozeně, ne zdroje, umístěné pod plochou).

Chceme-li znát pouze pole v bodech ne příliš blízkých mřížce, stačí uvažovat pouze $n = 1$: Pro úplné řešení by bylo třeba uvažovat koeficienty A_n , což jsme ještě nedělali (ačkoliv je to jednoduchý výpočet). Protože však potřebujeme pouze A_1 , můžeme jeho hodnotu odhadnout jako přibližně rovnu průměrné intenzitě pole. Chceme-li, aby tento součinitel byl 10^{-3} , zjistíme, že b musí být 0,91z. Uděláme-li mezeru mezi zářivkami rovnu třem čtvrtinám vzdálenosti od stropu, bude exponenciální součinitel $1/4000$ a dostáváme koeficient bezpečnosti 4, takže jsme si úplně jisti, že osvětlení bude konstantní s přesností jedné tisíciny. (Přesný výpočet ukazuje, že A_1 je ve skutečnosti dvakrát větší než střední intenzita pole, takže přesná odpověď je $b = 0,8z$.) Je trochu překvapující, že pro takové homogenní osvětlení vychází povolený rozestup mezi zářivkami tak velký.

12.7 „FUNDAMENTÁLNÍ JEDNOTA“ PŘÍRODY

V této kapitole jsme chtěli ukázat, že při studiu elektrostatiky jste se současně učili ovládat mnohá fyzikální témata. Jste-li si toho vědomi, lze se celou fyziku naučit za omezený počet let.

Ale na konci takové diskuze se vnučuje otázka: *Proč jsou si rovnice různých jevů tak podobné?* Mohli bychom říci: „Je to fundamentální jednota přírody.“ Ale co to znamená? Co by *mohl* takový výrok znamenat? Mohl by prostě znamenat, že rovnice jsou pro různé jevy podobné; ale potom jsme, samozřejmě, nedali žádné vysvětlení. „Fundamentální jednota“ by mohla dále znamenat, že vše je vytvořeno z téhož materiálu, a proto se podřizuje stejným rovnicím. To zní jako dobré vysvětlení, ale přemýšlejme. Elektrostatický potenciál, difuze neutronů, tok tepla – opravdu máme co dělat s tímž materiálem? Opravdu si dokážeme představit, že elektrostatický potenciál je *fyzikálně* totožný s teplotou nebo hustotou částic? Pohyb membrány určitě *není* jako teplota. Proč potom existuje „fundamentální jednota“?

Bližší pohled na fyziku rozmanitých jevů ukazuje, že jejich rovnice ve skutečnosti nejsou identické. Rovnice, kterou jsme našli pro difuzi neutronů, je pouze přiblížením, které je dobré, když vzdálenost, kterou sledujeme, je velká ve srovnání se střední volnou dráhou neutronů. Kdybychom se podívali blíže, uviděli bychom, jak se pohybují jednotlivé neutrony. Pohyb jednotlivého neutronu vypadá docela jinak než hladká změna, kterou dostaneme řešením diferenciální rovnice. Diferenciální rovnice představuje přiblížení, neboť předpokládáme, že neutrony jsou v *prostoru* rozděleny spojitě.

Je možné, že *toto* je klíčem k řešení problému? Že to, co je všem jevům společné, je *prostor*, ten rámeček, do něž je fyzika vložena? Pokud jsou věci v prostoru dostatečně hladké, budou v jejich popisu důležitými rychlosti změny veličin v závislosti na poloze v prostoru. Právě to je příčina, proč vždy dostáváme rovnici s gradientem. Derivace se *musí* objevit ve formě gradientu nebo divergence; protože zákony fyziky jsou *nezávislé na směru*, musí být možné vyjádřit ve vektorovém tvaru. Rovnice elektrostatiky jsou nejjednoduššími vektorovými rovnicemi, jež je vůbec možné dostat, neboť obsahují pouze prostorové derivace veličin. Jakýkoliv *jednoduchý* problém, nebo zjednodušený komplikovaného problému, musí vypadat jako elektrostatika. To, co je všem našim úlohám společné, je to, že obsahují *prostor* a že to, co je ve skutečnosti složitým jevem, jsme *imitovali* jednoduchou diferenciální rovnicí.

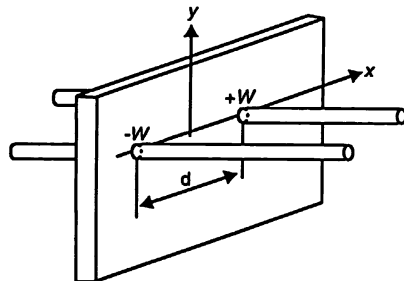
To nás vede k další zajímavé otázce. Platí stejné tvrzení snad i pro *elektrostatické* rovnice? Jsou také správné pouze jako vylázaná imitace ve skutečnosti mnohem složitějšího mikroskopického světa? Mohl by se reálný svět skládat z malých X -onů, které by bylo možno vidět jen na *neobyčejně* malých vzdálenostech? A že našimi měřeními vždy vykonáváme pozorování v tak velkém měřítku, že tyto malé X -ony rozlišit nemůžeme, a právě to je důvod, proč dostáváme diferenciální rovnice?

Naše, v současnosti nejúplnější, teorie elektrodynamiky má opravdu své problémy na velmi malých vzdálenostech. Proto je v principu možné, že tyto rovnice představují vyhlazené verze něčeho. Ukazují se být správnými až do vzdáleností asi 10^{-16} m, ale pak začínají vypadat jako chybné. Je možné, že existuje nějaký dosud neobjevený fundamentální „mechanismus“ a že podrobnosti fundamentální složitosti jsou v rovnicích hladkého typu skryty – právě tak, jako je to v „hladké“ difuzi neutronů. Ale dosud nikdo nevypracoval úspěšnou teorii, která by pracovala takovým způsobem.

Je dost divné, že, jak se ukazuje (z příčin, které nechápeme), kombinace teorie relativity a kvantové mechaniky, nakolik je známe, zřejmě *zakazuje* vymyslet rovnici, která se fundamentálně liší od rovnice (12.4) a nevede současně k nějakému rozporu. Nejde jen o nesouhlas s experimentem, ale o *vnitřní rozpor*. Takový jako například předpověď, že součet pravděpodobností všech možných jevů není roven jedné, nebo že energie může někdy vycházet jako komplexní číslo nebo nějaká jiné podobná hloupost. Nikdo doposud nevytvořil teorii elektřiny, v níž by se $\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon_0$ chápalo jako vyhlazené přiblížení nějakého hlubšího mechanismu a která by přesto nevedla k nějaké absurdnosti. Ale, a to je třeba dodat, je také pravda, že předpoklad o tom, že $\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon_0$ platí pro všechny vzdálenosti, ať jsou jakkoliv malé, vede k jemu vlastním absurditám (elektrická energie elektronu je nekonečná) – absurditám, z nichž zatím nikdo nezná východisko.

PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 12.1** ■ Z měděného drátu s průřezem o průměru b je vyroben prstenec poloměru a , při čemž $b \ll a$. Prstenec je umístěn doprostřed plastické koule, jejíž poloměr je mnohem větší než poloměr prstence. Pomocí střídavého magnetického pole vyvoláme v prstenci indukovaný proud, který prstenec zahřívá a vyvíjí množství tepla W jouů za sekundu. Teplota na povrchu koule je rovna T_0 . Čemu je rovna teplota ve středu koule v ustáleném stavu?
- 12.2** ■ V úloze 5.10 byl uveden zjednodušený model popisu tepelné bilance Země. Jiný, rovněž silně zjednodušený model je založen na předpokladu, že uvnitř Země existuje jádro poloměru a s neomezenou tepelnou vodivostí. Jaký bude poloměr tohoto jádra, je-li jeho teplota 2500°C a koeficient tepelné vodivosti materiálů obklopujících jádro je $\lambda = 0,03 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Vezměte přitom v úvahu, že Země za rok uvolňuje $8 \cdot 10^{20} \text{ J}$ tepla.
- 12.3** ■ a) V řadě případů je možno vyjádřit elektrostatický potenciál φ ve tvaru $\varphi = f(r) \cos \vartheta = f(r)z/r$, kde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Takový potenciál se objevuje například při řešení úlohy o obtékání koule „suchou“ vodou. Rozložíme-li funkci $f(r)$ do řady $f(r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n r^n$, budou pro potenciál φ vyhovující Laplaceově rovnici jen dva koeficienty b_n nenulové. Najděte je.
- b) V dvourozměrné úloze může být potenciál φ zapsán ve tvaru $\varphi = g(\varrho) \cos \vartheta = g(\varrho) \cdot \frac{z}{\varrho}$, $g(\varrho) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \varrho^n$, kde $\varrho^2 = y^2 + z^2$. Najděte nenulové koeficienty c_n v případě, že potenciál vyhovuje Laplaceově rovnici. Při řešení použijte kartézskou soustavu souřadnic.
- 12.4** ■ Dvě tenké vodovodní trubky umístěné rovnoběžně ve vzájemné vzdálenosti d procházejí kolmo skrz širokou stěnu tloušťky t . Koeficient tepelné vodivosti stěny je λ a její teplota ve velké vzdálenosti od trubek je T_0 . Trubkou, která vstupuje do stěny v bodě $x = +d/2$ teče horká voda, která předává stěně W wattů tepla. Druhou trubkou, která vstupuje do stěny v bodě $x = -d/2$, teče studená voda, která naopak od stěny odebírá $-W$ wattů tepla (viz obrázek). Považujte trubky za nekonečně dlouhé a úlohu za dvojrozměrnou. Najděte teplotu v bodě P se souřadnicemi $x = 100 d$, $y = 100 d$. Nechť $T_0 = 20^\circ\text{C}$, $d = 50 \text{ cm}$, $\lambda = 0,03 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $W = 200 \text{ W}$ a tloušťka stěny je rovna 10 cm . Řešte úlohu v rozumném přiblížení.



Magnetostatika

13.1 MAGNETICKÉ POLE

13.2 ELEKTRICKÝ PROUD. ZACHOVÁNÍ NÁBOJE

13.3 MAGNETICKÁ SÍLA PŮSOBÍCÍ NA PROUD

13.4 MAGNETICKÉ POLE STACIONÁRNÍCH PROUDŮ.

AMPÉRŮV ZÁKON

13.5 MAGNETICKÉ POLE PŘÍMÉHO VODIČE

A SOLENOIDU. ATOMOVÉ PROUDY

13.6 MAGNETICKÁ A ELEKTRICKÁ POLE V TEORII

RELATIVITY

13.7 TRANSFORMACE PROUDŮ A NÁBOJŮ

13.8 SUPERPOZICE. PRAVIDLO PRAVÉ RUKY

13.1 MAGNETICKÉ POLE

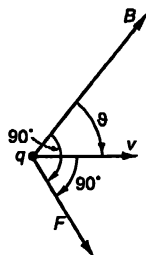
Přečtěte si znovu kapitolu: 15, díl 1, Speciální teorie relativity

Síla působící na elektrický náboj závisí nejen na jeho poloze, ale i na rychlosti jeho pohybu. Každý bod prostoru je charakterizován dvěma vektorovými veličinami, jež určují sílu působící na náboj. První je *elektrická síla*, která určuje silovou složku nezávislou na pohybu náboje. Popisujeme ji intenzitou elektrického pole E . Druhou je silová složka závislá na rychlosti náboje, kterou nazýváme *magnetická síla*. Tato magnetická síla má podivný směrový charakter. V každém bodě prostoru závisí i *směr*, i *velikost* této síly na směru pohybu částice: směr této síly je v každém okamžiku kolmý na směr rychlosti. V libovolném bodě je síla kolmá na *pevný směr v prostoru* (obr. 13.1) a velikost této síly je úměrná *složce* rychlosti kolmé na tento význačný směr. Všechny tyto vlastnosti lze vystihnout definicí vektoru indukce B magnetického pole, který určuje zmíněný směr v prostoru, i konstantu úměrnosti. Pomocí tohoto vektoru je magnetická síla vyjádřena jako $qv \times B$.

Celkovou elektromagnetickou sílu působící na náboj pak můžeme psát ve tvaru

$$F = q(E + v \times B) \quad (13.1)$$

a nazýváme ji *Lorentzova síla*.



Obr. 13.1 Složka síly působící na pohybující se náboj závislá na rychlosti je kolmá na v a na směr B . Je úměrná složce v kolmé na B , tj. úměrná $v \sin \theta$.

O existenci magnetické síly se snadno přesvědčíme, přiložíme-li tyčový magnet těsně k obrazovce. Vychýlení elektronového paprsku svědčí o tom, že přítomnost magnetu se projevuje silou působící na elektrony, která je kolmá na směr jejich pohybu, jak to bylo popsáno v 12. kapitole 1. dílu této knihy.

Jednotka magnetického pole je zřejmě newton · sekunda na coulomb · metr. A stejnou jednotkou je i volt · sekunda na metr čtvereční. Nazývá se weber na metr čtvereční nebo *tesla*.

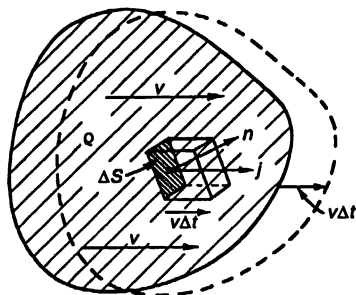
13.2 ELEKTRICKÝ PROUD. ZACHOVÁNÍ NÁBOJE

Zamysleme se nad tím, jak je možné chápat magnetické síly působící na vodiče, jimiž tečou elektrické proudy. Musíme si ujasnit, co budeme chápat pod proudovou hustotou. Elektrické proudy, to jsou elektrony nebo jiné náboje pohybující se takovým způsobem, že v souhrnu vytváří tok v jistém směru. Hustotu toku náboje můžeme charakterizovat vektorem, který určuje množství náboje procházejícího za jednotku času jednotkovou plochou povrchovým elementem kolmým na směr toku (stejně jako v případě tepelného toku). Takovýto tok nazýváme *proudová hustota* a označujeme jej vektorem j . Tento vektor směřuje podél pohybu náboje. Zvolíme-li malou plošku ΔS v daném místě látky, množství náboje protékající touto ploškou za jednotku času můžeme vyjádřit ve tvaru

$$j \cdot n \Delta S, \quad (13.2)$$

kde n je jednotkový vektor normály k ploše ΔS .

Proudová hustota souvisí se střední rychlostí toku nábojů. Předpokládejme takové rozdělení nábojů, které vede k usměrněnému pohybu se střední hodnotou rychlosti v . Prochází-li toto rozdělení povrchovým elementem ΔS , je náboj Δq procházející za čas Δt povrchovým elementem roven náboji obsaženému v rovnoběžnostěnu se základnou ΔS a výškou $v \Delta t$, jak to ukazuje obr. 13.2.



Obr. 13.2 Pohybuje-li se náboj rozložený s hustotou ρ rychlostí v , projde za jednotku času plochou ΔS náboj $\rho v \cdot n \Delta S$

Objem tohoto rovnoběžnostěnu je součinem dvou faktorů, z nichž jeden je $v \Delta t$ a druhý je průmět ΔS do roviny kolmé na v . Násobíme-li tento objem hustotou náboje ρ , dostaneme Δq . Proto můžeme psát

$$\Delta q = \rho v \cdot n \Delta S \Delta t.$$

Náboj, který prošel za jednotku času, je pak roven $\rho v \cdot n \Delta S$, a proto máme

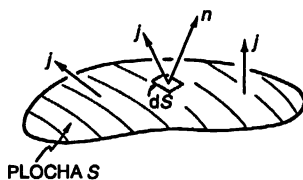
$$j = \rho v. \quad (13.3)$$

Skládá-li se rozdělení nábojů z jednotlivých nábojů, např. elektronů, z nichž každý má náboj q a pohybují se střední rychlostí v , můžeme proudovou hustotu vyjádřit ve tvaru

$$j = Nq v. \quad (13.4)$$

Celkový náboj procházející za jednotku času nějakou plochou S se nazývá *elektrický proud* I . Je roven integrálu normálové složky toku všemi elementy povrchu (obr. 13.3):

$$I = \int_S j \cdot n \, dS. \quad (13.5)$$

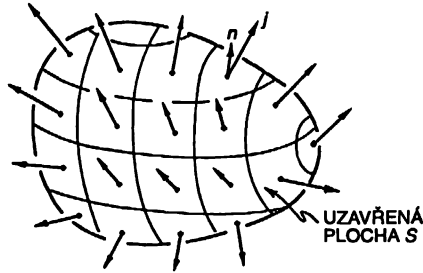


Obr. 13.3 Proud I procházející plochou S je roven $\int j \cdot n \, dS$

Proud vycházející z uzavřené plochy S představuje rychlost, s níž náboj opouští objem Vohraničený plochou S . Jeden ze základních fyzikálních zákonů hovoří o tom, že *elektrický náboj je nezničitelný*; nikdy se neztrácí a nevzniká. Elektrické náboje se mohou pohybovat z místa na místo, ale nikdy se neobjevují z ničeho nic. Říkáme, že *náboj se zachovává*. Vytéká-li v konečném důsledku z uzavřené plochy proud, musí se odpovídajícím způsobem zmenšovat množství náboje

v objemu ohraničeném touto plochou (obr. 13.4). Zákon zachování náboje proto lze vyjádřit ve tvaru

$$\oint_{\text{libovolná uzavřená plocha}} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, dS = -\frac{d}{dt}(Q_{\text{uvnitř}}). \quad (13.6)$$



Obr. 13.4 Integrál $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}$ přes uzavřenou plochu je roven rychlosti změny celkového náboje Q uvnitř této plochy.

Vnitřní náboj můžeme vyjádřit jako objemový integrál hustoty náboje

$$Q_{\text{uvnitř}} = \int_{\text{uvnitř } S} \rho \, dV. \quad (13.7)$$

Použijeme-li vztah (13.6) pro malý objem dV , integrál na levé straně (13.6) je roven $\nabla \cdot \mathbf{j} \Delta V$. Vnitřní náboj je $\rho \Delta V$, a proto zákon zachování náboje lze napsat i ve tvaru

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (13.8)$$

(Opět Gaussova věta z matematiky!)

13.3 MAGNETICKÁ SÍLA PŮSOBÍCÍ NA PROUD

Nyní už jsme připraveni k tomu, abychom určili sílu, jež působí v magnetickém poli na vodič, kterým teče proud. Proud se skládá z nabitých částic, které se pohybují podél vodiče rychlostí v . Na každý náboj působí příčná síla

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

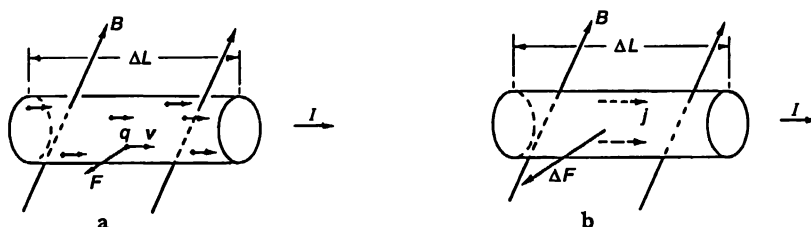
(obr. 13.5). Je-li v objemové jednotce N takových nábojů, pak v malém objemu ΔV vodiče je jich $N\Delta V$. Celková magnetická síla $\Delta \mathbf{F}$ působící na objem ΔV je součtem sil působících na jednotlivé náboje, tj.

$$\Delta \mathbf{F} = (N\Delta V)(q\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Jenže Nqv je právě j , a proto

$$\Delta F = j \times B \Delta V \quad (13.9)$$

(obr. 13.5 b). Síla působící na objemovou jednotku je rovna $j \times B$.



Obr. 13.5 Magnetická síla působící na vodič, jímž protéká proud, je rovna součtu sil působících na jednotlivé pohybující se náboje

Jestliže vodičem, jehož plocha příčného řezu je rovna S , teče proud rovnoměrně, můžeme za objemový element zvolit váleček se základnou S a délkou ΔL . Potom

$$\Delta F = j \times B S \Delta L. \quad (13.10)$$

Velikost jS můžeme nazvat *vektorem proudu* I ve vodiči. (Jeho velikost určuje elektrický proud ve vodiči a jeho směr je podél vodiče.) Proto můžeme psát

$$\Delta F = I \times B \Delta L. \quad (13.11)$$

Síla působící na jednotkovou délku vodiče je rovna $I \times B$.

Tato rovnice vyjadřuje důležitý výsledek, který spočívá v tom, že magnetická síla působící na vodič proto, že se v něm pohybují náboje, závisí jen na celkovém proudu, a ne na množství náboje neseného každou z částic nebo dokonce na jeho znaménku! Magnetická síla, která v blízkosti magnetu působí na vodič, se projeví vychýlením vodiče při zapnutí proudu tak, jak to bylo popsáno v 1. kapitole (obr. 1.6)

13.4 MAGNETICKÉ POLE STACIONÁRNÍCH PROUDŮ. AMPÉRŮV ZÁKON

Viděli jsme, že na vodič v magnetickém poli vytvářeném např. magnetem působí síla. Podle zákona akce a reakce bychom mohli očekávat, že bude existovat síla působící na zdroj magnetického pole, tj. na magnet, když vodičem protéká proud¹⁶⁾. Takové síly opravdu existují a můžeme se o nich přesvědčit pozorováním odklonu stříelky kompasu v blízkosti vodiče, jímž prochází elektrický proud. Dále víme, že mezi magnety existuje silové působení, a proto můžeme usuzovat, že vodič sám vytváří magnetické pole, když jím teče proud. Pohybující se náboje tedy *vytvářejí* magnetické pole. Nyní se pokusme najít zákony, jež určují, jaká pole se vytvoří. Otázka zní: Je-li dán proud, jaké bude magnetické pole jím vytvořené? Odpověď na tuto otázku daly tři kritické experimenty a Ampérův důmyslný teoretický důkaz. Přeskočíme tento zajímavý historický vývoj

¹⁶⁾ Později však uvidíme, že takovýto předpoklad *není* obecně správný pro elektromagnetické síly!

a pouze se zmíníme o tom, že platnost Maxwellových rovnic byla dokázána velkým počtem experimentů. Maxwellovy rovnice budou naším výchozím bodem. Zanedbáme-li v těchto rovnicích členy obsahující derivace podle času, dostaneme rovnice *magnetostatiky*:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (13.12)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}. \quad (13.13)$$

Tyto rovnice platí jen tehdy, jsou-li všechny hustoty elektrických nábojů konstantní a všechny proudy stacionární, takže elektrická a magnetická pole se s časem nemění – obě pole jsou „statická“.¹⁷⁾

Je třeba poznamenat, že předpoklad statické magnetické situace není docela oprávněn, neboť ke vzniku magnetického pole jsou potřebné proudy – a proudy vznikají pouze při pohybu nábojů. Magnetostatika je proto pouze aproximací. Souvisí se speciálním druhem dynamické situace, kdy se pohybuje *velký počet* nábojů a tento pohyb lze aproximovat *ustáleným* tokem náboje. Jen tehdy můžeme hovořit o proudové hustotě \mathbf{j} , která se v čase nemění. Kdybychom chtěli být přesnější, měli bychom tuto část nazývat zkoumáním stacionárních proudů. Předpokládáme-li stacionárnost všech polí, můžeme v úplném systému Maxwellových rovnic (2.41) vynechat členy $\partial \mathbf{E} / \partial t$ a $\partial \mathbf{B} / \partial t$, a tak dostaneme již uvedenou dvojici rovnic (13.12) a (13.13). Všimněte si, že divergence rotace libovolného vektoru je nevyhnutelně nula, a proto rovnice (13.13) vyžaduje, aby $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$. Platí-li rovnice (13.8), bude to splněno pouze tehdy, když $\partial \rho / \partial t$ je rovno nule. To platí tehdy, když se \mathbf{E} s časem nemění, takže naše předpoklady jsou konzistentní.

Podmínka $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ znamená, že můžeme uvažovat jen takové náboje, které se pohybují po uzavřených drahách. Můžou např. téct ve vodičích tvořících uzavřené smyčky, které nazýváme obvody. Obvody mohou, samozřejmě obsahovat generátory nebo baterie, které udržují tok nábojů. Nesmí však obsahovat kondenzátory, které se nabíjejí nebo vybíjejí. (Později, samozřejmě, rozšíříme teorii i na dynamická pole, ale nejdříve se budeme zabývat jednodušším případem stacionárních proudů.)

Nyní si všimneme rovnic (13.12) a (13.13) a zamyslíme se nad tím, co znamenají. První rovnice říká, že divergence \mathbf{B} je rovna nule. Porovnáme-li ji s analogickou rovnicí elektrostatiky, která říká, že $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$, zjistíme, že neexistuje magnetický analog elektrického náboje. Neexistují *magnetické náboje*, z nichž by mohly vycházet čáry \mathbf{B} . Budeme-li v našich úvahách používat pojem „čáry“ vektorového pole \mathbf{B} ¹⁸⁾, tyto nebudou nikde začínat a nikde končit. Odkud tedy pocházejí? Magnetická pole se „objevují“ *v přítomnosti* proudů; mají rotaci úměrnou proudové hustotě. Kdekoliv jsou proudy, jsou tam i čáry magnetického pole vytvářející smyčky okolo proudů. Protože čáry \mathbf{B} nezačínají a nekončí, často se uzavírají do sebe a vytvářejí uzavřené smyčky. Mohou však existovat složité situace, v nichž čáry nejsou jednoduchými uzavřenými smyčkami. Ale ať procházejí kudykoliv, nikdy nevycházejí z bodů. Magnetické náboje nebyly nikdy objeveny, a proto $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Platí to *vždy* – nejen pro magnetostatiku, ale i pro dynamická pole.

Souvislost mezi polem \mathbf{B} a proudy je vyjádřen rovnicí (13.13). Máme novou situaci, zcela odlišnou od elektrostatiky, kde platilo $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. Takový vztah znamenal, že křivkový integrál z \mathbf{E}

¹⁷⁾ Přesněji stacionární (pozn. red.).

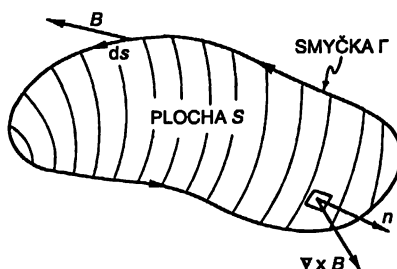
¹⁸⁾ Indukční čáry (pozn. red.).

po libovolné uzavřené dráze je roven nule:

$$\oint_{\text{po smyčce}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Tento výsledek jsme získali ze Stokesovy věty, která říká, že integrál po libovolné uzavřené dráze jakéhokoliv vektorového pole je roven plošnému integrálu normálové složky rotace vektoru (integrál bereme po libovolné ploše, která má jako svou hranici uzavřenou smyčku). Kdybychom tutéž větu použili v případě vektoru magnetického pole, dostali bychom použitím symbolů z obr. 13.6.

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (13.14)$$



Obr. 13.6 Křivkový integrál tangenciální složky \mathbf{B} je roven plošnému integrálu normálové složky $\nabla \times \mathbf{B}$.

Vezmeme-li rotaci \mathbf{B} z rovnice (13.13), dostaneme

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (13.15)$$

Souhlasně se vztahem (13.5) představuje integrál \mathbf{j} celkový proud I tekoucí plochou S . Protože v případě stacionárních proudů nezávisí proud plochou S na tvaru této plochy, pokud je ohraničena křivkou Γ , hovoříme o *proudu smyčkou Γ* . Tak přicházíme k obecnému zákonu: Cirkulace \mathbf{B} podél libovolné uzavřené křivky je rovna proudu I smyčkou Γ , dělenému $\epsilon_0 c^2$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{I_{\text{smyčkou } \Gamma}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (13.16)$$

Tento zákon – zvaný *Ampérův zákon* – hraje v magnetostatice tutéž úlohu jako Gaussův zákon v elektrostatice. Samotný Ampérův zákon neurčuje \mathbf{B} z proudů; obecně musíme použít i vztah $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. V další části však uvidíme, že jej můžeme použít i pro určení polí v takových speciálních případech, které mají určitou jednoduchou symetrii.

13.5 MAGNETICKÁ POLE PŘÍMÉHO VODIČE A SOLENOIDU. ATOMOVÉ PROUDY

Abychom ukázali, jak lze Ampérův zákon použít, určíme magnetické pole v blízkosti vodiče. Ptáme se: Jaké je pole v okolí dlouhého přímého vodiče válcového tvaru? Budeme předpokládat něco, co vůbec nemusí být zřejmé, ale přece je to pravdivé: že indukční čáry pole B vytvářejí okolo vodiče kružnice. Za takového předpokladu Ampérův zákon, tj. rovnice (13.16), určuje sílu pole. V důsledku symetrie úlohy má B stejnou velikost ve všech bodech kružnice, jejíž střed je v ose vodiče (obr. 13.7). Pak můžeme snadno vypočítat integrál $B \cdot ds$, je roven právě velikosti B násobené délkou kružnice. Je-li r poloměr kružnice, máme

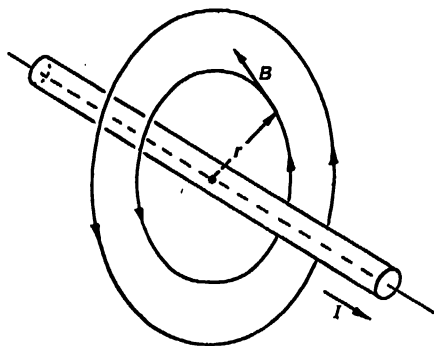
$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B \cdot 2\pi r.$$

Celkový proud smyčkou je prostě proud I ve vodiči, a proto

$$B \cdot 2\pi r = \frac{I}{\epsilon_0 c^2}$$

nebo

$$B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2I}{r}. \quad (13.17)$$



Obr. 13.7 Magnetické pole v okolí dlouhého vodiče, jímž protéká proud I

Velikost magnetického pole klesá nepřímou úměrně r – vzdálenosti od osy vodiče. Chceme-li, můžeme vztah (13.17) zapsat ve vektorovém tvaru. Uvědomíme si, že B je kolmé jak na I , tak na r a dostaneme

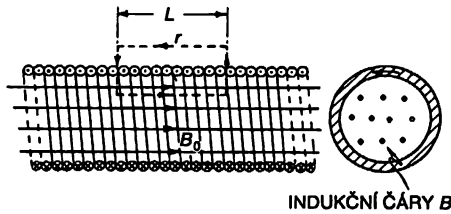
$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2I \times \mathbf{e}_r}{r}. \quad (13.18)$$

Faktor $1/4\pi\epsilon_0 c^2$ pšeme odděleně proto, že se bude vyskytovat často. Bude dobré, když si zapamatujete, že je roven přesně 10^{-7} (v SI soustavě), neboť rovnic typu (13.17) je definována jednotka proudu – ampér. Ve vzdálenosti jednoho metru od vodiče s proudem jednoho ampéru je magnetické pole $2 \cdot 10^{-7}$ tesla.

Protože proud vytváří magnetické pole, bude působit silou na okolní vodiče, jimiž také protéká proud. V kapitole 1 byl popsán jednoduchý pokus na demonstraci síly působící mezi dvěma vodiči proudu. Jsou-li vodiče rovnoběžné, je každý kolmý na pole druhého vodiče; vodiče se proto budou odpuzovat, nebo přitahovat. Tečou-li proudy stejným směrem, vodiče se přitahují; mají-li proudy směr opačný, vodiče se odpuzují.

Všimněme si jiného příkladu, při jehož analýze nám pomůže Ampèrův zákon a určité poznatky o povaze pole. Předpokládejme, že máme dlouhý drát v podobě cívky těsně navinutý na válcové ploše tak, jak je znázorněno v řezu na *obr. 13.8*. Taková cívka se nazývá *solenoid*. Je-li solenoid vzhledem ke svému průměru velmi dlouhý, lze experimentálně zjistit, že pole v okolí solenoidu je velmi malé v porovnání s polem uvnitř solenoidu. Použitím této skutečnosti a Ampèrova zákona můžeme určit velikost pole uvnitř solenoidu.

Protože pole *zůstává* uvnitř (a má nulovou divergenci), musí jeho indukční čáry jít rovnoběžně s osou, jak znázorňuje *obr. 13.8*. Je-li to tak, můžeme použít Ampèrův zákon na pravouhlou křivku Γ znázorněnou na obrázku.



Obr. 13.8 Magnetické pole dlouhého solenoidu

Tato smyčka prochází vzdálenost L uvnitř solenoidu, kde je pole řekněme B_0 , potom jde kolmo k poli a vrací se podél solenoidu vnější stranou, kde je pole zanedbatelné. Křivkový integrál B podél této křivky je roven právě $B_0 L$, což musí být rovno celkovému proudu, který obepíná křivka Γ vynásobenému faktorem $1/\epsilon_0 c^2$. Má-li solenoid N závitů na délce L , bude obepínán proud NI . Máme tedy

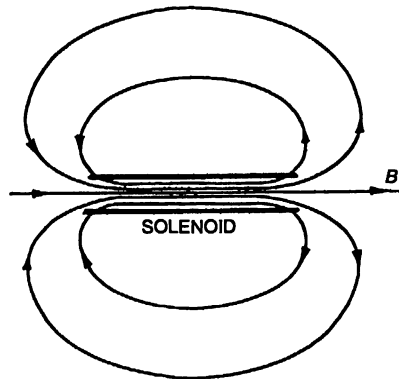
$$B_0 L = \frac{NI}{\epsilon_0 c^2}.$$

Označíme-li symbolem n počet závitů solenoidu na jednotkové délce (tj. $n = N/L$), dostaneme

$$B_0 = \frac{nI}{\epsilon_0 c^2}. \quad (13.19)$$

Co se stane s indukčními čarami B , když se dostanou na konec solenoidu? Zřejmě se nějak rozejdou a vrátí se k solenoidu na opačném konci tak, jak je to nakresleno na *obr. 13.9*.

Ale právě takové pole pozorujeme i v okolí tyčového magnetu. Co je však vlastně magnet? Naše rovnice říkají, že B je důsledkem přítomnosti proudů. Víme i to, že obyčejné železné tyče (bez baterií a generátorů) také vytvářejí magnetická pole. Možná očekáváte, že na pravé straně rovnic (13.12) a (13.13) by měly být ještě další členy, které by představovaly „hustotu magnetického železa“ nebo nějakou jinou podobnou veličinu. Takové členy tam nejsou. Naše teorie říká, že za magnetické vlastnosti železa jsou odpovědné vnitřní proudy, které jsou už zahrnuty ve členu s_j .



Obr. 13.9 Magnetické pole v okolí solenoidu.

Látky jsou velmi složité, zkoumáme-li hlouběji; to jsme viděli, když jsme se snažili pochopit dielektrika. Abychom nepřerušili tuto naši diskusi, odložíme podrobné zkoumání vnitřního mechanismu magnetických materiálů typu železa na později. Zatím se budete muset smířit s tím, že všechen magnetismus je tvořen proudy a že v permanentním magnetu jsou stálé vnitřní proudy. V případě železa tyto proudy pocházejí od elektronů rotujících okolo vlastních os. Každý elektron má spin, který odpovídá maličkému cirkulujícímu proudu. Samozřejmě, jeden elektron nevytvoří znatelné magnetické pole, ale v obyčejném kusu látky jsou miliardy a miliardy elektronů. Obvykle elektrony rotují v těch nejrozmanitějších směrech, a proto se výsledný efekt neprojevuje. Kupodivu v malém počtu látek podobných železu rotuje velká část elektronů tak, že jejich osy rotace mají stejný směr – v železe se takového kolektivního pohybu účastní dva elektrony každého atomu. V tyčovém magnetu rotuje velký počet elektronů ve stejném směru a jak uvidíme později, výsledný jev je rovnocenný proudu cirkulujícímu na povrchu magnetu. (Je to velmi podobné tomu, co jsme zjistili v dielektrikách – že rovnoměrně polarizované dielektrikum je ekvivalentní rozložením nábojů na jeho povrchu.) Není tedy náhoda, že tyčový magnet je ekvivalentní solenoidem.

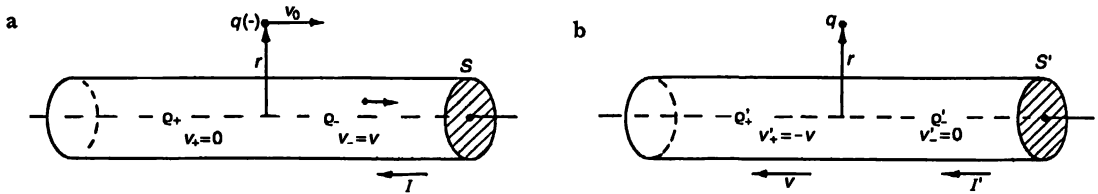
13.6 MAGNETICKÁ A ELEKTRICKÁ POLE V TEORII RELATIVITY

Když jsme říkali, že magnetická síla působící na náboj je úměrná jeho rychlosti, možná, že jste si položili otázku: „Jaké rychlosti? Vzhledem ke které vztažné soustavě?“ Z definice veličiny B , uvedené na začátku této kapitoly, skutečně vyplývá, že tento vektor bude záviset na volbě vztažné soustavy při určování rychlosti nábojů. O tom, kterou soustavu je třeba při určování magnetického pole brát v úvahu, jsme však neřekli nic.

Ukazuje se, že je vhodná *libovolná* inerciální soustava. Také uvidíme, že magnetismus a elektřina nejsou navzájem nezávislé – je třeba je chápat jako součást *jednoho* úplného elektromagnetického pole. Ačkoliv se ve statickém případě Maxwellovy rovnice rozpadnou na dva samostatné páry, jeden pro elektřinu a druhý pro magnetismus, a mezi těmito dvěma poli pak není zjevná souvislost, přece v samotné přírodě mezi nimi existuje velmi úzký vztah, který je důsledkem principu relativity. Historicky byl princip relativity objeven později než Maxwellovy rovnice. Bylo to vlastně studium elektřiny a magnetismu, které nakonec Einsteina přivedlo k objevu principu relativity. Všimněme si, co nám naše poznání principu relativity řekne o magnetických silách,

předpokládáme-li, a to zcela správně, že princip relativity lze při zkoumání elektromagnetizmu použít.

Zamysleme se nad tím, co se stane, bude-li se záporný náboj pohybovat rychlostí v_0 rovnoběžně s vodičem, kterým teče proud (situace je znázorněna na obr. 13.10). Budeme se snažit pochopit situaci ve dvou vztažných soustavách: jedné spojené s vodičem tak jako v části *a* na obrázku a druhé spojené s částicí tak jako v části *b*. První soustavu označíme symbolem S a druhou symbolem S' .



Obr. 13.10 Interakce vodiče, kterým teče proud, a částice s nábojem q z hlediska dvou souřadnicových soustav. V soustavě S (část *a*) je vodič v klidu; v soustavě S' (část *b*) je v klidu náboj.

V soustavě S na částici zřejmě působí magnetická síla. Síla směřuje k vodiči, takže kdyby se náboj volně pohyboval, viděli bychom ho stáčet se k vodiči. V soustavě S' však na částici magnetická síla nepůsobí, neboť částice má nulovou rychlost. Zůstane proto stát na místě? Uvidíme v těch dvou soustavách různé události? Podle principu relativity bychom měli i v soustavě S' vidět částici přibližující se k vodiči. Musíme vysvětlit, proč by to tak mělo být.

Vraťme se k našemu atomovému popisu vodiče, který vede proud. V normálním vodiči, jakým je měď, vzniká elektrický proud pohybem určitého počtu záporných elektronů (nazýváme je vodivostní elektrony), zatímco kladné náboje jader a zbytek elektronů jsou v materiálu nepohyblivé. Označme hustotu vodivostních elektronů ρ_- a jejich rychlost v soustavě S jako v . Hustota nábojů, které se v S nepohybují, nechť je ρ_+ a ta musí být rovna ρ_- s opačným znaménkem, neboť máme nenabitý vodič. Proto mimo vodič nebude existovat elektrické pole a síla působící na pohybující se částici je rovna

$$F = q v_0 \times B.$$

Využijeme-li výsledek, ke kterému jsme přišli v rovnici (13.18) pro magnetické pole ve vzdálenosti r od osy vodiče, dospějeme k závěru, že síla působící na částici směřuje k vodiči a má velikost

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{2Iq v_0}{r}.$$

Pomocí rovnic (13.4) a (13.5) můžeme proud I vyjádřit ve tvaru $\rho_- v S$, kde S je plošný obsah průřezu vodiče. Potom

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{2q\rho_- S v v_0}{r}. \quad (13.20)$$

Mohli bychom pokračovat ve zkoumání obecného případu libovolných rychlostí v a v_0 , ale stejně dobře bude, všimneme-li si speciálního případu, kdy rychlost částice v_0 je stejná jako

rychlost vodivostních elektronů v . Potom můžeme psát $v = v_0$ a rovnice (13.20) se změní na

$$F = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\rho \cdot S}{r} \frac{v^2}{c^2}. \quad (13.21)$$

Zajímáme se o to, co se stane v soustavě S' , v níž je částice v klidu a pohybuje se vodič (na obrázku doleva) rychlostí v . Kladné náboje pohybující se s vodičem vytvoří určité magnetické pole B' v okolí částice. Jenže částice je nyní v klidu, a proto na ni nepůsobí *magnetická síla*! Působí-li na částici přece jen nějaká síla, musí pocházet od elektrického pole. To je však možné pouze tehdy, když je vodič *nabitý* – neutrální vodič, kterým protéká proud se musí stát nabitým, když jej uvedeme do pohybu.

Tuto otázku musíme prozkoumat. Pomocí toho, co víme o soustavě S , musíme určit hustotu náboje ve vodiči v soustavě S' . Na první pohled vypadá všechno stejně, ale už víme, že při přechodu z S do S' se mění délky (viz 15. kapitola 1. dílu); proto se musí měnit i objemy. Musí se tedy změnit i hustoty, neboť *hustoty* náboje závisí na objemu, v němž se náboje nacházejí.

Dříve než určíme hustoty náboje v S' , musíme vědět, co se děje s elektrickým *nábojem* svazku elektronů, když se náboje pohybují. Víme, že hmotnost částice roste v poměru $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$. Děje se něco podobného i s nábojem? Ne! *Náboje* jsou vždy stejné bez ohledu na to, zda se pohybují nebo nepohybují. Jinak bychom nepozorovali, že se celkový náboj zachovává.

Předpokládejme, že máme kousek materiálu, řekněme vodiče, který byl původně nenabitý. Zahřejeme ho. Protože elektrony mají jiné hmotnosti než protony, změní se rychlosti elektronů a protonů různě. Závisel-li by náboj na rychlosti částice, která ho nese, nebyl by už v ohřátém kousku materiálu náboj elektronů a protonů v rovnováze. Při zahřátí by se materiál nabítl. Jak jsme už viděli dříve, velmi malá změna náboje každého z elektronů by vedla v takovém kousku materiálu k obrovským elektrickým polím. Takový jev však nebyl nikdy pozorován.

Je tu ještě ta skutečnost, že střední rychlost elektronů v látce závisí na jejím chemickém složení. Kdyby se náboj elektronu měnil s rychlostí, výsledný náboj látky by se měnil v chemické reakci. Přímý výpočet by nám opět ukázal, že i velmi malá závislost náboje na rychlosti by vedla v nejjednodušších chemických reakcích k obrovským elektrickým polím. Takové jevy však nebyly pozorovány, a proto můžeme tvrdit, že elektrický náboj jednotlivých částic nezávisí na jejich pohybovém stavu.

Náboj částice q je tedy invariantní skalární veličina, nezávislá na vztažné soustavě. To znamená, že v libovolné soustavě je hustota náboje nějakého rozdělení elektronů úměrná počtu elektronů v jednotce objemu. Starosti nám bude dělat jen skutečnost, že objem se *může* měnit v důsledku relativistické kontrakce délek.

Tuto myšlenku použijeme v případě pohybujícího se vodiče. Vezmeme-li vodič délky L_0 , v němž je hustota *stacionárních* nábojů ρ_0 , bude obsahovat celkový náboj $Q = \rho_0 L_0 S_0$. Pohybují-li se tytéž náboje v druhé soustavě rychlostí v , budou se všechny nacházet v kousku látky, který má kratší délku:

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (13.22)$$

ale tentýž průřez S_0 (protože rozměry v směrech kolmých na pohyb se nemění). Tato situace je znázorněna na *obr. 13.11*.

Označíme-li symbolem ρ hustotu náboje v soustavě, v níž se náboje pohybují, bude celkový náboj Q roven $\rho L S_0$. To však musí být rovno $\rho_0 L_0 S_0$, neboť náboj je v každé soustavě stejný.

Proto $\rho L = \rho_0 L_0$, nebo podle (13.22)

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (13.23)$$



Obr. 13.11 Má-li rozdělení nabitých částic v klidu hustotu ρ_0 , budou mít tytéž náboje hustotu $\rho = \rho_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$, budeme-li je pozorovat v soustavě pohybující se rychlostí v vůči nabitým částicím

Hustota náboje pohybujícího se souboru nábojů se mění stejným způsobem jako relativistická hmotnost částice.

Nyní tento obecný výsledek použijeme na hustotu kladného náboje ρ_+ našeho vodiče. Tyto náboje jsou v klidu v soustavě S . V soustavě S' , v níž se vodič pohybuje rychlostí v , bude pro hustotu kladného náboje platit vztah

$$\rho'_+ = \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (13.24)$$

Záporné náboje jsou v klidu v soustavě S' . Jejich „klidová hustota“ bude v této soustavě rovna ρ_0 . V rovnici (13.23) $\rho_0 = \rho'_-$, neboť jejich hustota je rovna ρ'_- , když je vodič v klidu, tj. v soustavě S , kde je rychlost záporných nábojů v . Pro vodivostní elektrony potom máme

$$\rho_- = \frac{\rho'_-}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (13.25)$$

nebo

$$\rho'_- = \rho_- \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (13.26)$$

Teď už je vidět, proč je v soustavě S' elektrické pole – neboť v této soustavě je výsledná hustota náboje ρ' ve vodiči dána vztahem

$$\rho' = \rho'_+ + \rho'_-.$$

Použijeme-li (13.24) a (13.26), dostaneme

$$\rho' = \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \rho_- \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Protože stacionární vodič je neutrální, platí $\rho_- = -\rho_+$ a máme

$$\rho' = \rho_+ \cdot \frac{v^2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (13.27)$$

Náš pohybující se vodič je kladně nabitý a vytvoří elektrické pole E' v bodě, kde se nachází vnější stacionární částice. Už jsme vyřešili elektrostatický problém homogenně nabitého válce. Elektrické pole ve vzdálenosti r od osy válce je

$$E' = \frac{\rho' S}{2\pi \varepsilon_0 r} = \frac{\rho_+ S v^2 / c^2}{2\pi \varepsilon_0 r \sqrt{1 - v^2 / c^2}}. \quad (13.28)$$

Síla působící na záporně nabitou částici směřuje k vodiči. Máme tedy sílu, která alespoň pokud jde o směr, je stejná v obou soustavách; elektrická síla v S' má tentýž směr jako magnetická síla v S .

$$\text{Velikost síly v } S' \text{ je} \quad F' = \frac{q}{2\pi \varepsilon_0} = \frac{\rho_+ S}{r} \frac{v^2 / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}. \quad (13.29)$$

Porovnáním výsledku pro F' s naším výsledkem pro F z rovnice (13.21) zjistíme, že velikosti těchto sil jsou téměř stejné. Skutečně,

$$F' = \frac{F}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}, \quad (13.30)$$

a proto při malých rychlostech, které jsme uvažovali, jsou si tyto síly rovny. Lze tedy říci, že alespoň při malých rychlostech můžeme magnetizmus a elektřinu považovat za „dva pohledy na tutéž věc“.

Situace je však ještě příznivější. Vezmeme-li v úvahu skutečnost, že i síly se transformují při přechodu z jedné soustavy do druhé, zjistíme, že oba způsoby pozorování událostí opravdu dávají tentýž fyzikální výsledek při libovolné rychlosti.

Abychom se o tom přesvědčili, položíme si otázku: Jakou příčnou hybnost bude mít částice, na kterou po krátkou dobu působila síla? Z 16. kapitoly 1. dílu už víme, že příčná hybnost částice musí být stejná v soustavě S i S' . Označíme-li příčnou souřadnici y , budeme porovnávat Δp_y a $\Delta p'_y$. Použijeme-li relativisticky správnou pohybovou rovnici $F = dp/dt$, pro příčnou hybnost Δp_y , kterou částice získá za dobu Δt v soustavě S , dostaneme

$$\Delta p_y = F \Delta t. \quad (13.31)$$

V soustavě S' bude pro příčnou hybnost platit

$$\Delta p'_y = F' \Delta t'. \quad (13.32)$$

Veličiny Δp_y a $\Delta p'_y$ musíme samozřejmě porovnávat v odpovídajících časových intervalech Δt a $\Delta t'$. V 15. kapitole 1. dílu jsme viděli, že časové intervaly vztahující se k *pohybující se* částici jsou delší než intervaly v soustavě, v níž je částice v klidu. Protože naše částice byla původně v klidu v soustavě S' , můžeme pro malé Δt psát

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}, \quad (13.33)$$

a vše krásně vychází. Z rovnic (13.31) a (13.32) dostaneme

$$\frac{\Delta p'_y}{\Delta p_y} = \frac{F' \Delta t'}{F \Delta t}$$

a zkombinováním vztahů (13.30) a (13.33) se můžeme přesvědčit, že tento poměr je roven jedné.

Zjistili jsme, že stejný fyzikální výsledek dostaneme při analýze pohybu částice ve vodiči v souřadnicové soustavě spojené s vodičem nebo v soustavě spojené s částicí. V prvním případě je tato síla čistě „magnetická“ a v druhém čistě „elektrická“. Tyto dva pohledy znázorňuje *obr. 13.12*. (I když v druhé soustavě je magnetické pole B' , nepůsobí na stacionární částici silou).



Obr. 13.12 V soustavě S je hustota náboje nulová a proudová hustota je rovna j . Je tam jen magnetické pole. V S' je hustota náboje ρ' a jiná proudová hustota j' . Magnetické pole B' je jiné a je tam i elektrické pole E' .

Kdybychom zvolili další souřadnicovou soustavu, dostali bychom jiná pole E a B . Elektrické a magnetické síly jsou částí *jednoho* fyzikálního jevu – elektromagnetické interakce částic. Rozdělení této interakce na elektrickou a magnetickou část závisí na tom, jakou vztahovou soustavu jsme zvolili pro popis situace. Teprve úplný elektromagnetický popis je invariantní; elektřina a magnetismus chápáné jako celek jsou konzistentní s Einsteinovou teorií relativity.

Protože při změně vztahné soustavy se mění i zastoupení elektrického a magnetického pole, musíme být v našich úvahách o polích E a B opatrní. Hovoříme-li například o *čarách* E a B , nesmíme jim připisovat příliš mnoho reality. Tyto čáry se mohou ztratit, chceme-li je pozorovat v jiné souřadnicové soustavě. Například v soustavě S' máme siločáry elektrického pole, ale nenajdeme je, „pohybujeme-li se rychlostí v v soustavě S' “. V soustavě S nejsou vůbec siločáry elektrického pole! Nemá proto smysl vyslovit takovéto nebo podobné tvrzení: Pohybujeme-li magnetem, unášší se sebou své pole, a proto se pohybují indukční čáry B . Obecně nemá smysl hovořit o „rychlosti pohybujících se čar pole“. Pole jsou naším způsobem popisu toho, co se děje v daném bodě prostoru. Konkrétně E a B vypovídají o silách, které působí na pohybující se částice. Otázka „Jaká je síla působící na náboj ze strany *pohybujícího se* magnetického pole?“ nemá žádný přesný smysl. Síla je určována hodnotami E a B v místě náboje a vztah (13.1) není třeba měnit, pohybuje-li se zdroj pole E nebo B (v důsledku pohybu se však změň hodnoty E a B). Naš matematický popis se týká pouze polí jako funkcí x, y, z, t *vzhledem k nějaké inerciální soustavě*.

Později budeme hovořit o „vlně elektrického a magnetického pole šířící se prostorem“, např. o světelné vlně. To je však totéž, jako hovořit o vlně šířící se podél struny. Tím nemyslíme, že by se nějaká část struny pohybovala ve směru vlny, ale máme na mysli skutečnost, že *posunutí* struny se objevuje nejdříve na jednom a později na jiném místě. Podobně je to i s elektromagnetickou vlnou; vlna se *šíří*, ale velikost pole *se mění*. Setkáme-li se tedy v budoucnosti s pojmem „pohybujícího se“ pole, musíte jej chápat jako stručný a praktický způsob popisu měnícího se pole v určitých podmínkách.

13.7 TRANSFORMACE PROUDŮ A NÁBOJŮ

Možná, že vás znepokojovalo zjednodušení, které jsme použili, když jsme uvažovali o téže rychlosti v pro částici i pro vodivostní elektrony ve vodiči. Mohli bychom se vrátit a znovu provést analýzu, ale se dvěma různými rychlostmi; bude však jednodušší si uvědomit, že náboj a proudová hustota jsou složky čtyřvektoru (viz 17. kapitolu 1. dílu).

Viděli jsme, že v soustavě, v níž mají náboje rychlost v , lze hustotu vyjádřit vztahem

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

kde ρ_0 je hustota nábojů v jejich klidové soustavě. Pro proudovou hustotu v soustavě, v níž se náboje pohybují, platí

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = \frac{\rho_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (13.34)$$

Víme, že energie E a hybnost částice pohybující se rychlostí v jsou dány vztahy

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

kde m_0 je klidová hmotnost. Víme také, že E a \mathbf{p} tvoří relativistický čtyřvektor. Protože ρ a \mathbf{j} závisejí na rychlosti přesně tak jako E a \mathbf{p} , budou i ρ a \mathbf{j} složkami relativistického čtyřvektoru. Tato vlastnost je klíčem k obecné analýze pole vodiče pohybujícího se libovolnou rychlostí. Taková analýza by byla potřebná k novému řešení problému, v němž by byla rychlost částice v_0 různá od rychlosti vodivostních elektronů.

Při transformaci ρ a \mathbf{j} do souřadnicové soustavy pohybující se rychlostí u ve směru osy x využijeme té skutečnosti, že tyto veličiny se transformují jako t a (x, y, z) a dostaneme (viz 15. kapitola 1. dílu)

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, & j'_x &= \frac{j_x - u\rho}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\ y' &= y, & j'_y &= j_y, \\ z' &= z, & j'_z &= j_z, \\ t' &= \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, & \rho' &= \frac{\rho - uj_x/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (13.35)$$

Pomocí těchto rovnic můžeme dát do souvislosti náboje a proudy v jedné soustavě s náboji a proudy v soustavě druhé. Vezmeme-li náboje a proudy v některé soustavě, můžeme vyřešit

elektromagnetický problém v této soustavě využitím Maxwellových rovnic. Výsledek, který dostaneme *pro pohyb částic*, nebude vůbec záviset na výběru vztažné soustavy. Později se vrátíme k relativistické transformaci elektromagnetických polí.

13.8 SUPERPOZICE. PRAVIDLO PRAVÉ RUKY

Tuto kapitolu zakončíme dvěma postřehy z magnetostatiky. Především naše základní rovnice pro magnetické pole

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} / c^2 \varepsilon_0$$

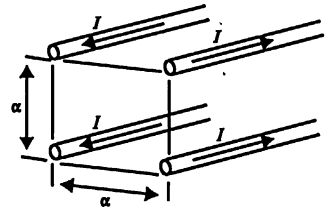
jsou lineární v \mathbf{B} i \mathbf{j} . To znamená, že princip superpozice platí i pro magnetická pole. Pole tvořené dvěma různými ustálenými proudy je součtem polí jednotlivých proudů působících samostatně. Naše druhá poznámka se bude týkat pravidel pravé ruky, o nichž jsme už hovořili (např. pravidlo pravé ruky pro magnetické pole vytvářené proudem). Také jsme už poznali, že magnetizované železného magnetu pochází od elektronových spinů v látce. Směr magnetického pole rotujícího elektronu souvisí s jeho rotační osou a určuje zmněné pravidlo pravé ruky. Protože \mathbf{B} je určeno pravidlem určité ruky (obsahuje vektorový součin nebo rotaci), nazýváme jej *axiálním* vektorem. Vektory, jejichž směr v prostoru není dán prostřednictvím pravé nebo levé ruky, nazýváme *polárními* vektory. Příklady polárních vektorů jsou posunutí, rychlost, síla a \mathbf{E} .

Fyzikálně pozorovatelné veličiny v elektromagnetizmu se však neurčují pomocí pravé nebo levé ruky. Elektromagnetické interakce jsou symetrické vzhledem k odrazu (52. kapitola 1. dílu). Výsledek výpočtu magnetických sil mezi dvěma soubory proudů nezávisí na tom, zda pravidlo pravé ruky zaměníme za pravidlo levé ruky nebo ne. Neše rovnice vedou, nezávisle na pojmenování rukou, ke konečnému výsledku, že souhlasně tekoucí proudy se přitahují a opačně tekoucí proudy se odpuzují. (Zkuste vypočítat sílu pomocí „pravidel levé ruky“.) Přitahování a odpuzování jsou polární vektory. K takovéto situaci dochází proto, že při popisu libovolné interakce používáme pravidlo pravé ruky dvakrát – jednou pro určení \mathbf{B} z proudů a potom pro určení síly, jíž pole působí na druhý proud. Dvojnásobné použití pravidla pravé ruky je stejné jako dvojnásobné použití pravidla levé ruky. Kdybychom zaměnili naši dohodu a používali bychom pravidla levé ruky, všechna naše pole \mathbf{B} by změnila znaménko, ale všechny síly, nebo co je snad podstatnější, pozorovaná zrychlení objektů – by se nezměnila.

Ačkoliv fyzici ke svému velkému překvapení nedávno zjistili, že ne *všechny* zákony přírody jsou vždy invariantní při zrcadlovém odrazu, zákony elektromagnetizmu tuto základní symetrii mají.

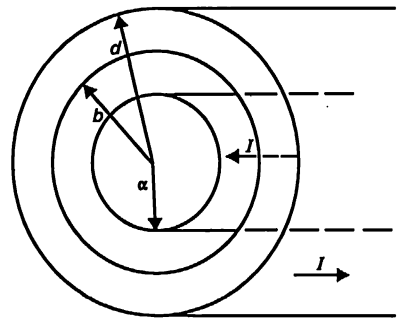
PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 13.1** ■ Konce čtyř rovnoběžných dostatečně dlouhých měděných drátů o průřezu 1 mm^2 leží ve vrcholech čtverce o straně $a = 20 \text{ cm}$ (viz obrázek). Každým drátem teče proud $I = 20 \text{ A}$ ve směru šipek. Jaká je velikost a směr vektoru magnetické indukce B ve středu čtverce? Jaká je velikost a směr síly působící na jeden metr levého spodního drátu?



- 13.2** ■ Dlouhý dielektrický váleček poloměru a je staticky polarizován, přičemž vektor polarizace ve všech bodech válce míří radiálně a jeho velikost je úměrná vzdálenosti od osy, tj. $P = P_0 r/2$. Válec rotuje konstantní úhlovou rychlostí ω kolem své osy. Najděte magnetické pole v bodech na ose válce, dostatečně vzdálených od jeho konců.

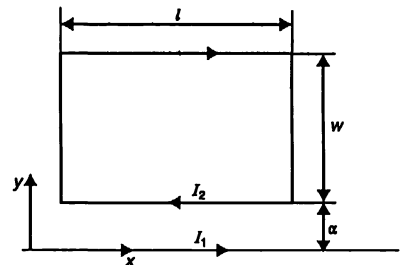
- 13.3** ■ Dlouhý koaxiální kabel je tvořen dvěma koncentrickými vodiči, jejichž rozměry jsou ukázány na obrázku. Předpokládá se, že proudová hustota ve vodičích je po průřezu homogenní.



- Určete magnetickou indukci B v bodech $r < a$ uvnitř vnitřního vodiče.
- Určete B pro $a < r < b$ v prostoru mezi vodiči.
- Určete B v bodech $b < r < d$ uvnitř vnějšího vodiče.
- Určete B pro $d < r$ vně kabelu.

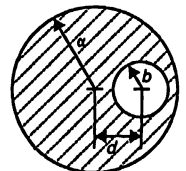
- 13.4** ■ Rozmítání elektronového paprsku v televizní obrazovce se provádí magnetickým polem vyvářeným soustavou vychylovacích cívek, které jsou umístěny v úzké části obrazovky. Jako zdroj elektronů slouží zpravidla elektronové dělo, které vystřeluje elektrony s energií 3 keV . Po vychýlení jsou elektrony urychlovány elektrickým polem. Odhadněte magnetickou indukci, která odpovídá maximálnímu odchýlení elektronového paprsku. Současně udejte počet ampérvzávitů ve vychylující cívice. Urychlení elektronů po vychýlení můžete zanedbat. Kdybyste vzali toto urychlení v úvahu, jak by se změnil váš odhad?

- 13.5** ■ Dlouhým přímým vodičem teče proud I_1 a obvodem v podobě pravoúhelníku o stranách l a w teče proud I_2 . Přímý vodič a obvod leží v jedné rovině, strana délky l je rovnoběžná s vodičem (viz obrázek).



- Jaká síla působí na obvod a jaká na vodič?
- Jaký moment síly působí na obvod a jaký na vodič?

- 13.6** ■ Uvnitř dlouhé vodivé tyče poloměru a je vyvrtána válcová dutina poloměru b , jejíž osa je rovnoběžná s osou tyče a nachází se od ní ve vzdálenosti d (viz obrázek). Tyčí protéká proud, jehož proudová hustota je v průřezu homogenní a je rovna $+j$. Jaké je magnetické pole v ose dutiny daleko od konců tyče?



Magnetické pole v různých případech

14.1 VEKTOROVÝ POTENCIÁL

14.2 VEKTOROVÝ POTENCIÁL DANÝCH PROUDŮ

14.3 PŘÍMÝ VODIČ

14.4 DLOUHÝ SOLENOID

14.5 POLE MALÉ SMYČKY. MAGNETICKÝ DIPÓL

14.6 VEKTOROVÝ POTENCIÁL OBVODU

14.7 BIOTŮV-SAVARTŮV ZÁKON

14.1 VEKTOROVÝ POTENCIÁL

V této kapitole budeme pokračovat v diskuzi o magnetických polích podmíněných stacionárními proudy, což je předmětem magnetostatiky. Magnetické pole souvisí s elektrickými proudy prostřednictvím základních rovnic

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (14.1)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}. \quad (14.2)$$

Chtěli bychom tyto rovnice vyřešit *nejobecnějším* matematickým způsobem, tedy bez požadavku speciální symetrie nebo intuitivního odhadu. V elektrostatice jsme našli přímý způsob určování pole, jsou-li známy polohy všech elektrických nábojů: Vypočte se skalární potenciál φ tak, že se integruje přes všechny náboje jako v rovnici (4.25). Elektrické pole se potom určí tak, že potenciál φ zderivujeme. Ukážeme, že existuje analogický postup určen magnetického pole \mathbf{B} , v němž je třeba znát proudovou hustotu \mathbf{j} všech pohybujících se nábojů.

Viděli jsme, že v elektrostatice lze E vyjádřit jako gradient skalárního pole φ (neboť rotace E byla vždy nulová). Nyní však rotace B není vždy nulová, a proto obecně nebude možné vyjádřit B jako gradient. Jenže *divergence* B je vždy nulová, a to znamená, že budeme moci vždy vyjádřit B jako *rotaci* jiného vektorového pole. V článku 2.8 jsme totiž viděli, že divergence rotace je vždy nulová. Pole B můžeme tedy vztáhnout k jinému poli, jež označíme A , jako

$$B = \nabla \times A. \quad (14.3)$$

Zapíšeme-li tento vztah ve složkách, dostaneme

$$\begin{aligned} B_x &= (\nabla \times A)_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ B_y &= (\nabla \times A)_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ B_z &= (\nabla \times A)_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \end{aligned} \quad (14.4)$$

Zápis $B = \nabla \times A$ zabezpečuje splnění rovnice (14.1), neboť

$$\nabla \cdot B = \nabla \cdot (\nabla \times A) = 0.$$

Pole A se nazývá *vektorový potenciál*.

Určitě si vzpomínáte, že skalární potenciál φ nebyl definicí určen jednoznačně. Máme-li definováno φ pro daný problém, vždy můžeme najít jiný, stejně dobrý potenciál φ' tím, že přidáme konstantu

$$\varphi' = \varphi + C.$$

Nový potenciál φ' dává totéž elektrické pole, neboť gradient ∇C je roven nule; φ' a φ odpovídají téže fyzikální situaci.

Podobně můžeme mít různé vektorové potenciály A , které dávají stejná magnetická pole. Je to opět proto, že B získáme z A derivováním a přidáním konstanty k A tedy fyzikální podstatu nezmění. Vektorový potenciál A má však ještě větší volnost. K A můžeme přidat libovolné pole, jež je gradientem nějakého skalárního pole, a fyzika se přitom nezmění. Můžeme to ukázat následujícím způsobem. Mějme vektorový potenciál A , který dává správné magnetické pole B v určité situaci. Ptáme se, za jakých okolností dává nějaký nový vektorový potenciál A' , dosazený do (14.3), totéž pole B ? Bude to tehdy, když A i A' budou mít stejnou rotaci:

$$B = \nabla \times A' = \nabla \times A.$$

Proto

$$\nabla \times A' - \nabla \times A = \nabla \times (A' - A) = 0.$$

Je-li rotace vektoru nulová, musí být tento vektor gradientem nějakého skalárního pole ψ , tj. $A' - A = \nabla \psi$. Je-li tedy A vektorový potenciál vhodný pro daný problém, bude pro libovolné ψ ,

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi \quad (14.5)$$

stejně dobře definovaný vektorový potenciál, který vede k témuž poli \mathbf{B} .

Bývá vhodné zmenšit „volnost“ \mathbf{A} tím, že se žádá splnění nějaké další, v podstatě libovolné podmínky (tak jak bylo často vhodné vybrat potenciál φ nulový ve velkých vzdálenostech). \mathbf{A} můžeme omezit např. tím, že předepíšeme, jaká má být jeho divergence. To můžeme udělat vždy aniž bychom ovlivnili \mathbf{B} . Je to jen proto, že \mathbf{A} i \mathbf{A}' mají stejnou rotaci a dávají stejné \mathbf{B} , a přitom nemusí mít stejnou divergenci. Skutečně, $\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \psi$, takže vhodnou volbou pro ψ dosáhneme požadované hodnoty $\nabla \cdot \mathbf{A}'$.

Jakou hodnotu $\nabla \cdot \mathbf{A}$ je nutné volit? Volbu je třeba provést tak abychom dosáhli matematického zjednodušení, a proto bude záviset na problému, který řešíme. V *magnetostatice* prostě klademe

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (14.6)$$

(Později, až se budeme zabývat elektrodynamikou, naši volbu změníme.) V dané situaci je tedy \mathbf{A} zcela¹⁹⁾ definováno vztahy $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ a $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

Abychom získali určité zkušenosti s vektorovým potenciálem, všimneme si nejdříve, čemu je roven v případě homogenního magnetického pole \mathbf{B}_0 . Zvolíme-li směr osy zsohlasný se směrem \mathbf{B}_0 , musí platit

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 \\ B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0 \\ B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_0. \end{aligned} \quad (14.7)$$

Podíváme-li se na tyto rovnice, zjistíme, že jejich *možné* řešení je

$$A_y = xB_0, \quad A_x = 0, \quad A_z = 0.$$

Stejně možné je však i řešení

$$A_x = -yB_0, \quad A_y = 0, \quad A_z = 0. \quad (14.8)$$

Další řešení je kombinací obou předcházejících

$$A_x = -\frac{1}{2}yB_0, \quad A_y = \frac{1}{2}xB_0, \quad A_z = 0.$$

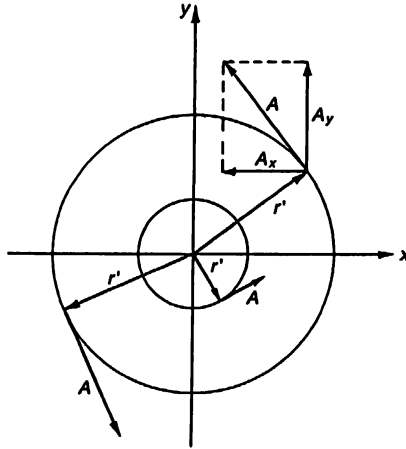
Je jasné, že pro pole \mathbf{B} existuje mnoho možností; vektorový potenciál \mathbf{A} není jednoznačný.

¹⁹⁾ Naše definice ještě stále neurčuje \mathbf{A} jednoznačně. Abychom dosáhli *jednoznačnosti*, musíme ještě něco říci o tom, jak se \mathbf{A} chová na určitých hraničních plochách nebo na velkých vzdálenostech. Někdy je např. vhodné zvolit takové pole, které klesá ve velkých vzdálenostech k nule.

Třetí řešení určené rovnicemi (14.8) má mnoho zajímavých vlastností. Je-li x -ová složka úměrná $-y$ a y -ová složka je úměrná $+x$, musí být vektor A kolmý na vektor jdoucí od osy z , který označíme r' (čárka znamená, že nejde o vektor posunutí vůči počátku). Dále je velikost A úměrná $\sqrt{x^2 + y^2}$, tedy i r' . Proto (v případě homogenního pole) lze A zapsat jednoduše ve tvaru

$$A = \frac{1}{2} B \times r'. \quad (14.9)$$

Vektorový potenciál A má velikost $Br'/2$ a otáčí se kolem osy z tak, jak to znázorňuje *obr. 14.1*. Je-li například B axiální pole uvnitř solenoidu, otáčí se vektorový potenciál stejně jako proudy v solenoidu.



Obr. 14.1 Homogenní magnetické pole B ve směru osy z odpovídá vektorovému potenciálu A , který rotuje kolem osy z a má velikost $A = Br'/2$ (kde r' je vzdálenost od osy z).

Vektorový potenciál homogenního pole můžeme získat i jiným způsobem. Cirkulaci A podél libovolné uzavřené smyčky Γ lze vyjádřit pomocí plošného integrálu $\nabla \times A$, použijeme-li Stokesovu větu (3.38):

$$\oint_{\Gamma} A \cdot ds = \int_{\text{uvnitř } \Gamma} (\nabla \times A) \cdot n \, dS. \quad (14.10)$$

Ale integrál na pravé straně je roven toku B smyčkou, takže

$$\oint_{\Gamma} A \cdot ds = \int_{\text{uvnitř } \Gamma} B \cdot n \, dS. \quad (14.11)$$

Cirkulace A podél *každé* smyčky je tedy rovna toku B smyčkou. Uvažujeme-li kruhovou smyčku s poloměrem r' v rovině kolmé na homogenní pole B bude tok roven právě

$$\pi r'^2 B.$$

Zvolíme-li počátek na ose symetrie, takže A má tangenciální směr a je funkcí jen r' , platí pro cirkulaci

$$\oint_{\Gamma} A \cdot ds = 2\pi r' A = \pi r'^2 B.$$

Tak jako předtím, i nyní dostaneme

$$A = \frac{Br'}{2}.$$

V případě, který jsme uvažovali, jsme vypočítali vektorový potenciál z magnetického pole, což je vlastně opakem obvyklého postupu. Ve složitých úlohách je obvykle jednodušší najít vektorový potenciál a pomocí něj pak určit magnetické pole. Nyní ukážeme, jak se to dělá.

14.2 VEKTOROVÝ POTENCIÁL DANÝCH PROUDŮ

Protože B je určeno proudy, bude proudy určeno také A . Proto chceme najít, jak lze A vyjádřit pomocí proudů. Budeme vycházet ze základní rovnice (14.2)

$$c^2 \nabla \times B = \frac{j}{\epsilon_0}$$

z níž, samozřejmě, vyplývá, že

$$c^2 \nabla \times (\nabla \times A) = \frac{j}{\epsilon_0}. \quad (14.12)$$

Tato rovnice je pro magnetostatiku tím, čím pro elektrostatiku byla rovnice

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (14.13)$$

Rovnice (14.12) pro vektorový potenciál se bude ještě více podobat rovnici pro φ , přepíšeme-li $\nabla \times (\nabla \times A)$ pomocí vektorové identity (2.58) na tvar

$$\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla (\nabla \cdot A) - \nabla^2 A. \quad (14.14)$$

Protože jsme zvolili $\nabla \cdot A = 0$ (a teď už chápeme proč jsme to udělali), získá rovnice (14.12) tvar

$$\nabla^2 A = -\frac{j}{\epsilon_0 c^2}. \quad (14.15)$$

Tato vektorová rovnice představuje, samozřejmě, tři rovnice:

$$\nabla^2 A_x = -\frac{j_x}{\epsilon_0 c^2}, \quad \nabla^2 A_y = -\frac{j_y}{\epsilon_0 c^2}, \quad \nabla^2 A_z = -\frac{j_z}{\epsilon_0 c^2}. \quad (14.16)$$

Každá z těchto rovnic je *matematicky identická* s rovnicí

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (14.17)$$

Vše, co jsme se naučili o výpočtu potenciálu ze známého ϱ , můžeme použít k výpočtu každé složky A ze známého j !

Ve 4. kapitole jsme viděli, že obecné řešení elektrostatické rovnice (14.17) má tvar

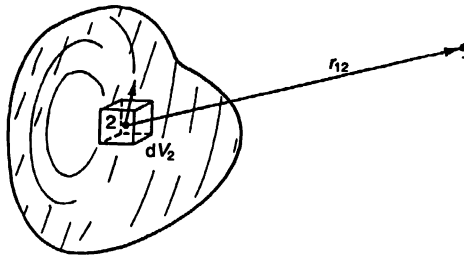
$$\varphi(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\varrho(2) dV_2}{r_{12}}.$$

Proto můžeme ihned zapsat obecné řešení rovnice pro A_x , tedy

$$A_x(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{j_x(2) dV_2}{r_{12}} \quad (14.18)$$

a podobné vztahy bychom dostali i pro A_y , A_z . (Obr. 14.2 připomíná konvenci, kterou jsme zavedli pro označování r_{12} a dV_2 .) Takto získané tři vztahy můžeme vyjádřit ve vektorovém tvaru

$$\mathbf{A}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{j}(2) dV_2}{r_{12}}. \quad (14.19)$$



Obr. 14.2 Vektorový potenciál A v bodě 1 je dán integrálem přes proudové elementy $j dV$ ve všech bodech 2.

(Přímým derivováním složek se můžete snadno přesvědčit o tom, že tento integrál vyhovuje podmínce $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, pokud $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, o čemž už víme, že platí pro stacionární proudy.)

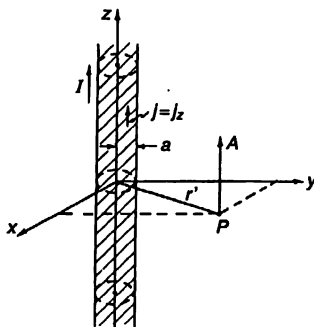
Máme tedy obecnou metodu výpočtu magnetického pole stacionárních proudů. Princip je následující: x -ová složka vektorového potenciálu pocházející od proudové hustoty j_x je stejná jako elektrický potenciál φ vytvořený hustotou náboje ϱ . Je rovna j_x / c^2 a podobná tvrzení platí pro y -ovou a z -ovou složku. (Tento princip platí jen pro složky v daném směru. Například radiální složku A takovýmto postupem z radiální složky j nedostaneme.) Tak z vektoru proudové hustoty \mathbf{j} můžeme pomocí rovnice (14.19) vypočítat \mathbf{A} , tj. každou složku A najdeme řešením tří myšlených elektrostatických problémů s distribucemi náboje $\varrho_1 = j_x / c^2$, $\varrho_2 = j_y / c^2$ a $\varrho_3 = j_z / c^2$. Potom najdeme \mathbf{B} tak, že vyjádříme různé derivace \mathbf{A} vystupující v $\nabla \times \mathbf{A}$. Je to trochu složitější než v elektrostatičce, ale myšlenka je to stejná. Nyní tuto teorii ilustrujeme výpočtem vektorového potenciálu v některých speciálních případech.

14.3 PŘÍMÝ VODIČ

Jako první případ si zvolíme výpočet pole přímého vodiče – tento výpočet jsme již provedli v předcházejícím článku pomocí rovnice (14.2) a úvah o symetrii problému. Vezmeme si dlouhý přímý vodič, který má poloměr a a jímž teče stacionární proud I . Narozdíl od náboje na vodiči je v elektrostatice stacionární proud ve vodiči rovnoměrně rozložen po průřezu vodiče. Zvolíme-li souřadnice tak, jak znázorňuje obr. 14.3, bude mít vektor proudové hustoty \mathbf{j} pouze z -ovou složku. Velikost této složky ve vodiči je

$$j_z = \frac{I}{\pi a^2} \quad (14.20)$$

a mimo vodič je tato složka nulová.



Obr. 14.3 Dlouhý válcový vodič podél osy z s konstantní proudovou hustotou j

Protože j_x i j_y jsou nulové, máme ihned

$$A_x = 0, \quad A_y = 0.$$

Abychom dostali A_z , využijeme naše řešení pro elektrostatický potenciál φ vodiče s homogenní hustotou náboje $\rho = j_z/c^2$. V bodech mimo nekonečný nabitý válec pro elektrostatický potenciál platí

$$\varphi = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln r',$$

kde $r' = \sqrt{x^2 + y^2}$ a τ je náboj na jednotku délky, který je roven $\pi a^2 \rho$. Pro A_z proto musí platit

$$A_z = -\frac{\pi a^2 j_z}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln r'$$

v bodech mimo dlouhý vodič, kterým teče konstantní proud. Jelikož $\pi a^2 j_z = I$, můžeme psát

$$A_z = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln r'. \quad (14.21)$$

Ze vztahu (14.4) už můžeme určit B . Ze šesti derivací jsou jen dvě nenulové. Dostaneme

$$B_x = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial y} \ln r' = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{y}{r'^2} \quad (14.22)$$

$$B_y = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial x} \ln r' = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{x}{r'^2}. \quad (14.23)$$

$$B_z = 0.$$

Dostali jsme stejný výsledek jako předtím: B cirkuluje kolem vodiče a má velikost

$$B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2I}{r'}. \quad (14.24)$$

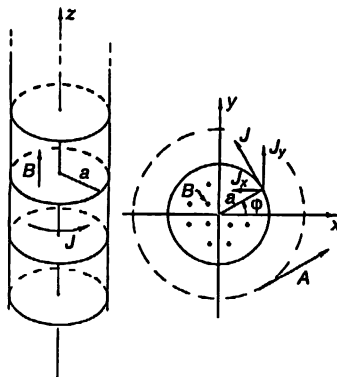
14.4 DLOUHÝ SOLENOID

Jako další příklad vezměme nekonečně dlouhý solenoid, po jehož obvodu protéká povrchový proud, přičemž velikost tohoto proudu je nI na jednotku délky. (Představujeme si to tak, že na jednotkové délce je n závitů vodiče, každým závitem teče proud I a nepatrný sklon, který má vinutí, můžeme zanedbat.)

Právě tak, jak jsme definovali povrchovou hustotu náboje σ , nyní definujeme povrchovou hustotu proudu J , která je rovna proudu na jednotce délky po povrchu solenoidu (což je právě střední hodnota j násobená tloušťkou tenkého vinutí). Velikost J je tu rovna nI . Tento povrchový proud (obr. 14.4) má složky

$$J_x = -J \sin \varphi, \quad J_y = J \cos \varphi, \quad J_z = 0.$$

Naší úlohou je najít A pro takovéto rozložení proudu.



Obr. 14.4 Dlouhý solenoid s hustotou povrchového proudu J

Nejdříve budeme hledat A_x v bodech vně solenoidu. Výsledek je stejný jako elektrostatický potenciál mimo válec s povrchovým nábojem

$$\sigma = \sigma_0 \sin \varphi,$$

přičemž $\sigma_0 = J/c^2$. Neřešili jsme sice úlohu s takovýmto rozložením náboje, ale řešili jsme něco podobného. Takové rozložení náboje je ekvivalentní dvěma nabitým *pevným* válcům, z nichž jeden má kladný a druhý záporný náboj a osy těchto válců mají malý relativní posun ve směru y . Potenciál takové dvojice válců je úměrný derivaci potenciálu jednoho rovnoměrně nabitého válce podle y . Mohli bychom vypočítat konstantu úměrnosti, ale tím se nyní nebudeme zabývat.

Potenciál nabitého válce je úměrný $\ln r'$; potenciál dvojice válců bude proto mít tvar

$$\varphi \sim \frac{\partial \ln r'}{\partial y} = \frac{y}{r'^2}.$$

Víme tedy, že

$$A_x = -K \frac{y}{r'^2}, \quad (14.25)$$

kde K je konstanta. Stejnými úvahami bychom došli ke vztahu

$$A_y = K \frac{x}{r'^2}. \quad (14.26)$$

Dříve jsme se zmínili, že mimo solenoid magnetické pole *není*, a přesto nyní vidíme, že tam je A , tedy pole, které cirkuluje kolem osy z tak, jak to znázorňuje *obr. 14.4*. Ptáme se „Je jeho rotace nulová?“

Je zřejmé, že B_x a B_y jsou nulové a dále

$$B_z = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{x}{r'^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-K \frac{y}{r'^2} \right) = K \left(\frac{1}{r'^2} - \frac{2x^2}{r'^4} + \frac{1}{r'^2} - \frac{2y^2}{r'^4} \right) = 0.$$

Proto je magnetické pole vně velmi dlouhého solenoidu skutečně nulové, ačkoliv vektorový potenciál nulový není.

Náš výsledek můžeme prověřit něčím, co už známe: Cirkulace vektorového potenciálu kolem solenoidu by měla být rovna toku B uvnitř cívky (rovnice 14.11). Cirkulace je rovna $A \cdot 2\pi r'$, resp. $2\pi K$, neboť $A = K/r'$. Všimněte si, že nezávisí na r' . Tak to vlastně má být, není-li mimo solenoid B , protože tok je právě velikost B uvnitř solenoidu násobená πa^2 . Platí to pro všechny kružnice s poloměrem $r' > a$. V předcházející části jsme zjistili, že pole uvnitř solenoidu je rovno $nI/\epsilon_0 c^2$, a proto můžeme určit konstantu K . Z

$$2\pi K = \pi a^2 \frac{nI}{\epsilon_0 c^2}$$

dostaneme

$$K = \frac{nIa^2}{2\epsilon_0 c^2}.$$

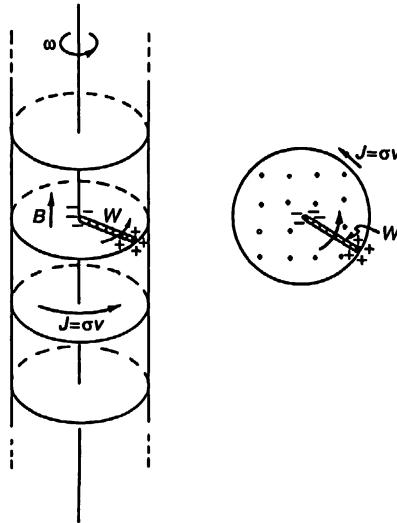
Vektorový potenciál vně solenoidu má tedy velikost

$$A = \frac{nIa^2}{2\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r'} \quad (14.27)$$

a je vždy kolmý na vektor r' .

Uvažovali jsme solenoid vytvořený vodičem, ale stejné pole na povrchu bychom dostali, kdybychom otáčeli dlouhý válecek s nábojem na povrchu. Máme-li tenkou válcovou plochu s poloměrem a a povrchovým nábojem σ , vyvolá otáčení válce povrchový proud $J = \sigma v$, kde $v = a\omega$ je rychlost povrchového náboje. Uvnitř válce proto bude magnetické pole $B = \sigma a\omega / \epsilon_0 c^2$.

Nyní si můžeme položit zajímavou otázku. Předpokládejme, že kolmo na osu válce jsme vložili kousek vodiče W , který sahá od osy válce až k povrchu, a připevnili jsme jej k válci tak, aby se otáčel spolu s válcem (obr. 14.5).



Obr. 14.5 Rotující nabitý váleček vytváří ve svém nitru magnetické pole. Krátký radiální vodič rotující s válcem má na svých koncích indukované náboje.

Tento vodič se pohybuje v magnetickém poli, a proto síla $\nabla \times \mathbf{B}$ vede k tomu, že konce vodiče se nabíjí (Budou se nabíjet do té doby, dokud pole nábojů nevykompenzuje sílu $\nabla \times \mathbf{B}$). Má-li váleček kladný náboj, bude na konci vodiče u osy záporný náboj. Měřením náboje na konci vodiče můžeme měřit rychlost otáčení systému. Získali bychom tak „měřič úhlové rychlosti“!

Možná vás to udivuje a ptáte se: „Co se stane, přejedeme-li do souřadnicové soustavy spojené s otáčejícím se válcem? Pak je nabitý váleček v klidu a víme, že z elektrostatických rovnic vyplývá nulové elektrické pole uvnitř válce, takže nebude existovat síla, která by posunula náboje k ose. Něco tedy není v pořádku.“ Vaše obavy jsou neopodstatněné a vše je v pořádku, protože neexistuje relativnost rotace. Otáčejícím se systémem *není* inerciální soustavou a platí v něm jiné fyzikální zákony. Rovnice elektromagnetizmu můžeme používat jen v inerciálních soustavách.

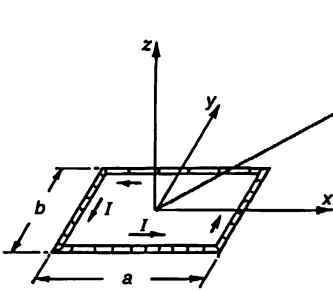
Bylo by krásné, kdybychom mohli měřit absolutní otáčení Země takovým nabitým válcem, ale bohužel je tento efekt tak malý, že jej není možné pozorovat ani těmi nejpřesnějšími přístroji, které máme dnes k dispozici.

14.5 POLE MALÉ SMYČKY. MAGNETICKÝ DIPÓL

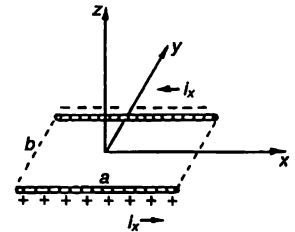
Použijme metodu vektorového potenciálu k nalezení magnetického pole malé smyčky, jíž teče proud. Jako obvykle označuje pojem „malá“ to, že se o pole zajímáme pouze ve vzdálenostech, jež jsou velké ve srovnání s rozměry smyčky. Ukáže se, že každá malá smyčka je magnetickým dipólem. To znamená, že vytváří „magnetické“ pole podobné elektrickému poli elektrického dipólu.

Nejdříve budeme uvažovat pravoúhloú smyčku a souřadnicovou soustavu zvolíme podle obr. 14.6. Protože ve směru osy z netečnou proudy, bude A_z nulové. Ve směru osy x tečou proudy na obou stranách smyčky na úsecích délky a . V každém úseku jsou proudová hustota i proud homogenní. Proto je řešení pro A_x stejné jako elektrostatický potenciál dvou nabitých tyčí (obr. 14.7). Protože tyče mají opačné náboje, bude jejich elektrický potenciál ve velkých vzdálenostech právě takový jako potenciál dipólu (článek 6.5). V bodě P na obr. 14.6 bude pro potenciál platit

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_R}{R^2}. \quad (14.28)$$



Obr. 14.6 Pravoúhloú vodivá smyčka s proudem I . Jaké je magnetické pole v bodě P ? ($R > a$, nebo b).



Obr. 14.7 Rozložení \mathbf{j}_x v proudové smyčce z obr. 14.6.

kde \mathbf{p} je dipólový moment rozložení náboje. V tomto případě je dipólový moment roven celkovému náboji τa na jedné tyči násobenému vzdáleností b mezi tyčemi:

$$\mathbf{p} = \tau ab. \quad (14.29)$$

Dipólový moment míří v záporném směru osy y , takže kosinus úhlu mezi \mathbf{R} a \mathbf{p} je $-y/R$ (kde y je souřadnice bodu P). Proto máme

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau ab}{R^2} \frac{y}{R}.$$

Jednoduchou záměnou I/c^2 místo τ dostaneme

$$A_x = -\frac{Iab}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{y}{R^3}. \quad (14.30)$$

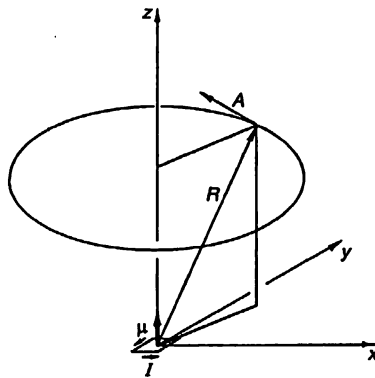
Pomocí stejných argumentů dostaneme

$$A_y = \frac{Iab}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{x}{R^3}. \quad (14.31)$$

A_y je opět úměrné x a A_x je úměrné $-y$, takže vektorový potenciál (ve velkých vzdálenostech) prochází po kružnicích kolem osy z a cirkuluje stejným způsobem jako I ve smyčce, což znázorňuje obr. 14.8.

Absolutní hodnota A je úměrná Iab , což je součin proudu a plochy smyčky. Tento součin je nazýván *magnetickým dipólovým momentem* (nebo často jen „magnetickým momentem“) smyčky. Označujeme jej symbolem μ :

$$\mu = Iab. \quad (14.32)$$



Obr. 14.8 Vektorový potenciál malé proudové smyčky v počátku (v rovině xy); pole magnetického dipólu

Vektorový potenciál malé rovinné smyčky *libovolného* tvaru (kružnice, trojúhelník atd.) je také určen vztahy (14.30) a (14.31) za předpokladu, že Iab nahradíme výrazem

$$\mu = I \cdot (\text{plocha smyčky}). \quad (14.33)$$

Důkaz tohoto tvrzení si proveďte sami.

Naši rovnici můžeme vyjádřit ve vektorovém tvaru, definujeme-li směr vektoru μ tak, že je normálou k rovině smyčky a kladný smysl je určen pravidlem pravé ruky (obr. 14.8). Potom můžeme psát

$$A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mu \times R}{R^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mu \times e_R}{R^2}. \quad (14.34)$$

Ještě však musíme najít B . Pomocí (14.33) a (14.34), spolu s (14.4) dostaneme

$$B_x = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{\mu}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{x}{R^3} = \dots \frac{3xz}{R^5}, \quad (14.35)$$

(kde pod ... rozumíme $\mu/4\pi\epsilon_0 c^2$).

$$B_y = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\dots \frac{y}{R^3} \right) = \dots \frac{3yz}{R^5},$$

$$B_z = \frac{\partial}{\partial x} \left(\dots \frac{x}{R^3} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\dots \frac{y}{R^3} \right) = -\dots \left(\frac{1}{R^3} - \frac{3z^2}{R^5} \right) \quad (14.36)$$

Složky pole B se chovají stejně jako složky pole E dipólu orientovaného ve směru osy z . (Viz vztahy (6.14) a (6.15) a *obr. 6.5*). Právě proto nazýváme smyčku magnetickým dipólem. Slovo „dipól“ však není v případě magnetického pole nejvhodnější, neboť v magnetickém poli neexistují takové magnetické póly, které by odpovídaly elektrickým nábojům. Magnetické dipólové pole není vytvořeno dvěma náboji, ale elementární proudovou smyčkou.

Je pozoruhodné, že vycházíme-li ze dvou docela rozdílných zákonů $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ a $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}/\epsilon_0 c^2$, dospějeme k polím stejného typu. Proč je tomu tak? Proto, že dipólová pole se objevují jen tehdy, když se nacházíme daleko od všech nábojů nebo proudů. Tehdy jsou rovnice pro \mathbf{E} a \mathbf{B} identické ve většině prostoru; obě mají nulovou divergenci i rotaci. Proto mají stejná řešení. Jenže *zdroje*, jejichž konfiguraci popisujeme pomocí dipólových momentů, jsou fyzikálně zcela odlišné – v jednom případě je to cirkulující proud a v druhém dvojice nábojů, z nichž jeden je nad a druhý pod rovinou smyčky odpovídajícího pole.

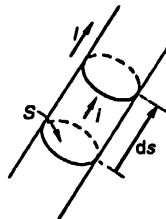
14.6 VEKTOROVÝ POTENCIÁL OBVODU

Často nás zajímají magnetická pole vytvářená obvody vodiče, v nichž je průměr vodiče velmi malý ve srovnání s rozměry celého systému. V takových případech můžeme zjednodušit rovnice pro magnetické pole. Pro tenký vodič můžeme objemový element zapsat ve tvaru

$$dV = S ds,$$

kde S je plocha příčného řezu a ds je délkový element podél vodiče. Ve skutečnosti má však vektor ds stejný směr jako \mathbf{j} , tak jak to znázorňuje *obr. 14.9* (a můžeme předpokládat, že \mathbf{j} je konstantní v libovolném příčném řezu), a proto můžeme napsat vektorovou rovnici

$$\mathbf{j} dV = \mathbf{j} S ds. \quad (14.37)$$

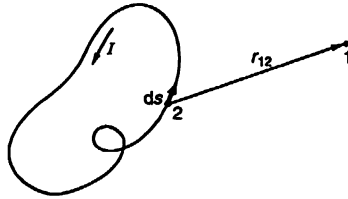


Obr. 14.9 Pro tenký vodič je $\mathbf{j} dV$ stejné jako $I ds$

Jenže jS je právě to, co nazýváme proudem I ve vodiči, a proto náš integrál pro vektorový potenciál (14.19) dostává tvar

$$A(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{I ds_2}{r_{12}} \quad (14.38)$$

(obr. 14.10). (Předpokládáme, že I je stejné v celém obvodu. Kdybychom měli několik větví s různými proudy, museli bychom, samozřejmě, brát odpovídající I v každé větvi.)



Obr. 14.10 Magnetické pole vodiče lze získat z integrálu podél obvodu.

Opět můžeme najít pole ze vztahu (14.38) přímo integrováním nebo řešením odpovídajícího elektrostatického problému.

14.7 BIOTŮV-SAVARTŮV ZÁKON

Při studiu elektrostatiky jsme zjistili, že elektrické pole známého rozdělení náboje lze určit pomocí integrálu (rovnice 4.16):

$$E(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2) e_{12} dV_2}{r_{12}^2}.$$

Poznali jsme, že výpočet tohoto integrálu (jde vlastně o tři integrály, neboť počítáme tři složky pole) je obvykle těžší než výpočet integrálu pro potenciál a určení jeho gradientu.

Podobný integrál váže magnetické pole s proudy. Už máme integrál pro A (rovnice 14.19) a integrál pro B získáme tak, že provedeme rotaci obou stran rovnice:

$$B(1) = \nabla \times A(1) = \nabla \times \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{j(2) dV_2}{r_{12}} \right]. \quad (14.39)$$

Nyní však musíme být opatrní. Operátor rotace znamená derivování $A(1)$, tj. vztahuje se k souřadnicím (x_1, y_1, z_1) . Operátor $\nabla \times$ můžeme přesunout pod znak integrování, ale musíme si pamatovat, že se vztahuje jen na proměnné s indexem 1, které se samozřejmě vyskytují jen v

$$r_{12} = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2}. \quad (14.40)$$

Pro x -ovou složku B potom máme

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y_1} - \frac{\partial A_y}{\partial z_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \left[j_z \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{1}{r_{12}} \right) - j_y \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{1}{r_{12}} \right) \right] dV_2 = \quad (14.41)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \left[j_z \frac{y_1 - y_2}{r_{12}^3} - j_y \frac{z_1 - z_2}{r_{12}^3} \right] dV_2.$$

Veličina v závorkách je vlastně záporně vzatá x -ová složka výrazu

$$\frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} = \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{e}_{12}}{r_{12}^2}.$$

Podobné výsledky dostaneme i pro ostatní složky, a tak máme

$$\mathbf{B}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{j}(2) \times \mathbf{e}_{12}}{r_{12}^2} dV_2. \quad (14.42)$$

Integrál vyjadřuje B přímo pomocí známých proudů. Geometrie je tu právě taková, jakou znázorňuje obr. 14.2.

Tečou-li proudy jen v tenkých vodičích, můžeme stejně jako v předcházejícím článku ihned vyjádřit integrál napříč vodičem tak, že nahradíme $j dV$ výrazem $I ds$, v němž ds je délkovým elementem vodiče. Použijeme-li symboly z obr. 14.10, dostaneme

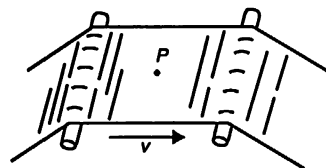
$$\mathbf{B}(1) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{I \mathbf{e}_{12} \times d\mathbf{s}_2}{r_{12}^2}. \quad (14.43)$$

(Znaménko minus se objevuje proto, že jsme obrátili pořadí členů ve vektorovém součinu.) Tato rovnice pro (1) se podle svých objevitelů nazývá *Biotův-Savartův zákon*. Představuje vztah pro přímé určení magnetického pole vytvořeného vodiči, jimiž protékají proudy.

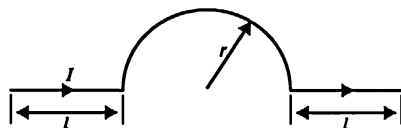
Možná se překvapeně zeptáte: „Jaká je výhoda vektorového potenciálu, když umíme najít B přímo ve tvaru vektorového integrálu? Vždyť A je vlastně také určeno třemi integrály!“ Především v důsledku přítomnosti vektorového součinu jsou integrály pro B obvykle složitější, než by se z rovnice (14.41) zdálo. Další důvod spočívá v tom, že integrály pro A jsou podobné těm, které jsme poznali už v elektrostatice. Nakonec je nutné připomenout, že v náročnějších teoretických disciplínách (jakými jsou teorie relativity, kvantová mechanika a obecnější formulace zákonů mechaniky, jako např. princip nejmenšího účinku, o kterém budeme hovořit později) hraje vektorový potenciál důležitou úlohu.

PŘÍKLADY A CVIČENÍ

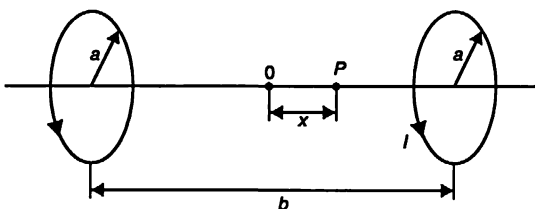
- 14.1 ■ Při výrobě umělohmotné fólie je široký tenký plastický pás tažen rychlostí v přes dva rovnoběžné válečky. V průběhu zpracovávání získá pás rovnoměrně rozložený povrchový elektrický náboj s hustotou σ . Najděte vektorový potenciál A a magnetickou indukci B v blízkosti povrchu pásu uprostřed mezi válečky (v blízkosti bodu P na obrázku).



- 14.2 ■ Tenkým drátem tvarovaným podle obrázku protéká proud I . Čemu je rovno magnetické pole ve středu polokružnice vytvářené a) každou z přímočarých částí vodiče délky l , b) částí vodiče ve tvaru polokružnice délky πr , c) celým vodičem?



- 14.3 ■ V praktických experimentech je často třeba získat velmi homogenní magnetické pole. K tomuto účelu se někdy používá Helmholtzova cívka (viz obrázek). Tvoří ji dva koaxiální závit, jimiž protéká proud v témž směru. Nechť poloměr závitů je roven a , proud I a vzdálenost mezi závitů b .



- Najděte magnetické pole na ose závitů v bodě P ležícím ve vzdálenosti x od středního bodu mezi závitů.
- Rozložte získaný výraz do řady podle mocnin x s přesností do členů řádu x^2 .
- Jaký je poměr mezi veličinami a a b , při němž je člen řádu x^2 nulový?
- Ukažte, že magnetické pole vyvolané závitů v přiblížení uvedeném v b) a za podmínky c) je dáno výrazem $B_x = \frac{8I}{5^{1/2} a \epsilon_0 c^2}$.

- 14.4 ■ Čtvercovým vodivým rámečkem o straně a teče proud I .

- S použitím Biotova-Savartova zákona ukažte, že magnetické pole B na ose rámečku ve vzdálenosti x od jeho středu je rovno $B = \frac{4a^2 I}{\pi(4x^2 + a^2)(4x^2 + 2a^2)^{1/2} \epsilon_0 c^2}$.

- Získejte též výsledek pomocí vektorového potenciálu. *Poznámka.* Můžete vyjít z integrálního výrazu pro vektorový potenciál a použít vztahy $\frac{\partial}{\partial x} \int_a^b f(x, y) dy = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy$,

$$\lim_{x \rightarrow c} \int_a^b f(x, y) dy = \int_a^b \{ \lim_{x \rightarrow c} f(x, y) \} dy.$$

- 14.5 ■ Pomocí vektorového potenciálu vypočítejte magnetické pole na ose nekonečně tenké kružnice poloměru a po níž protéká proud I .

- 14.6 ■ Vodivá koule poloměru a je nabita na potenciál U . Koule rotuje kolem jedné z os procházejících jejím středem úhlovou rychlostí ω . Ukažte, že magnetické pole vně koule je totožné s polem magnetického dipólu o dipólovém momentu $\mu = \epsilon_0 \omega U \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \right)$. Ukažte také, že pole uvnitř koule

je rovno $B_{\text{uvnitř}} = \frac{2\omega U}{3c^2}$. Tyto výrazy platí přesně ve všech bodech vně, resp. uvnitř koule.

Nepodaří-li se vám to dokázat, najděte odpověď na první otázku pro vzdálenosti mnohem větší než je poloměr koule a a na druhou otázku pro střed koule.

14.7 ■ Jak bylo zmíněno v přednáškách, rychlost zemské rotace je možno principiálně určit tím, že změříme napětí mezi osou a povrchem nabitého válce umístěného na severním pólu tak, že jeho osa prochází středem Země.

a) Ukažte, že toto napětí můžeme vyjádřit ve tvaru $U = \left(\frac{v}{c}\right)^2 \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0}$, kde v je obvodová rychlost

bodů na povrchu válce a τ povrchový náboj připadající na jednotku délky válce.

b) Je možno si představit experimentální zařízení rozumných parametrů k měření tohoto efektu?

V 15

Vektorový potenciál

15.1 SÍLY PŮSOBÍCÍ NA PROUDOVOU SMYČKU.

ENERGIE DIPÓLU

15.2 MECHANICKÁ A ELEKTRICKÁ ENERGIE

15.3 ENERGIE USTÁLENÝCH PROUDŮ

15.4 *B* NEBO *A*

15.5 VEKTOROVÝ POTENCIÁL A KVANTOVÁ MECHANIKA

15.6 CO PLATÍ V STATICE, NEPLATÍ V DYNAMICE

15.1 SÍLY PŮSOBÍCÍ NA PROUDOVOU SMYČKU. ENERGIE DIPÓLU

V předcházející kapitole jsme zkoumali magnetické pole vytvořené malou proudovou smyčkou. Zjistili jsme, že jde o dipólové pole s dipólovým momentem

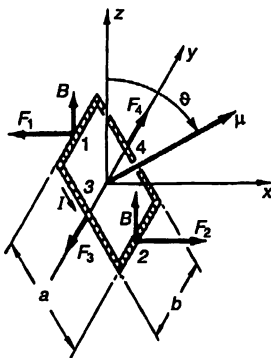
$$\mu = IS, \quad (15.1)$$

přičemž I je proud a S je plocha smyčky. Směr momentu je kolmý na rovinu smyčky, a proto můžeme psát

$$\mu = ISn,$$

kde n je jednotkový vektor normály k ploše S .

Proudová smyčka – nebo magnetický dipól – nejen že vytváří magnetické pole, ale je zároveň vystaven působení sil, je-li vložen do magnetického pole jiných proudů. Nejdříve si všimneme síly působící na pravoúhlou smyčku v homogenním magnetickém poli. Nechť osa z směřuje podél pole a osa y leží v rovině smyčky, která s rovinou xy svírá úhel ϑ (obr. 15.1).



Obr. 15.1 Pravoúhlá smyčka s proudem I je v homogenním poli B (ve směru osy z). Pro moment sil, který na smyčku působí, platí $N = \mu \times B$, kde magnetický moment $\mu = Iab$

Pak bude magnetický moment smyčky, který je kolmý na rovinu smyčky, svírat s magnetickým polem úhel ϑ .

Protože na opačných stranách smyčky tečou opačné proudy, budou opačné i působící síly a výsledná síla působící na smyčku bude nulová (v homogenním poli). V důsledku sil působících na strany označené na obrázku symboly 1 a 2 bude existovat otáčivý moment síly, který se bude snažit otočit smyčku kolem osy y . Velikost těchto sil je

$$F_1 = F_2 = IBb.$$

Jejich rameno otáčení je

$$a \sin \vartheta$$

takže pro moment síly platí

$$N = Iab \sin \vartheta,$$

a protože Iab je magnetický moment smyčky, můžeme psát

$$N = \mu B \sin \vartheta.$$

Moment síly lze vyjádřit i pomocí vektorů:

$$N = \mu \times B. \quad (15.2)$$

Vztah (15.2) pro moment síly otáčení jsme sice odvodili ve speciálním případě, ale později uvidíme, že tento výsledek je správný pro malou smyčku libovolného tvaru. Jistě si pamatujete, že vztah stejného druhu jsme našli pro otáčivý moment síly působící na elektrický dipól

$$N = p \times E.$$

Nyní nás bude zajímat mechanická energie proudové smyčky. Tam, kde je moment síly, závisí energie zřejmě na orientaci. Princip virtuální práce říká, že moment síly představuje rychlost změny energie s úhlem, takže můžeme psát

$$dW = -Nd\vartheta.$$

Položíme-li $N = -\mu B \sin \vartheta$ a zintegrujeme, dostaneme vztah pro energii

$$W = -\mu B \cos \vartheta + \text{konstanta}. \quad (15.3)$$

(Záporné znaménko vystupuje proto, že smyčka se snaží orientovat moment podél pole; energie je nejmenší, jsou-li μ a B souhlasně rovnoběžné.)

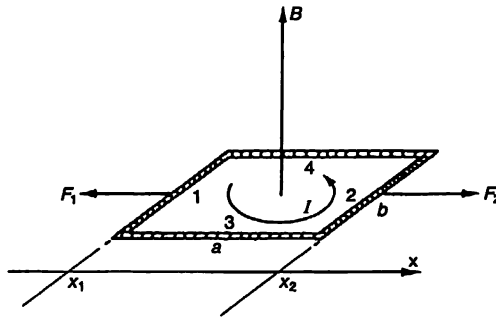
Z důvodů, o kterých budeme hovořit později, *není* tato energie úplnou energií proudové smyčky. (Neuvážili jsme například energii potřebnou k udržování proudu ve smyčce.) Tuto energii proto budeme označovat W_{mech} , abychom si uvědomili, že je pouze částí energie. Protože i tak vynecháváme jistou část energie, můžeme integrační konstantu v rovnici (15.3) považovat za nulovou a rovnici přepsat na tvar

$$W_{\text{mech}} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}. \quad (15.4)$$

Tento vztah je podobný vztahu, který jsme získali pro elektrický dipól:

$$W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}. \quad (15.5)$$

Rozdíl je však v tom, že elektrostatická energie W ve vztahu (15.5) je opravdu energie, zatímco W_{mech} ve vztahu (15.4) skutečnou energií není. Je však *možné* ji použít při výpočtu sil pomocí principu virtuální práce za předpokladu, že proud ve smyčce, anebo alespoň magnetický moment μ , zůstává konstantní.



Obr. 15.2 Smyčku přenášíme ve směru osy x polem B , které je kolmé na x .

V případě pravouhlé smyčky je možné ukázat, že W_{mech} odpovídá práci vykonané při umístění smyčky do pole. Výsledná síla působící na smyčku je rovna nule pouze v homogenním poli; v nehomogenním poli *existují* nenulové výsledné síly působící na proudovou smyčku. Při umístění smyčky do oblasti s polem je nutné s ní projít místy, kde pole není homogenní, a proto se koná práce. Abychom zjednodušili výpočet, budeme smyčku vkládat do pole tak, že její moment bude s polem rovnoběžný. (Do konečné polohy ji můžeme natočit po vložení do pole.)

Představte si, že chceme smyčku posunout ve směru osy x do oblasti, kde je pole silnější, a že smyčka je orientována tak, jak ukazuje obr. 15.2. Začneme někde tam, kde je pole nulové a integrujeme součin síly a vzdálenosti tak, jak smyčku do pole vnášíme.

Nejdříve oddělíme vypočítáme práci, konanou při přenášení jednotlivých stran smyčky, a pak tyto příspěvky sečteme (místo toho, abychom síly sčítali před integrováním). Síly působící na strany 3 a 4 jsou kolmé ke směru pohybu a proto od nich žádná práce nepochází. Síla působící

na stranu 2 směřuje podél osy x a je rovna $IbB(x)$. Abychom dostali práci, která se koná proti působení magnetických sil, musíme tuto sílu integrovat od takové hodnoty x , při níž je pole nulové, tj. např. od $x = -\infty$ až do současné polohy x_2 .

$$W_2 = - \int_{-\infty}^{x_2} F_2 dx = -Ib \int_{-\infty}^{x_2} B(x) dx. \quad (15.6)$$

Podobně bychom pro práci konanou proti silám na straně 1 dostali

$$W_1 = - \int_{-\infty}^{x_1} F_1 dx = Ib \int_{-\infty}^{x_1} B(x) dx. \quad (15.7)$$

Abychom určili každý z těchto integrálů, musíme vědět, jak závisí $B(x)$ na x . Všimněte si však, že strana 1 je při pohybu smyčky po celou dobu rovnoběžná se stranou 2 a je od ní stále stejně vzdálená, takže její integrál zahrnuje většinu práce konané při přemísťování strany 2. Součet (15.6) a (15.7) je tedy právě

$$W = -Ib \int_{x_1}^{x_2} B(x) dx. \quad (15.8)$$

Jsme-li však v oblasti, kde B je téměř stejné na obou stranách 1 a 2, můžeme integrál vyjádřit ve tvaru

$$\int_{x_1}^{x_2} B(x) dx = (x_2 - x_1) B = aB,$$

kde B je pole ve středu smyčky. Celková vložená mechanická energie je potom

$$W_{\text{mech}} = W = -IaB = -\mu B.$$

Výsledek je ve shodě s výrazem pro energii, který jsme uvažovali ve vztahu (15.4).

Stejný výsledek bychom, samozřejmě, dostali, kdybychom při určování práce ještě před integrováním sečetli síly působící na smyčku. Označíme-li B_1 pole na straně 1 a B_2 pole na straně 2, bude celková síla působící ve směru osy x rovna

$$F_x = Ib(B_2 - B_1).$$

Je-li smyčka „malá“, tj. když se B_2 a B_1 příliš neliší, můžeme psát

$$B_2 = B_1 + \frac{\partial B}{\partial x} \Delta x = B_1 + \frac{\partial B}{\partial x} a.$$

Pro sílu pak platí

$$F_x = Iab \frac{\partial B}{\partial x}. \quad (15.10)$$

Celková práce, kterou na smyčce konají *vnější síly*, je pak

$$-\int_{-\infty}^x F_x dx = -Iab \int \frac{\partial B}{\partial x} dx = -Iab B$$

takže opět $-\mu B$. Teprve teď vidíme, proč je *síla* působící na malou proudovou smyčku úměrná derivaci magnetického pole, jak to vyplývá z

$$F_x \Delta x = -\Delta W_{\text{mech}} = -\Delta (-\mu \cdot B). \quad (15.11)$$

Dospěli jsme tedy k výsledku: Ačkoli $W_{\text{mech}} = -\mu \cdot B$ nemusí zahrnovat všechny formy energie systému (vždyť je to jen napodobenina energie), přece ji lze využít a pomocí principu virtuální práce z ní určit síly působící na smyčky, jimiž protéká ustálený proud.

15.2 MECHANICKÁ A ELEKTRICKÁ ENERGIE

Nyní chceme ukázat, proč energie W_{mech} , o níž jsme hovořili v předcházející kapitole, není správnou energií vázanou na ustálené proudy, proč není v souladu se zachováním celkové energie ve vesmíru. Už jsme však zdůraznili, že ji můžeme použít jako energii při výpočtu sil z principu virtuální práce *za předpokladu*, že se ve smyčce proud nemění (a nemění se ani ostatní proudy). Nyní si všimněme, proč je tomu tak.

Představme si, že smyčka na *obr. 15.2* se pohybuje v kladném směru osy x a osu z považujeme za směr vektoru B . Vodivostní elektrony na straně 2 budou vystaveny síle působící podél vodiče ve směru osy y . V důsledku jejich pohybu vodičem teče elektrický proud a existuje složka rychlosti v v tom směru, v němž působí síla. Na každém elektronu proto pole vykonává práci, jejíž velikost za jednotku času je $F_y v$, přičemž v_y je složkou elektronové rychlosti podél vodiče. Tuto práci nazveme *elektrickou*. Ukazuje se, že při pohybu smyčky v *homogenním* poli je celková elektrická práce nulová, neboť na jedné straně smyčky se koná kladná práce, zatímco na druhých částech se koná stejné množství záporné práce. To však neplatí, pohybuje-li se obvod v *nehomogenním* poli, kdy *se koná* nenulové množství práce na elektronech. Obecně se tato práce snaží změnit tok elektronů, ale udržuje-li se proud na konstantní hodnotě, bude energie absorbována nebo odevzdávána baterií nebo jiným zdrojem udržujícím ustálený proud. Tuto energii jsme nezahrnuli, když jsme počítali W_{mech} v rovnici (15.9), neboť naše výsledky zahrnovaly jen mechanické síly působící na vodič.

Možná namítáte, že síla působící na elektrony závisí na *rychlosti*, kterou se vodič pohybuje; kdyby se vodič pohyboval dostatečně pomalu, bylo by možné tuto elektrickou energii zanedbat. Je sice pravda, že *rychlost*, jíž je elektrická energie odevzdávána, je úměrná rychlosti vodiče, ale *celková* odevzdaná energie je úměrná také *času*, za který toto odevzdávání probíhá. Proto je celková elektrická energie úměrná součinu rychlosti a času, což však představuje překonanou vzdálenost. Pro danou vzdálenost je tedy množství konané elektrické práce vždy stejné.

Uvažujme úsek vodiče jednotkové délky, kterým teče proud I a který se pohybuje rychlostí v_{vod} ve směru kolmém k sobě samému a k magnetickému poli B . V důsledku elektrického proudu budou mít elektrony driftovou rychlost v_{drift} podél vodiče. Složka magnetické síly působící na každý elektron se směru driftu je rovna $q_e v_{\text{vod}} B$. Pak pro rychlost, jíž se elektrická práce koná,

platí $Fv_{\text{drift}} = (q_e v_{\text{vod}} B) v_{\text{drift}}$. Je-li v jednotkové délce vodiče N vodivostních elektronů, pro celkovou rychlost, kterou se koná elektrická práce, platí

$$\frac{dW_{\text{elektr}}}{dt} = Nq_e v_{\text{vod}} B v_{\text{drift}}.$$

Jenže $Nq_e v_{\text{drift}} = I$ (kde I je proud ve vodiči), a proto

$$\frac{dW_{\text{elektr}}}{dt} = I v_{\text{vod}} B.$$

Protože proud je udržován na konstantní hodnotě, nevyvolají síly působící na vodivostní elektrony jejich urychlování; elektrickou energii nedostanou elektrony, ale zdroj, který udržuje proud na konstantní hodnotě. Všimněte si však, že síla působící na vodič je rovna IB , takže IBv_{vod} je *mechanická práce* konaná na vodiči za jednotku času, tj. $dW_{\text{mech}}/dt = IBv_{\text{vod}}$. Můžeme tedy říci, že mechanická práce konaná na vodiči je stejná jako elektrická práce konaná na zdroji proudu, takže energie smyčky zůstává *konstantní*.

To není pouze shoda náhod, ale důsledek zákona, který už známe. Pro celkovou sílu působící na každý náboj ve vodiči platí

$$F = q(E + v \times B).$$

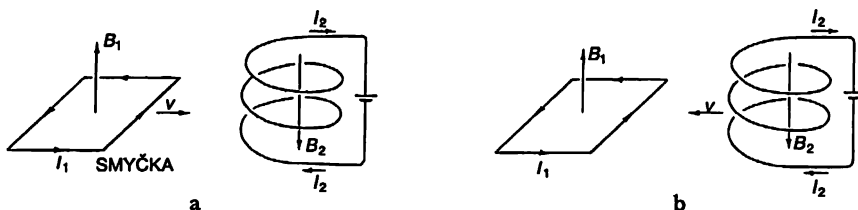
Pro rychlost, kterou se práce koná, platí

$$v \cdot F = q[v \cdot E + v \cdot (v \times B)]. \quad (15.12)$$

Kde elektrická pole nejsou, tam zůstane jen druhý člen, který je vždy nulový. Později uvidíme, že změny magnetických polí vytvářejí elektrická pole, a proto naše argumentace platí jen pro vodiče pohybující se v konstantních magnetických polích.

Jak je pak ale možné, že princip virtuální práce dává správnou odpověď? Je to proto, že jsme stále ještě neuvažovali *celkovou* energii ve vesmíru. Nezahrnuli jsme totiž ještě energii proudů, které *vytvářejí* magnetické pole vystupující v každé úvaze.

Představme si však, že máme takový úplný systém, jaký je zobrazen na obr. 15.3a, v němž pohybujeme smyčkou s proudem I_1 tak, že se dostává do magnetického pole B_1 vytvářeného proudem I_2 v cívce. Proud I_1 protékající smyčkou bude rovněž vyvolávat nějaké magnetické pole B_2 v cívce. Když se smyčka pohybuje, bude se pole B_2 měnit. Jak uvidíme v následující kapitole, proměnné magnetické pole generuje elektrické pole E , a toto elektrické pole koná práci nad náboji v cívce. I tuto energii musíme zahrnout do naší souhrnné energetické bilance.



Obr. 15.3 Určení energie malé smyčky v magnetickém poli

S vyjádřením tohoto nového energetického členu bychom mohli počkat až do další kapitoly, ale už teď můžeme zjistit, jaký má tvar, použijeme-li princip relativity. Pohybujeme-li smyčkou směrem k pevné cívce, víme, že její elektrická energie je stejně velká a opačného znamení než konaná práce. Platí tedy

$$W_{\text{mech}} + W_{\text{elektr}}(\text{smyčky}) = 0.$$

Předpokládejme, že se na tento děj díváme z jiného hlediska, kdy je smyčka v klidu a cívka se pohybuje směrem k ní. Stejnou úvahou jako v předcházejícím případě dospějeme k vztahu

$$W_{\text{mech}} + W_{\text{elektr}}(\text{cívky}) = 0.$$

Mechanická energie je v obou případech stejná, neboť pochází od síly působící mezi obvody. Součet uvedených rovnic je roven

$$2 W_{\text{mech}} + W_{\text{elektr}}(\text{smyčky}) + W_{\text{elektr}}(\text{cívky}) = 0.$$

Úplná energie celého systému je rovna součtu obou elektrických energií a mechanické energie, vzaté ovšem pouze jednou. Máme tedy

$$W_{\text{celk}} = W_{\text{elektr}}(\text{smyčky}) + W_{\text{elektr}}(\text{cívky}) + W_{\text{mech}} = -W_{\text{mech}}. \quad (15.13)$$

Úplná energie celého světa je vlastně *záporně* vzatá W_{mech} . Chceme-li vyjádřit skutečnou energii např. magnetického dipólu, musíme psát

$$W_{\text{celk}} = +\mu \cdot B.$$

Jen tehdy, když předpokládáme, že všechny proudy jsou konstantní, stačí k určení mechanických sil uvažovat pouze část energie W_{mech} , která je vždy stejná jako záporně vzatá skutečná energie. Obecně však musíme dát pozor na to, abychom zahrnuli opravdu všechny energie.

S podobnou situací jsme se setkali v elektrostatičce. Tam jsme ukázali, že energie kondenzátoru je rovna $Q^2/2C$. Použijeme-li k určení síly působící mezi deskami kondenzátoru princip virtuální práce, zjistíme, že změna energie je rovna součinu $Q^2/2$ a změny $1/C$, tj.

$$\Delta W = \frac{Q^2}{2} \Delta \left(\frac{1}{C} \right) = -\frac{Q^2}{2} \frac{\Delta C}{C^2}. \quad (15.14)$$

Předpokládejme, že máme vypočítat práci při pohybu dvou vodičů, ale za jiných podmínek – takových, že napětí mezi nimi se udržuje na stálé hodnotě. Správnou hodnotu síly bychom mohli dostat z principu virtuální práce, kdybychom postupovali trochu uměle. Protože $Q = CU$, bude skutečná energie $\frac{1}{2} CU^2$. Když však definujeme umělou energii jako $-\frac{1}{2} CU^2$, síly můžeme určit pomocí principu virtuální práce, považujeme-li změnu této umělé energie za rovnou mechanické práci. Přitom požadujeme, aby napětí U zůstávalo konstantní. Potom platí vztah

$$\Delta W_{\text{mech}} = \Delta \left(-\frac{CU^2}{2} \right) = -\frac{U^2}{2} \Delta C \quad (15.15)$$

kteřý je stejný jako vztah (15.14). Dostali jsme správný výsledek, ačkoli jsme zanedbali práci, kterou koná elektrický systém, aby udržel konstantní napětí. Tato elektrická energie je opět dvakrát větší než mechanická energie a má opačné znaménko.

Ačkoliv při výpočtu používáme umělý obrat a zanedbáváme skutečnost, že zdroj potenciálu koná práci, aby udržel konstantní napětí, dostáváme správný výsledek. Je to tatáž situace jako v magnetostatice.

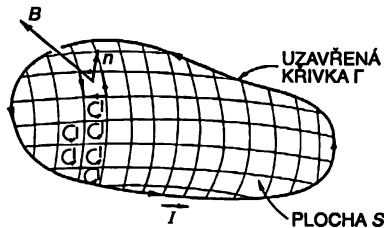
15.3 ENERGIE USTÁLENÝCH PROUDŮ

Poznatek, že $W_{\text{celk}} = -W_{\text{mech}}$ můžeme nyní využít při hledání skutečné energie ustálených proudů v magnetických polích. Můžeme začít se skutečnou energií malé proudové smyčky. Označíme-li W_{celk} prostě W , můžeme psát

$$W = \mu \cdot B. \quad (15.16)$$

Tuto energii jsme vypočítali pro rovinnou pravoúhlou smyčku, ale stejný výsledek platí pro malou rovinnou smyčku libovolného tvaru.

Energii obvodu libovolného tvaru můžeme najít, představíme-li si, že se skládá z malých proudových smyček. Předpokládejme, že máme vodič ve tvaru smyčky Γ zobrazené na obr. 15.4. Vyplňme tuto křivku plochou S a na jejím povrchu vyznačme velké množství malých smyček, které můžeme považovat za rovinné. Necháme-li proud obíhat v každé z těchto malých smyček, bude konečný důsledek stejný, jako kdyby proud tekla smyčkou Γ , neboť proudy ve všech vnitřních větvích se vruší. Z fyzikálního hlediska takový systém malých proudů nelze odlišit od původního obvodu. I elektrická energie musí být stejná a bude ji možno vyjádřit jako součet energií malých smyček.



Obr. 15.4 Energií velké smyčky v magnetickém poli můžeme považovat za součet energií malých smyček.

Je-li obsah plochy každé malé smyčky ΔS , bude její energie $I \Delta S B_n$, kde B_n označuje složku kolmou na danou plochu ΔS . Pro celkovou energii platí

$$W = \sum I B_n \Delta S.$$

Přejdeme-li k limitě infinitezimálních smyček, změní se suma v integrál a dostaneme

$$W = I \int B_n dS = I \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (15.17)$$

kde \mathbf{n} je jednotkový vektor ve směru normály k dS .

Položíme-li $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, můžeme použitím Stokesovy věty přejít od plošného integrálu ke křivkovému

$$I \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS = I \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}, \quad (15.18)$$

v němž ds je délkový element podél Γ . Pro energii obvodu libovolného tvaru tak dostáváme

$$W = I \oint_{\text{obvod}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (15.19)$$

V tomto výrazu \mathbf{A} označuje, samozřejmě, vektorový potenciál vytvořený těmi proudy (jinými než je proud I ve vodiči), které vyvolávají pole \mathbf{B} v blízkosti vodiče.

Jakékoliv rozdělení ustálených proudů si můžeme představit tak, jako kdyby bylo složeno z vláken, která probíhají rovnoběžně s proudovými čarami. Pro každou dvojici takových obvodů je energie dána vztahem (15.19), v němž je integrál brán podél jednoho obvodu a vektorový potenciál pochází z druhého obvodu. K určení celkové energie potřebujeme sčítat příspěvky všech takových dvojic. Kdybychom místo vybrání dvojic provedli sumaci přes všechna vlákna, dostali bychom dvojnásobek energie (s něčím podobným už jsme se setkali v elektrostatičce), a proto pro celkovou energii máme

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} dV. \quad (15.20)$$

Tento vztah odpovídá vztahu, který jsme našli pro elektrostatičkou energii

$$W = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV. \quad (15.21)$$

Vektorový potenciál \mathbf{A} bychom proto mohli, kdybychom chtěli, považovat za jakousi potenciální energii proudů v magnetostatičce. Bohužel, tato myšlenka není příliš šťastná, neboť je přípustná pouze pro statická pole. Žádná z rovnic (15.20) a (15.21) totiž nedává správnou energii pro časově proměnná pole.

15.4 B NEBO A

V této části bychom chtěli pohovořit o této otázce: Je vektorový potenciál pouze užitečnou pomůckou při výpočtech (tak jako byl skalární potenciál užitečný v elektrostatičce), nebo je „skutečným“ polem? Nebo je „reálným“ pouze magnetické pole, protože ono je zodpovědné za sílu působící na pohybující se částici? Především je třeba říci, že výraz „reálné pole“ nemá dost jasný význam. Zaprvé asi nemáte pocit, že magnetické pole je příliš „reálné“, neboť samotná myšlenka pole je dost abstraktní. Nemůžete přece nastavit ruku a pocíť magnetické pole. Navíc

hodnota magnetického pole není příliš určitá; vhodnou volbou pohybující se souřadnicové soustavy lze zařídít, že magnetické pole v daném bodě vymizí.

Co budeme chápat „reálnost“ pole, lze shrnout takto: reálné pole je matematická funkce, kterou používáme k tomu, abychom se vyhnuli představě o působení na dálku. Máme-li v bodě P nabítku částici, bude ovlivňována jinými náboji, jež se nacházejí v určitých vzdálenostech od bodu P . Jeden ze způsobů, jak popsat tuto interakci, je ten, že o těch druhých nábojích řekneme, že vytvářejí jisté „podmínky“ (ať už jsou jakékoliv) v okolí bodu P . Budeme-li znát tyto podmínky, které vyjadřujeme zadáním elektrického a magnetického pole, budeme moci úplně určit chování částice a nebudeme se muset starat o to, co tyto podmínky vytvořilo.

Jinak řečeno, jestliže se ty jiné náboje nějakým způsobem změnily, ale podmínky v bodě P , charakterizované elektrickým a magnetickým polem v tom bodě, zůstanou stejné, bude stejný i pohyb náboje. „Reálné“ pole je pak soubor čísel určených tak, aby to, co se stane v určitém bodě, záviselo pouze na číslech v tom bodě. Nepotřebujeme tedy znát, co se děje v jiných místech. Budeme se zajímat o to, zda je vektorový potenciál „reálným“ polem právě v tomto smyslu.

Může se vám zdát divné, že vektorový potenciál není jednoznačně určen – že je možné jej změnit přidáním gradientu libovolné skalární veličiny, aniž by se nějak změnily síly působící na částice. To však vůbec nesouvisí s jeho „reálností“ chápanou ve zmíněném smyslu. Například magnetické pole se určitým způsobem změní při změně relativního pohybu (tak jako i E nebo A). Nás však nezneklouje, co se stane, když se pole *může* takovýmto způsobem změnit. Není to totiž vůbec podstatné a vůbec to nezávisí na tom, zda je vektorový potenciál „reálným“ polem vhodným pro popis magnetických jevů, nebo zda je pouze užitečným matematickým prostředkem.

O užitečnosti vektorového potenciálu A bychom měli ještě pohovořit. Viděli jsme, že ho lze použít ve formální proceduře výpočtu magnetických polí daných proudů tak, jako je možné použít φ k určení elektrických polí. V elektrostati jsme poznali, že φ je určeno skalárním integrálem

$$\varphi(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2)}{r_{12}} dV_2. \quad (15.22)$$

Pomocí tohoto φ jsme dostali tři složky E třemi diferenciálními operacemi. Takový postup je obvykle jednodušší než výpočet tří integrálů ve vektorovém vztahu

$$\mathbf{E}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2) \mathbf{e}_{12}}{r_{12}^2} dV_2. \quad (15.23)$$

Je to především proto, že jde o tři integrály a pak také proto, že každý z těchto integrálů je obecně složitější než integrál vystupující v (15.22).

V magnetostati nejsou výhody tak jasné. Už samotný integrál pro A je vektorový

$$\mathbf{A}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{j}(2) dV_2}{r_{12}} \quad (15.24)$$

a představuje vlastně tři integrály. Když tvoříme rotaci z A , abychom dostali B , musíme vyjádřit šest derivací a zkombinovat je do dvojic. Není okamžitě jasné, zda je ve většině problémů takovýto postup opravdu jednodušší než výpočet B přímo z výrazu

$$B(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{j(2) \times e_{12}}{r_{12}^2} dV_2. \quad (15.25)$$

Použití vektorového potenciálu bývá často těžší v jednoduchých úlohách. Příčina spočívá v následujícím. Předpokládejme, že se zajímáme jen o magnetické pole B v jednom bodě a že problém má nějakou pěknou symetrii, např. že chceme určit pole v bodě, který leží na ose kruhové proudové smyčky. Díky symetrii snadno určíme B vypočtením integrálu vystupujícího v rovnici (15.25). Kdybychom však nejdříve hledali A , museli bychom vypočítat B pomocí derivací A , tedy museli bychom znát A ve všech bodech okolí toho bodu, který nás zajímá. Většina těchto bodů neleží na ose symetrie a integrál pro A se zkomplikuje. V uvažovaném problému by bylo třeba použít eliptické integrály. Je jasné, že v takových případech není použití A příliš užitečné. I když je pravda, že při řešení mnoha složitých problémů je snazší pracovat s A , byl by to sotva důvod ospravedlňující zavedení dalšího vektorového pole.

Vektorový potenciál A jsme však zavedli proto, že má důležitý fyzikální smysl. Nejen že souvisí s energiemi proudů, jak jsme viděli v předcházející části, ale je „reálným“ fyzikálním polem v uvedeném smyslu. V klasické mechanice je známo, že sílu působící na částici lze vyjádřit ve tvaru

$$F = q(E + v \times B) \quad (15.26)$$

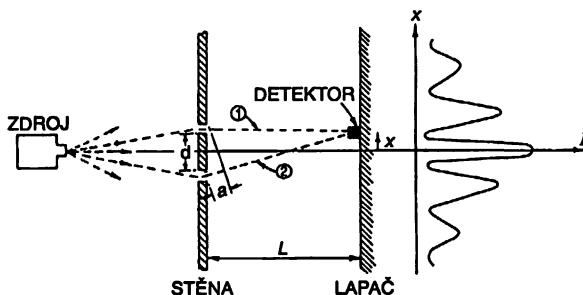
a udáním této síly je i pohyb zcela určen. V jakékoliv oblasti kde $B = 0$, i když A nula není (tak, jako je tomu mimo solenoid), se vliv A neprojeví. Proto se dlouhou dobu věřilo, že A „reálným“ polem není. Ukázalo se však, že existují jevy kvantověmechanické povahy, které svědčí o tom, že pole A je „reálným“ polem v tom smyslu, jak jsme ho definovali. V další části budeme o této skutečnosti hovořit podrobněji.

15.5 VEKTOROVÝ POTENCIÁL A KVANTOVÁ MECHANIKA

Přecházíme-li od klasické ke kvantové mechanice, mění se mnohé naše představy o důležitosti pojmů. O některých jsme už hovořili v 1. díle. Je to zejména ústup od pojmu síla a zdůraznění důležitosti pojmů energie a hybnosti. Určitě si pamatujete, že místo pohybu částic jsou nyní předmětem našeho zájmu amplitudy pravděpodobnosti, které se mění v prostoru a čase. V těchto amplitudách vystupují vlnové délky související s hybnostmi a frekvence související s energiemi. Hybnosti a energie, které určují fázi vlnových funkcí, jsou proto důležitými veličinami kvantové mechaniky. Místo sil se zajímáme o to, jakým způsobem mění interakce vlnovou délku vln. Pojem síly, pokud se o něm vůbec hovoří, se stává druhořadou záležitostí. Mluvme-li například o jaderných silách, zajímáme se většinou o energii interakce mezi dvěma nukleony, a ne o sílu, která mezi nimi působí. Nikoho ani nenapadne derivovat energii, aby určil, jak tato síla vypadá. V této části chceme ukázat, jak vstupuje vektorový a skalární potenciál do kvantové mechaniky. Skutečnost, že hybnost a energie hrají v kvantové mechanice hlavní úlohu, se projeví v tom, že A a ϕ představují nejpřímější způsob zavedení elektromagnetických jevů do kvantových systémů.

Nejdříve si musíme připomenout něco o tom, jak kvantová mechanika pracuje. Znovu budeme uvažovat myšlený pokus s difrakcí elektronů na dvou štěrbinách popsany v 37. kapitole 1. dílu. Sestavení experimentu je znázorněno na obr. 15.5. Elektrony s téměř stejnou energií opouštějí zdroj a putují ke stěně se dvěma úzkými štěrbinami. Za stěnou je lapač s pohyblivým detektorem. Detektor měří frekvenci I , s níž elektrony dopadají na malou oblast lapače ve vzdálenosti x od osy

symetrie. Tato frekvence je úměrná pravděpodobnosti toho, že každý elektron dosáhne po opuštění zdroje oblasti lapače. Rozložení této pravděpodobnosti vypadá složitě (znázorňuje jej obrázek) a chápeme jej jako výsledek interference dvou amplitud, jedné od každé štěrbiny. Interference dvou amplitud závisí na jejich fázovém rozdílu.



Obr. 15.5 Interferenční experiment s elektrony

Jsou-li amplitudy vyjádřeny ve tvaru $C_1 e^{i\varphi_1}$ a $C_2 e^{i\varphi_2}$, bude fázový rozdíl $\delta = \varphi_1 - \varphi_2$ určovat jejich interferenční obrazec (viz 1. díl rovnice (29.12)). Je-li vzdálenost mezi štěrbinami a lapačem L a rozdíl drah elektronů procházejících dvěma štěrbinami je a (jak to znázorňuje obrázek), pak pro fázový rozdíl takových dvou vln platí

$$\delta = \frac{a}{\lambda}. \quad (15.27)$$

Jako obvykle položíme $\lambda = \lambda/2\pi$, kde λ je vlnová délka odpovídající prostorové změně amplitudy pravděpodobnosti. Pro jednoduchost budeme uvažovat jen ty hodnoty x , které jsou mnohem menší než L . Pak můžeme napsat

$$a = \frac{x}{L} d$$

a

$$\delta = \frac{xd}{L\lambda}. \quad (15.28)$$

Je-li x nulové, bude nulové i δ , vlny jsou ve fázi a pravděpodobnost má maximum. Je-li δ rovno π , jsou vlny v protifázi, destruktivně interferují a pravděpodobnost má minimum. Tak dostáváme pro intenzitu elektronů vlnový průběh.

Nyní bychom chtěli zformulovat zákon, který v kvantové mechanice nahrazuje zákon síly $F = qv \times B$. Bude to zákon, který určuje chování kvantověmechanické částice v elektromagnetickém poli. Protože nyní jsou události určovány amplitudami, musí nám tento zákon říci, jak magnetické pole ovlivňuje amplitudy. O zrychlení částice se už zajímat nebudeme. Zákon zní: Fáze, se kterou amplituda po nějaké trajektorii dosáhne detektoru, se v důsledku magnetického pole změní o hodnotu, která je rovna integrálu vektorového potenciálu podél této trajektorie, násobeného podílem náboje částice a Planckovy konstanty. Platí tedy:

$$\text{Změna fáze pod vlivem magnetického pole} = \frac{q}{\hbar} \int_{\text{trajektorie}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (15.29)$$

Kdyby magnetické pole neexistovalo, pozorovali bychom určitou fázi příchodu vlny, když se však magnetické pole někde objeví, vzroste fáze přicházející vlny o hodnotu integrálu ze vztahu (15.29).

Ačkoliv to pro naši diskuzi není třeba, bude vhodné zmínit, že vliv elektrostatického pole se také projevuje změnou fáze, přičemž změna je určena záporně vzatým časovým integrálem ze skalárního potenciálu φ :

$$\text{Změna fáze pod vlivem elektrického pole} = -\frac{q}{\hbar} \int \varphi \, dt.$$

Tyto dva výrazy platí nejen pro statická pole, ale dávají správný výsledek pro libovolné elektromagnetické pole, statické nebo dynamické. Právě tento zákon nahrazuje vztah $F = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Nyní však budeme uvažovat jen statická magnetická pole.

Předpokládejme, že v experimentu se dvěma šterbinami vystupuje i magnetické pole. Ptáme se, s jakou fází dopadají na stínítko dvě vlny, jejichž dráhy procházejí dvěma šterbinami. Jejich interference rozhodne o tom, kde budou maxima pravděpodobnosti. Fázi vlny dopadající po trajektorii (1) označíme φ_1 . Je-li $\varphi_1(B=0)$ fáze v nepřítomnosti magnetického pole, změní se fáze po zapnutí pole a nabude hodnoty

$$\varphi_1 = \varphi_1(B=0) + \frac{q}{\hbar} \int_{(1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (15.30)$$

Podobně lze zapsat fázi vlny přicházející po trajektorii (2):

$$\varphi_2 = \varphi_2(B=0) + \frac{q}{\hbar} \int_{(2)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (15.31)$$

Interference vln v detektoru závisí na fázovém rozdílu

$$\delta = \varphi_1(B=0) - \varphi_2(B=0) + \frac{q}{\hbar} \int_{(1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} - \frac{q}{\hbar} \int_{(2)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (15.32)$$

Rozdíl fází v nepřítomnosti pole označíme $\delta(B=0)$; je to tentýž fázový rozdíl, jaký jsme vypočítali ve vztahu (15.28). Také si všimněte, že dva uvedené integrály lze zapsat jako jediný integrál, který prochází jedním směrem po dráze (1) a zpět po dráze (2). Tuto dráhu nazýváme uzavřená dráha (1-2). Máme tedy

$$\delta = \delta(B=0) + \frac{q}{\hbar} \oint_{(1-2)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}. \quad (15.33)$$

Tato rovnice nám říká, jak se pohyb elektronu v magnetickém poli změní; jeho pomocí můžeme najít nové polohy maxim a minim intenzity.

Dříve než to uděláme, položíme si jednu důležitou a zajímavou otázku. Určitě si pamatujete, že při určování vektorového potenciálu máme určitou volnost. Dvě různé funkce vektorového potenciálu \mathbf{A} a \mathbf{A}' , jejichž rozdíl je gradientem nějaké skalární funkce $\nabla\psi$, odpovídají témuž magnetickému poli, neboť rotace gradientu je nula. Dávají proto tutéž klasickou sílu $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Závisejí-li tedy v kvantové mechanice jevy na vektorovém potenciálu, která z možných funkcí \mathbf{A} je ta správná?

Odpověď na tuto otázku spočívá v tom, že stejná volnost při určení A bude existovat i v kvantové mechanice. Změníme-li v rovnici (15.33) A na $A' = A + \nabla\psi$, získá integrál z A podobu

$$\oint_{(1-2)} A' \cdot ds = \oint_{(1-2)} A \cdot ds + \oint_{(1-2)} \nabla\psi \cdot ds.$$

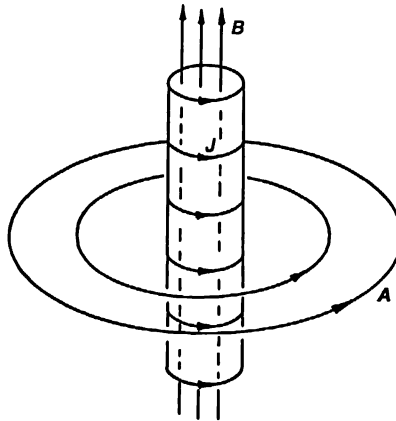
Integrál $\nabla\psi$ je po uzavřené dráze (1–2). Jenže integrál tangenciální složky gradientu po uzavřené dráze je podle Stokesovy věty vždy roven nule. Proto A i A' dávají tytéž fázové rozdíly a tytéž kvantověmechanické interferenční jevy. Tak v klasické, jakož i v kvantové teorii záleží jen na rotaci A ; jakákoliv volba funkce A , která dává správnou rotaci, je fyzikálně správná.

Stejný závěr je zřejmý i z výsledků článku 14.1. Tam jsme zjistili, že křivkový integrál A po uzavřené dráze představuje tok B plochou ohraničenou touto dráhou, což nyní představuje tok mezi dráhami (1) a (2). Chceme-li, můžeme rovnici (15.33) přepsat na tvar

$$\delta = \delta(B = 0) + \frac{q}{\hbar} [\text{tok } B \text{ mezi (1) a (2)}],$$

kde tokem B rozumíme (jak bývá zvykem) plošný integrál normálové složky B . Výsledek závisí jen na B , tj. pouze na rotaci A .

Protože výsledek lze vyjádřit pomocí B i pomocí A , mohl by vzniknout dojem, že B si zachovává charakter „reálného“ pole, zatímco A můžeme přece jen považovat za umělou konstrukci. Ale definice „reálného“ pole, kterou jsme na začátku uvedli, spočívá v myšlence, že „reálné“ pole nebude působit na vzdálenou částici. Můžeme však uvést příklad, kdy je B nulové (nebo alespoň libovolně malé) všude, kde by se mohly nacházet nějaké částice, takže není možné, aby na ně *přímo* působilo.

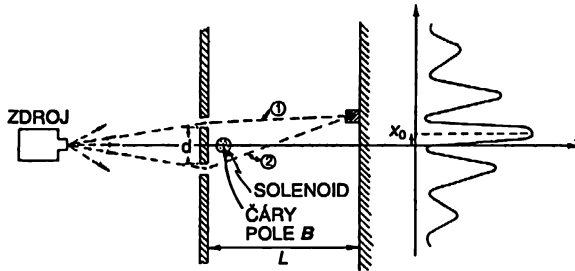


Obr. 15.6 Magnetické pole a vektorový potenciál dlouhého solenoidu

Určitě si vzpomenete, že v případě dlouhého solenoidu, jímž protékal elektrický proud, existovalo pole B uvnitř, ale neexistovalo vně, zatímco existovalo mnoho A cirkulujících po vnější straně solenoidu, jak to znázorňuje obr. 15.6. Vytvoříme-li takové podmínky, aby se elektrony nacházely jen na vnější straně solenoidu, kde existuje jen A , bude solenoid přece jen ovlivňovat jejich pohyb ve shodě s rovnicí (15.33). Klasicky by to nebylo možné. Podle klasických představ závisí síla pouze na B ; aby se částice „dozvěděla“, že solenoidem teče proud, musela by jím projít.

Podle kvantověmechanických představ však můžete zjistit, zda je v solenoidu magnetické pole, aniž byste se k němu přiblížili. Stačí, abyste jej *obešli*.

Předpokládejme, že jsme umístili velmi dlouhý solenoid malého průměru hned za stěnu mezi dvě štěrbinami tak, jak je znázorněno na *obr. 15.7*. Průměr solenoidu musí být mnohem menší než vzdálenost d mezi štěrbinami.



Obr. 15.7 Magnetické pole může ovlivnit pohyb elektronů i tehdy, když existuje pouze v oblasti, v níž je pravděpodobnost výskytu elektronů zanedbatelně malá.

Za těchto podmínek nemá difrakce elektronů na štěrbině velkou pravděpodobnost toho, že se elektrony dostanou do blízkosti solenoidu. Jaký tedy bude účinek na náš interferenční experiment?

Porovnáme případy, kdy solenoidem teče a neteče proud. Neteče-li proud, nemáme ani B ani A a dostáváme původní obrazec rozložení intenzity na stínítku. Zapneme-li proud v solenoidu a vytvoříme uvnitř magnetické pole B , objeví se A na vnější straně solenoidu. Vznikne posun ve fázovém rozdílu, který je úměrný cirkulaci A na vnější straně solenoidu, což znamená, že obrazec maxim a minim se posune do nové polohy. Protože tok B je uvnitř solenoidu konstantní pro libovolnou dvojici drah, bude konstantní i cirkulace A . Každý bod dopadu má stejnou fázovou změnu; to odpovídá posunu celého obrazce ve směru x o konstantní hodnotu, např. x_0 , a tuto hodnotu lze snadno vypočítat. Maximální intenzita se vyskytne tam, kde je fázový rozdíl mezi dvěma vlnami nulový. Použitím rovnice (15.32) nebo (15.33) pro δ a rovnice (15.28) pro $\delta(B=0)$ dostaneme

$$x_0 = -\frac{L}{d} \lambda \frac{q}{\hbar} \int_{(1-2)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (15.35)$$

nebo

$$x_0 = -\frac{L}{d} \lambda \frac{q}{\hbar} [\text{tok } B \text{ mezi (1) a (2)}]. \quad (15.36)$$

Difrakční obrazec bude v přítomnosti solenoidu vypadat tak, jak znázorňuje *obr. 15.7*.²⁰⁾ Tak to alespoň předpovídá kvantová mechanika.

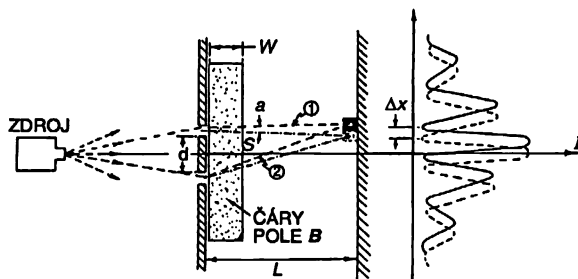
Nedávno byl proveden právě takový experiment, který je velmi obtížný. Protože vlnová délka elektronů je velmi malá, zařízení musí mít nepatrné rozměry, aby bylo možné porovnávat interferenci. Štěrbinami musí být velmi těsně u sebe, a proto musí být velmi malý i solenoid. Ukazuje se, že za jistých podmínek rostou krystaly železa ve tvaru dlouhých, mikroskopicky tenkých vláken, nazývaných whiskery. Při zmagnetování se tyto železné whiskery chovají jako drobné solenoidy

²⁰⁾ Vychází-li pole B z roviny obrázku, je tok podle naší definice záporný a x_0 je kladné.

a s výjimkou těsné blízkosti u konců nemají vnější pole. Právě takovýmto whiskerem mezi dvěma štěrbinami se uskutečnil experiment s elektronovou interferencí a bylo pozorováno předpovězené posunutí obrazce.

V našem smyslu je tedy pole A „reálné“. Můžete namítnout, že tam *přece bylo* magnetické pole. To je sice pravda, ale vzpomeňte si na naši původní myšlenku, že „reálné“ je takové pole, které musí být stanoveno *v tom místě*, kde se částice nachází, aby mohlo ovlivnit její pohyb. Pole B ve whiskeru působí na dálku. Chceme-li popsat jeho účinek aniž bychom uvažovali působení na dálku, musíme použít vektorový potenciál.

Tento problém má zajímavou historii. Teorie, kterou jsme vyložili, byla známa od vzniku kvantové mechaniky roku 1926. Skutečnost, že vektorový potenciál vystupuje ve vlnové rovnici kvantové mechaniky (nazývané Schrödingerova rovnice), byla zřejmá ihned, když byla tato rovnice poprvé napsána. Fyzici, kteří se snažili nahradit v ní vektorový potenciál magnetickým polem, se jeden za druhým přesvědčovali o tom, že to nelze provést nějakým jednoduchým způsobem. Je to jasné i z našeho příkladu elektronů polyhujících se v oblasti, kde není pole, ale elektrony jsou přece jen ovlivňovány. Jelikož v klasické mechanice nemělo A žádný bezprostřední význam a protože jej bylo možné měnit přidáním gradientu, stále se opakovalo, že vektorový potenciál nemá přímý význam, že i v kvantové mechanice jsou skutečně „správná“ jen magnetická a elektrická pole. Podíváme-li se zpět, bude se nám zdát divné, že nikdo nepřišel na takovýto experiment, a až potom, kdy tento experiment navrhli roku 1956 Bohm s Aharonovem, stalo se vše průzračně jasným. Vše na to poukazovalo, ale nikdo tomu nevěnoval pozornost. Proto bylo mnoho fyziků velmi překvapeno, když tento problém přišel na přetřes. Právě proto kdosi považoval za nutné vykonat experiment, aby bylo možné se přesvědčit, zda je to opravdu tak, ačkoliv kvantová mechanika, které se už tolik roků věřilo, dávala jednoznačnou odpověď. Je zajímavé, že takový problém může zůstat třicet let bez povšimnutí a ignorován pro předsudky o tom, co je a co není významné.



Obr. 15.8 Posun interferenčního obrazce způsobený přítomností oblasti s magnetickým polem

Nyní bychom chtěli pokračovat v naší analýze. Ukážeme souvislost mezi kvantově mechanickou a klasickou formulací, abychom pochopili, proč při makroskopickém pohledu na věci vypadá vše tak, jako kdyby na částice působila síla, která je rovna vektorovému součinu qv a rotace A . Abychom z kvantové mechaniky dostali klasickou mechaniku, musíme uvažovat případy, kdy jsou vlnové délky velmi malé ve srovnání se vzdálenostmi, na nichž se vnější podmínky, jako např. pole, výrazně mění. Náš důkaz nebude obecný a podstatu problému objasníme na velmi jednoduchém příkladu. Opět budeme uvažovat náš štěrbinový experiment. Avšak místo magnetického pole ve velmi malé oblasti mezi štěrbinami si představíme magnetické pole, které se rozprostírá do větší oblasti za štěrbinami tak, jak to znázorňuje obr. 15.8. Budeme uvažovat idealizovaný případ, kdy je v úzkém pásu šířky w , malé ve srovnání s L , magnetické pole homogenní. (To lze

snadno zařídít; lapač můžeme dát tak daleko, jak chceme.) Abychom vypočítali fázový posun, musíme vzít dva integrály A podél trajektorií (1) a (2). Viděli jsme, že se liší pouze o tok B mezi těmito drahami. V našem přiblížení je tok roven Bwd . Fázový rozdíl takových dvou drah proto bude

$$\delta = \delta(B = 0) + \frac{q}{\hbar} Bwd. \quad (15.37)$$

Všimněte si, že v našem přiblížení nezávisí fázový posun na úhlu. Výsledek je tedy opět takový, že se celý obrazec posouvá nahoru o veličinu Δx . Použijeme-li rovnici (15.28), dostaneme

$$\Delta x = \frac{L\lambda}{d} \Delta\delta = \frac{L\lambda}{d} [\delta - \delta(B = 0)].$$

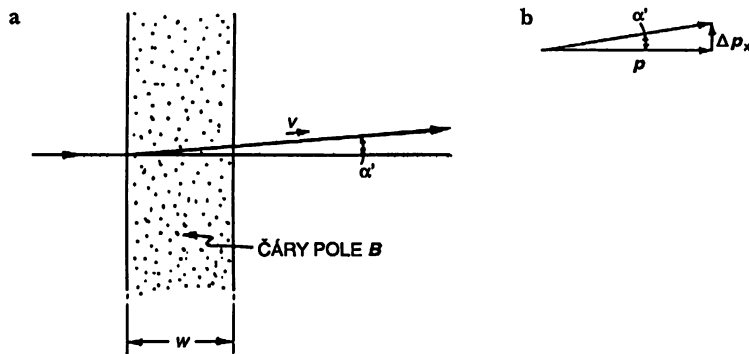
Použitím vztahu (15.37) pro $\delta - \delta(B = 0)$ dospějeme k výrazu

$$\Delta x = L\lambda \frac{q}{\hbar} Bw. \quad (15.38)$$

Takový posun je rovnocenný odklonu všech trajektorií o malý úhel α (viz obr. 15.8), pro který platí

$$\alpha = \frac{\Delta x}{L} = \frac{\lambda}{\hbar} q Bw. \quad (15.39)$$

Z klasického hlediska by úzký pás magnetického pole měl také odklánět všechny trajektorie o nějaký malý úhel, např. α' tak, jak je znázorněno na obr. 15.9.



Obr. 15.9 Odklon částice po průchodu vrstvou s magnetickým polem

Při průchodu elektronů magnetickým polem na ně po dobu w/v působí příčná síla $q v \times B$. Změna jejich příčné hybnosti je rovna právě tomuto impulzu síly, takže

$$\Delta p_x = qwB. \quad (15.40)$$

Úhlové vychýlení (obr. 15.9 b) je rovno poměru této příčné hybnosti k celkové hybnosti p . Tak dostaneme

$$\alpha' = \frac{\Delta p_x}{p} = \frac{q\omega B}{p}. \quad (15.41)$$

Tento výsledek lze porovnat s rovnicí (15.39), v níž je tatáž veličina vypočtena kvantověmechanicky. Souvislost mezi klasickou a kvantovou mechanikou však spočívá v tom, že částici s hybností p odpovídá kvantová amplituda, která se mění jako vlna s délkou $\lambda = \hbar/p$. Vezmeme-li to v úvahu, jsou veličiny α a α' stejné; klasický a kvantový výpočet dávají stejné výsledky.

Z těchto úvah je jasné, proč vektorový potenciál explicitně vystupující v kvantové mechanice vytváří klasickou sílu, která závisí pouze na jeho derivacích. To, na čem v kvantové mechanice záleží, je interference mezi sousedními dráhami; jevy vždy závisejí na tom, jak se pole A mění od bodu k bodu, a proto jsou rozhodující jen derivace A , a ne A samotné. Naproti tomu však vektorový potenciál A (spolu se skalárním potenciálem φ , který jej provází) poskytuje nejpřímější popis fyzikálních dějů. Je to tím zřejmější, čím hlouběji se vnořujeme do kvantové teorie. V obecné teorii kvantové elektrodynamiky jsou vektorový a skalární potenciál základními veličinami vystupujícími v soustavě rovnic, nahrazující Maxwellovy rovnice: veličiny E a B se postupně ztrácejí z moderního vyjadřování fyzikálních zákonů a nahrazují se veličinami A a φ .

15.6 CO PLATÍ VE STATICE, NEPLATÍ V DYNAMICE

V našem zkoumání statických polí jsme dospěli k závěru. Už i v této kapitole jsme se dostali nebezpečně blízko k otázce, co se stane, budou-li se pole měnit s časem. V úvahách o magnetické energii jsme se tomu vyhnuli pouze tak, že jsme si pomohli relativistickou argumentací. I tak jsme však problém energie řešili jaksi uměle a možná i záhadně, neboť jsme ignorovali skutečnost, že pohybující se cívka musí vlastně vytvářet proměnná pole. Nyní je načase zkoumat časově proměnná pole, která jsou předmětem elektrodynamiky. To provedeme v další kapitole. Nejdříve bychom však chtěli zdůraznit některé momenty.

Ačkoliv jsme náš výklad začali tím, že jsme uvedli úplné a správné rovnice elektromagnetizmu, ihned jsme přešli na jakési neúplné rovnice, neboť to bylo jednodušší. Je výhodné začít s jednodušší teorií statických polí a pak jen přejít k složitější teorii, která již zahrnuje i dynamická pole. Pak není nutné učit se najednou mnoho nového a zbývá čas na jakousi intelektuální rozcvičku jako přípravu na těžší úlohy.

Takový postup však v sobě skrývá určité nebezpečí a mohlo by se stát, že dříve než se dostaneme k úplné pravdě, osvojili bychom si předběžné a neúplné pravdy natolik, že bychom je považovali za definitivní. Tak by se nám popletlo to, co je pravdivé, s tím, co platí jen někdy. V tabulce 15.1 proto uvádíme soubor vztahů, k nimž jsme dospěli, přičemž rozlišujeme ty, které jsou obecně platné, od těch, které platí v staticce, ale neplatí v dynamice. Tento soubor alespoň částečně ukazuje cestu, kterou se budeme ubírat. Při zkoumání dynamiky budeme podrobně rozvíjet to, co zatím musíme podat bez důkazu.

Snad bude vhodné uvést několik poznámek v souvislosti s touto tabulkou. Především si všimněte, že rovnice, z nichž jsme vycházeli, jsou *správné* – tady jsme vás vůbec nepovedli. Elektromagnetická síla (známá jako *Lorentzova síla*) $F = q(E + v \times B)$ je *správná*. Pouze Coulombův zákon není *správný* a lze jej použít pouze ve statickém případě. Čtyři Maxwellovy rovnice pro E a B jsou také *správné*. Rovnice, které používáme ve staticce, jsou, samozřejmě, neúplné, neboť všude vynecháváme časové derivace.

Tabulka 15.1

OBECNĚ NEPLATÍ (platí jen ve staticce)

PLATÍ VŽDY

$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (\text{Coulombův zákon})$	$F = q(E + v \times B)$	(Lorentzova síla)
	$-\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	(Gaussův zákon)
$\nabla \times E = 0$	$-\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$	(Faradayův zákon)
$E = -\nabla\varphi$	$E = -\nabla\varphi - \frac{\partial A}{\partial t}$	
$E(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2) e_{12}}{r_{12}^2} dV_2$		
Pro vodiče $E = 0$, $\varphi = \text{konst.}$ $Q = CU$	Ve vodiči E vyvolává proudy	
$c^2 \nabla \times B = \frac{j}{\epsilon_0} \quad (\text{Ampérův zákon})$	$-\nabla \cdot B = 0 \quad (\text{neexistence magnetických nábojů})$	
	$B = \nabla \times A$	
$B(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{j(2) \times e_{12}}{r_{12}^2} dV_2$	$-c^2 \nabla \times B = \frac{j}{\epsilon_0} + \frac{\partial E}{\partial t}$	
$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{Poissonova rovnice})$	$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$	
$\nabla^2 A = -\frac{j}{\epsilon_0 c^2}$	$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{j}{\epsilon_0 c^2}$	
$\nabla \cdot A = 0$	$c^2 \nabla \cdot A + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$	
$\varphi(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\varphi(2)}{r_{12}} dV_2$	$\varphi(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(2, t')}{r_{12}} dV_2$	
$A(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{j(2)}{r_{12}} dV_2$	$A(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{j(2, t')}{r_{12}} dV_2$	
	$t' = t - \frac{r_{12}}{c}$	
$W = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV + \frac{1}{2} \int j \cdot A dV$	$W = \int \left(\frac{\epsilon_0}{2} E \cdot E + \frac{\epsilon_0 c^2}{2} B \cdot B \right) dV$	

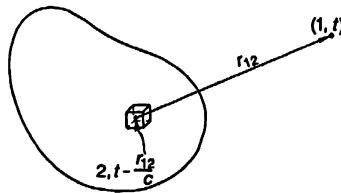
Gaussův zákon $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$ zůstává v platnosti, ale rotace \mathbf{E} není obecně nulová. \mathbf{E} proto není vždy rovno gradientu skaláru – elektrostatického potenciálu. Uvidíme, že skalární potenciál zůstává, ale je veličinou závislou na čase, kterou musíme používat spolu s vektorovým potenciálem pro úplný popis elektrického pole. I rovnice, kterým vyhovuje tento nový skalární potenciál, jsou nevyhnutelně nové.

Musíme se vzdát i myšlenky, že \mathbf{E} je ve vodičích nulové. Mění-li se pole, nemají náboje ve vodiči obecně nemají čas přeskupit se tak, aby pole bylo nulové. Dostávají se do pohybu, ale nikdy nedosahují rovnováhy. Jediným obecným tvrzením je, že elektrická pole ve vodičích vytvářejí proudy. V proměnných polích tedy není vodič ekvipotenciálním tělesem. Pak už není docela přesná ani představa o kapacitě.

Protože neexistují magnetické náboje, je divergence \mathbf{B} vždy nulová. Potom lze \mathbf{B} vždy vyjádřit jako $\nabla \times \mathbf{A}$. (Ne vše se mění!) Jenže \mathbf{B} není generováno pouze proudy; $\nabla \times \mathbf{B}$ je úměrné proudové hustotě plus nový člen $\partial \mathbf{E} / \partial t$. To znamená, že \mathbf{A} souvisí s proudy podle nového vztahu. Vektorový potenciál \mathbf{A} souvisí i s φ . Využijeme-li volnosti, kterou při určování \mathbf{A} máme, a vhodně zvolíme $\nabla \cdot \mathbf{A}$, nabudou rovnice pro \mathbf{A} a φ jednoduchého a elegantního tvaru. Budeme-li žádat, aby platilo $c^2 \nabla \cdot \mathbf{A} = -\partial \varphi / \partial t$, budou mít diferenciální rovnice pro \mathbf{A} a φ takový tvar, jaký je v naší tabulce.

Rovnice označené šipkou – jsou Maxwellovy rovnice.

Potenciály \mathbf{A} a φ lze stále vyjádřit pomocí integrálů proudů a nábojů, ale už to nejsou stejné integrály jako ve staticce. Nejpozoruhodnější je to, že správné integrály se od statických liší jen málo a přitom má tento rozdíl jasný fyzikální smysl. Počítáme-li integrály, abychom našli potenciály v určitém bodě (např. v bodě (1) z obr. 15.10), musíme použít hodnoty \mathbf{j} a ρ v bodě (2), ale v dřívějším čase $t' = t - r_{12} / c$. Jak se dalo čekat, vliv z bodu (2) na bod (1) se šíří rychlostí c . Respektujeme-li tuto malou změnu, můžeme už určovat pole měnících se proudů a nábojů, neboť známe-li \mathbf{A} a φ , dostaneme tak, jako předtím \mathbf{B} ze vztahu $\nabla \times \mathbf{A}$ a \mathbf{E} ze vztahu $-\nabla \varphi - \partial \mathbf{A} / \partial t$.



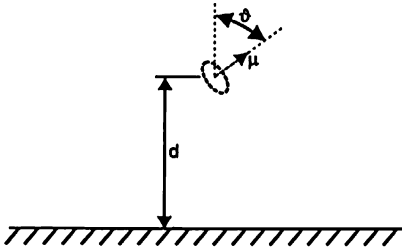
Obr. 15.10 Potenciály v bodě (1) a čase t jsou součtem příspěvků od každého elementu zdroje v proměnném bodě (2) s proudy a náboji, které tam byly v dřívějším čase $t - r_{12} / c$.

Nakonec je vidět, že některé výsledky, např. že hustota energie v elektrickém poli je rovna $\epsilon_0 E^2 / 2$, jsou správné v elektrodynamice stejně jako v elektrostaticce. Takovouto věc však nesmíte považovat za „přirozenou“. Platnost kteréhokoli statického vztahu se musí opětovně prověřovat, abychom se přesvědčili, zda je vztah platný i v dynamickém případě. Výstražným případem je výraz pro elektrostatickou energii pomocí objemového integrálu $\rho \varphi$. Tento výsledek je správný jen ve statickém případě.

O všech těchto věcech budeme co nejdříve hovořit podrobněji, ale zatím bude snad dobré, když budete mít na paměti tento přehled. Budete vědět, co můžete zapomenout a co je třeba si pamatovat jako vždy správné.

PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 15.1 ■ Uvnitř supravodiče jsou pole B a E nulová.
- Na povrchu supravodiče je tečná složka elektrického pole E nulová. Jaká hraniční podmínka platí pro magnetické pole B ?
 - Malá proudová smyčka je umístěna ve vzdálenosti d od povrchu supravodiče, který zaujímá celý poloprostor (viz obrázek). Magnetický moment μ smyčky svírá úhel ϑ s normálou k povrchu supravodiče. Popište stručně způsob, jak je možno určit magnetické pole v libovolném bodě prostoru za předpokladu, že magnetické pole dipólu známe.
 - Najděte závislost momentu síly, který působí na dipól, na úhlu ϑ . Najděte úhly odpovídající rovnovážné poloze dipólu. Kdy bude rovnováha dipólu stabilní a kdy nestabilní?
 - Najděte závislost síly, která dipól k supravodiči přitahuje nebo odpuzuje na úhlu ϑ .



Indukované proudy

16.1 MOTORY A GENERÁTORY

16.2 TRANSFORMÁTORY A INDUKČNOSTI

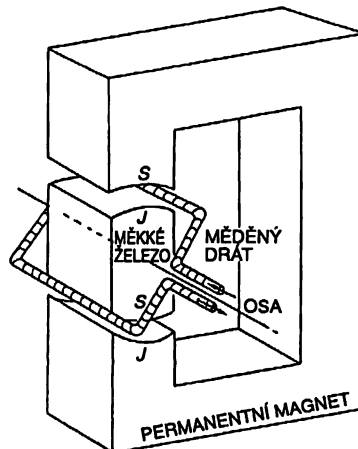
16.3 SÍLY PŮSOBÍCÍ NA INDUKOVANÉ PROUDY

16.4 ELEKTROTECHNIKA

16.1 MOTORY A GENERÁTORY

Když byla roku 1820 objevena úzká souvislost mezi elektřinou a magnetizmem, vyvolalo to určité vzrušení, neboť až do té doby se tyto dva předměty považovaly za docela nezávislé. Nejprve se zjistilo, že proudy tekoucí vodiči vytvářejí magnetická pole; později, ale ještě téhož roku, byla objevena skutečnost, že na vodiče, jimiž tečou proudy, působí v magnetickém poli síly.

Příčina rozruchu spočívala částečně v tom, že přítomnost mechanických sil nabízí možnost jejich využití ve strojích ke konání práce. Téměř ihned po zmíněném objevu se začalo s konstrukcí elektromotorů, které využívaly síly působící na vodiče proudu. Princip elektromagnetického motoru je schématicky znázorněn na *obr. 16.1*. Permanentní magnet (který má obvykle některé části z měkkého železa) vytváří magnetické pole ve dvou šterbinách.



Obr. 16.1 Schématický náčrt jednoduchého elektromagnetického motoru

V každé šterbině je severní a jižní pól (*obr. 16.1*). Pravoúhlá měděná cívka se pohybuje tak, že v každé šterbině má jednu ze svých stran. Protéká-li cívku proud, má v jednotlivých šterbinách opačný směr, a proto na cívku působí opačné síly, které tak vytvářejí silný moment vzhledem k ose otáčení. Je-li cívka připevněna ke hřídeli, aby se mohla otáčet, lze ji připojit ke kladce nebo jinému zařízení a může konat práci.

Tutěž myšlenku můžeme využít při konstrukci citlivého přístroje pro elektrická měření. Hned po objevu zákona síly velmi stoupla přesnost elektrických měření. Především lze při daném proudu silně zvětšit moment síly takového motoru tím, že proud bude procházet mnoha závitů a ne pouze jediným. Dále lze cívku upravit tak, že se otáčí při velmi malém momentu síly buď v důsledku uložení hřídele do jemných ložisek z drahokamu, nebo v důsledku zavěšení cívky na tenký drátek nebo křemíkové lanko. Pak i nepatrný proud vyvolá otáčení cívky a pro malé úhly je velikost otočení úměrná proudu. Otočení můžeme odměřit tak, že na cívku přilepíme ukazatel nebo v případě velmi přesných přístrojů připevníme k cívice zrcátko a sledujeme posun obrazu na stupnici. Takové přístroje se nazývají galvanometry. Voltmetry a ampérmetry pracují na téměř principu.

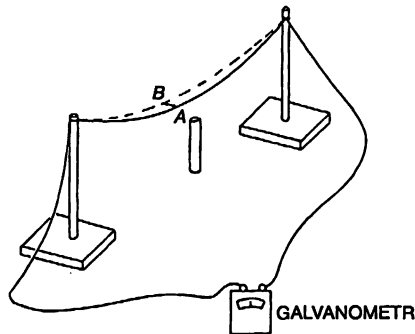
Ve větším měřítku lze stejnou myšlenku využít při konstrukci silných motorů konajících mechanickou práci. Cívka se bude nepřetržitě otáčet, zabezpečíme-li pomocí kontaktů přitisknutých k hřídeli změnu polarity přívodu k cívice po každé poloviční otáčce. Moment síly pak bude mít vždy stejný směr. Malé stejnosměrné motory jsou konstruovány právě takovýmto způsobem. Větší stejnosměrné i střídavé motory jsou často konstruovány tak, že permanentní magnet je nahrazen elektromagnetem napájeným ze zdroje elektrické energie.

Když lidé poznali, že elektrické proudy vytvářejí magnetická pole, hned je napadlo, že magnety by také nějakým způsobem mohly vytvářet elektrická pole. A tak se uskutečnila celá řada experimentů. Jeden z nich spočíval např. v tom, že v jednom ze dvou paralelních vodičů tekla proud a sledovalo se, zda proud nepoteče i v druhém vodiči. Tento pokus byl odrazem představy, že magnetické pole může nějakým způsobem pohánět elektrony podél druhého vodiče, přičemž platí zákon, že „podobné se snaží pohybovat podobně“. I při největších proudcích a nejcitlivějším galvanometru se však nepodařilo zjistit ve druhém vodiči nějaký proud. Ani silné magnety v blízkosti vodičů nezpůsobily pozoruhodný efekt. Až Faraday roku 1840 objevil podstatu, která do té doby unikala pozornosti – že elektrické jevy existují jen tehdy, když se něco *mění*. Teče-li v jednom ze dvojice vodičů *proměnný* proud, indukuje se proud i ve druhém vodiči a poteče i tehdy, když se v blízkosti elektrického obvodu *pohybuje* magnet. V takových případech hovoříme o *indukovaných* proudcích. Taková je podstata indukce objevené Faradayem. Nepříliš zajímavý předmět statických polí se tak stal součástí vzrušujícího dynamického předmětu s mnoha úžasnými jevy. V této kapitole se setkáte s kvalitativním popisem některých těchto jevů. Uvidíte, jak snadno se lze dostat ke složitým situacím, které lze pouze obtížně kvantitativně podrobně analyzovat. To nám však zatím nebude překážet, neboť hlavním cílem této kapitoly je pouze se seznámit s jevy tohoto druhu. Podrobný rozbor ponecháme na později.

Z toho, co již víme, snadno pochopíme jeden rys elektromagnetické indukce, který nebyl znám za dob Faradaye. Podstata spočívala v síle $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, která působí na pohybující se náboj a která je úměrná rychlosti náboje v magnetickém poli. Mějme vodič, jenž se pohybuje v blízkosti magnetu tak, jak to znázorňuje *obr. 16.2*, přičemž konce vodiče jsou připojeny ke galvanometru. Pohybuje-li se vodič nad polem magnetu, vychýlí se ručička galvanometru.

Magnet vytváří určité vertikální magnetické pole a posouváme-li vodič tímto polem, působí na elektrony vodiče *boční* síla, kolmá k poli i směru pohybu. Tato síla pohybuje elektrony podél vodiče. Proč se však pohne ručička galvanometru, která je daleko od působíště síly? Proto, že

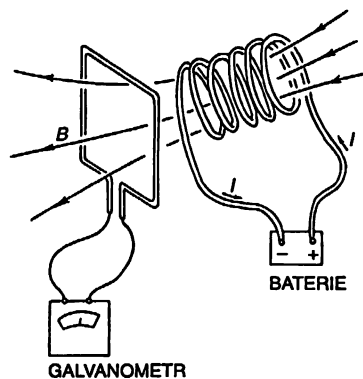
elektrony, na něž působí magnetická síla, se začnou pohybovat a tlačí (prostřednictvím elektrického odpuzování) sousední elektrony ve vodiči; ty zase zatlačí jejich sousedy a tak to půjde dál až do velké vzdálenosti. Je to opravdu překvapující.



Obr. 16.2 Pohybem vodiče v magnetickém poli vytváříme proud, který registruje galvanometr.

Gausse a Webera, kteří sestrojili galvanometr, to tak překvapilo, že se rozhodli zjistit, jak daleko se síly ve vodiči dostanou. Proto natáhli vodič přes celé město. Pan Gauss stál na jednom konci a připojil vodiče k baterii (kterou znali lidé ještě před generátory) a pan Weber pozoroval ručičku galvanometru. Našli vlastně způsob přenosu signálu na velkou vzdálenost – tak se zrodil telegraf! To samozřejmě, přímo s indukcí nesouvisí – jde tu o způsob, jakým tečou proudy ve vodičích, přičemž tyto proudy mohou, ale nemusí, být indukované.

Nyní předpokládejme, že v zařízení znázorněném na obr. 16.2 ponecháme vodiče v klidu a budeme pohybovat magnetem. Opět zpozorujeme pohyb ručičky galvanometru. Faraday objevil i to, že pohyb magnetu pod vodičem v jednom směru má stejný účinek jako pohyb vodiče nad magnetem v opačném směru. Jenže když se pohybuje magnet, nepůsobí na elektrony ve vodiči žádná síla $v \times B$. Faraday tedy objevil něco opravdu nového. Dnes už to umíme vysvětlit pomocí teorie relativity.



Obr. 16.3 Cívka, kterou teče proud, vytváří v druhé cívce proud, pohybuje-li se první cívka, nebo mění-li se proud v ní.

Už víme, že magnetické pole magnetu pochází z jeho vnitřních proudů. Proto očekáváme stejný efekt, když místo magnetu na obr. 16.2, použijeme cívku, kterou protéká proud. Pohybuje-li

se vodič u cívky, proteče galvanometrem proud a totéž se stane i tehdy, když se bude pohybovat cívka u vodiče. Jenže nyní se setkáváme s něčím ještě zajímavějším: Měníme-li magnetické pole cívky nikoliv jejím pohybem, ale tím, že změníme její proud, objeví se opět výchylka galvanometru. Máme-li například smyčku drátu u cívky tak, jak to znázorňuje *obr. 16.3* a obě necháme v klidu, ale vypneme proud, objeví se v galvanometru proudový náraz. Zapneme-li opět cívku, vychýlí se ručička galvanometru v opačném směru.

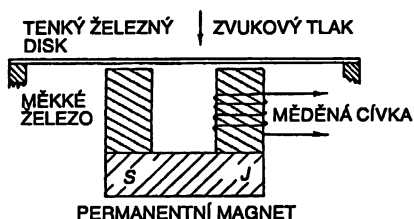
Vždy, když galvanometrem z *obr. 16.2* nebo *16.3* teče proud, existuje ve vodiči výsledný tlak na elektrony v určitém směru. Na různých místech vodiče mohou být tlaky v různých směrech, ale v jednom směru je tlak větší než v druhém. To, co se projeví navenek, je tlak integrovaný podél celého obvodu. Tento výsledný integrovaný tlak nazýváme *elektromotorické napětí* (zkráceně *emn*) v obvodu. Přesněji je *emn* definováno jako tangenciální síla na jednotkový náboj ve vodiči, integrovaná podél vodiče po celém obvodu. Úplný Faradayův objev spočíval v tom, že elektromotorické napětí vzniká ve vodiči třemi způsoby: pohybem vodiče, pohybem magnetu v blízkosti vodiče nebo změnou proudu v sousedním vodiči.

Opět uvažujeme jednoduchý stroj znázorněný na *obr. 16.1*, ale nyní místo otáčení smyčky vlivem tekoucího proudu, nechť smyčkou otáčí vnější síla, např. ruka nebo vodní kolo. Když se cívka otáčí, její vodiče se pohybují v magnetickém poli a v obvodu cívky se objeví elektromotorické napětí. Z motoru je generátor.

V cívce generátoru bylo *emn* indukováno v důsledku jejího pohybu. Velikost *emn* je určena jednoduchým pravidlem objeveným Faradayem. (Nyní to pravidlo pouze zformulujeme a podrobněji se tím budeme zabývat později.) Pravidlo říká: Mění-li se magnetický tok procházející smyčkou (tento tok je normálová složka B integrovaná přes plochu smyčky) s časem, bude *emn* rovno rychlosti změny tohoto toku. Toto pravidlo budeme nazývat „pravidlem toku“. Je vidět, že při rotaci cívky na *obr. 16.1* se tok mění. Na začátku máme tok v určitém směru, ale po otočení cívky o 180° máme stejný tok v opačném směru. Otáčíme-li cívku spojitě, je tok nejdříve kladný, pak záporný a opět kladný atd. Rychlost změny toku se také musí měnit. Proto je v cívce proměnné *emn*. Připojíme-li konce cívky k vnějším vodičům pomocí nějakých kluzných kontaktů, – nazýváme je sběrací kroužky (děláme to proto, aby se nám vodiče nepřekroutily), dostaneme generátor střídavého proudu. Pomocí kluzných kontaktů však můžeme zařízení upravit tak, aby se spoje mezi konci cívky a vnějšími vodiči po každé půlotáčce přepólovaly. Pak budou pulsy *emn* vždy vyvolávat proud vnějším obvodem ve stejném směru. Tak jsme získali generátor stejnosměrného proudu.

Stroj z *obr. 16.1* je tedy buď motor nebo generátor. Záměnnost mezi motory a generátory lze demonstrovat pomocí dvou stejných stejnosměrných „motorů“ s permanentním magnetem, spojíme-li jejich cívky měděnými vodiči. Otáčíme-li mechanicky hřídel jednoho z motorů, stává se generátorem a pohání druhý motor. Otočí-li se hřídel druhého motoru, stane se tento generátorem a pohání první motor. Máme tu zajímavý příklad nového druhu ekvivalence v přírodě: ekvivalentní jsou motor a generátor. Kvantitativní ekvivalence však není zcela náhodná. Souvisí se zákonem zachování energie.

Jiným příkladem zařízení, které může pracovat jako generátor *emn* nebo jako respondent na *emn*, je přijímač standardního telefonu, tedy „sluchátko“. Původní Bellův telefon se skládal se dvou takových „sluchátek“ propojených dvěma dlouhými vodiči. Princip takového zařízení znázorňuje *obr. 16.4*. Permanentní magnet vytváří magnetické pole ve dvou „jádrech“ z měkkého železa a v tenké membráně, která se uvádí do pohybu tlakem zvuku. Pohybem membrány se mění velikost magnetického pole v jádrech. Proto se při dopadu zvukové vlny na membránu mění tok cívky z vodiče ovinutého kolem jednoho jádra. V cívce tak vzniká *emn*. Připojíme-li konce cívky k obvodu, poteče jím proud, který je elektrickým obrazem zvuku.



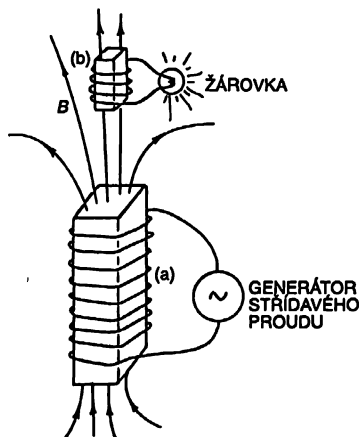
Obr. 16.4 Přijímací nebo vysílací zařízení telefonu

Připojíme-li konce cívky z *obr. 16.4* dvěma vodiči k druhému, totožnému zařízení, potečou proměnné proudy v druhé cívce. Tyto proudy vytvoří proměnné magnetické pole, které způsobí proměnné přitahování železné membrány. Membrána se bude chvět a vytvářet zvukové vlny přibližně shodné s těmi, které uvedly do pohybu původní membránu. S trochou železa a mědi lze lidský hlas přenášet dráty!

(Dnešní domácí telefony používají přijímač podobný tomu, který jsme právě popsali, ale mají vylepšený vysílač, aby bylo možné dosáhnout většího výkonu. Je to uhlíkový mikrofon, který v rytmu zvukového tlaku mění elektrický proud z baterie.)

16.2 TRANSFORMÁTORY A INDUKČNOSTI

Z Faradayových objevů není nejzajímavější existence emn v pohybující se cívce (kterou můžeme pochopit prostřednictvím magnetické síly $q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$), ale skutečnost, že změna proudu v jedné cívce vytváří emn v cívce jiné. Navíc překvapuje to, že velikost emn indukované v druhé cívce je dáno tímto „pravidlem toku“: emn je rovno rychlosti změny magnetického toku cívkou. Předpokládejme, že máme dvě cívky, z nichž každá je navinuta na samostatném svazku železných plechů (tak se získává silnější magnetické pole). Takové cívky znázorňuje *obr. 16.5*. Nyní připojme jednu z cívek (cívku (a)) ke generátoru střídavého proudu. Spojitě změny proudu vytvoří spojitě se měnící magnetické pole. Toto proměnné pole vytváří střídavé emn v druhé cívce (cívka (b)). Takové emn může být dost velké na to, aby např. rozsvítilo elektrickou žárovku.



Obr. 16.5 Dvě cívky navinuté kolem svazku železných plechů umožňují generátoru rozsvítil žárovku bez přímého spojení

V cívce (b) se emn mění s frekvencí, která je samozřejmě stejná jako frekvence původního generátoru. Ale proud v cívce (b) může být větší nebo menší než proud v cívce (a).

Proud v cívce (b) závisí na emn, které je v ní indukováno, a na odporu a indukčnosti zbytku obvodu. emn může být menší než emn generátoru, např. mění-li se málo tok. Emn v cívce (b) však může být mnohem větší než emn v generátoru, navineme-li na cívku mnoho závitů, neboť tehdy je v magnetickém poli tok cívkou větší. (Dáte-li však přednost jinému pohledu, je emn stejné v každém závitu, a protože výsledné emn je součtem emn jednotlivých závitů, vytváří mnoho závitů v sérii velké emn.)

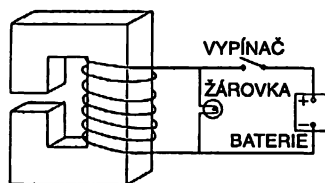
Taková kombinace dvou cívek, obvykle s tvarovanými železnými plechy upravujícími magnetické pole, se nazývá *transformátor*. Může transformovat jedno emn (často nazývané jen napětí) na druhé.

Jev elektromagnetické indukce však existuje i v samotné cívce. Například v zařazení znázorněném na *obr. 16.5* se mění nejen tok cívkou (b), která rozsvěcuje žárovku, ale i cívkou (a). Mění se proud v cívce (a) vytváří měnič pole v samotné cívce a tok tohoto pole se spojitě mění, takže v cívce (a) vzniká *samoindukované* emn. Napětí působí na každý proud, který vede k růstu magnetického pole, resp. obecně mění-li se jeho pole jakkoliv. Tento jev se nazývá *samoindukce*.

Když jsme zformulovali „pravidlo toku“ hovořící o tom, že emn je rovno rychlosti změny toku, neurčili jsme směr emn. Existuje jednoduché pravidlo (nazvané Lenzovo pravidlo) k určení směru emn, které říká, že emn se *snaží bránit* jakýmkoliv změnám toku. Směr indukovaného emn je vždy takový, že kdyby proud tekla ve směru emn, vytvořil by tok B , který by působil proti změně B , jež vytvořila emn. Lenzovo pravidlo lze použít k určení směru emn v generátoru z *obr. 16.1* nebo v transformátorovém vinutí z *obr. 16.3*.

Ve speciálním případě, je-li proud v jedné cívce (nebo v libovolném vodiči), existuje v obvodu „zpětné“ emn. Toto emn působí na náboje tekoucí cívkou (a) z *obr. 16.5* tak, že brání změnám magnetického pole, takže tak, aby bránilo změnám proudu. Snaží se udržet konstantní proud; směřuje proti proudu, když vzrůstá, a je ve směru proudu při jeho poklesu. V případě samoindukce má proud „setrvačnost“, neboť jev indukce se snaží udržet konstantní rychlost předmětu.

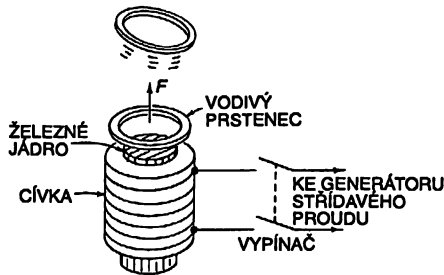
Každý velký elektromagnet bude mít velkou samoindukci. Předpokládejme, že k cívce velkého elektromagnetu (znázorněného na *obr. 16.6*) je připojena baterie a magnet vytvořil silné magnetické pole. (Proud dosáhne ustálené hodnoty, která je určena napětím baterie a odporem vodiče, z něhož je cívka navinuta.) Nyní se pokusíme přerušit obvod tím, že vypneme vypínač. Kdybychom náhle rozpojili obvod, proud by klesal rychle k nule a generoval by tak obrovské emn. Ve většině případů by bylo toto emn dost velké na vytvoření oblouku mezi kontakty vypínače. Vysoké napětí, které při takovém přerušení v obvodu vzniká, by mohlo poškodit izolaci cívky, nebo zranit toho, kdo obvod vypíná. Právě proto se elektromagnety připojují do obvodu tak, jak to znázorňuje *obr. 16.6*. Při vypnutí vypínače se proud náhle změní, ale dál protéká žárovkou, přičemž jej udržuje emn samoindukce cívky.



Obr. 16.6 Zapojení elektromagnetu do obvodu. Žárovka umožňuje průchod proudu při vypnutí vypínače a zabraňuje vzniku velkého emn.

16.3. SÍLY PŮSOBÍCÍ NA INDUKOVANÉ PROUDY

Jistě jste už viděli dramatickou demonstraci Lenzova pravidla pomocí zařízení podle *obr. 16.7*. Je to vlastně elektromagnet, stejný jako cívka (a) z *obr. 16.5*. Na konci magnetu je uložen hliníkový prsteneček. Připojíme-li zapnutím vypínače cívku ke generátoru střídavého proudu, vyletí prsteneček do vzduchu. Síla pochází, samozřejmě, od indukovaných proudů v prstenci. Skutečnost, že prsteneček odletí pryč, poukazuje na to, že proudy tekoucí v prstenci brání změnám pole procházejícího prstencem. Má-li magnet severní pól nahoře, vytváří indukovaný proud v prstenci pole se severním pólem dole. Prsteneček a cívka se odpuzují stejně jako dva magnety, které proti sobě mají stejné póly. Vyřezeme-li v prstenci tenkou radiální štěrbinu, tato síla zmizí, což poukazuje na to, že síla opravdu pochází od proudů v prstenci.



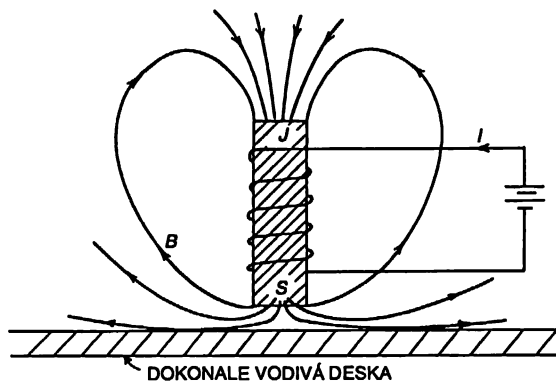
Obr. 16.7 Vodivý prsteneček je elektromagnetem s proměnným proudem silně odpuzován.

Umístíme-li namísto prstence na konec elektromagnetu (na *obr. 16.7*) hliníkový nebo měděný kotouč, opět se objeví odpuzování; indukované proudy cirkulují v materiálu kotouče a opět vyvolávají odpuzování.

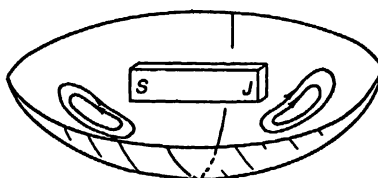
Zajímavý jev podobného původu se vyskytuje v případě desky z dokonalého vodiče. V dokonalém vodiči není proud kladen žádný odpor. Vzniknou-li v něm proudy, potečou nepřetržitě. I to *nejmenší* emn vyvolá libovolně velký proud, což vlastně znamená, že tam nemůže být emn žádné. Jakýkoliv pokus o vytvoření magnetického toku procházejícího takovou deskou vyvolá proudy produkující opačně orientované pole B , a to vše s libovolně malými emn, takže žádný tok do desky nevstoupí.

Kdybychom měli desku z dokonalého vodiče a do její blízkosti bychom umístili elektromagnet, objevily by se při zapnutí proudu do magnetu v této desce proudy (nazývané *vířivé proudy*) a žádný magnetický tok by deskou neprošel. Pole v takovém případě je znázorněno na *obr. 16.8*. Totéž se samozřejmě stane i tehdy, když k dokonalému vodiči přiblížíme tyčový magnet. Protože vířivé proudy vytvářejí opačná pole, jsou magnety od vodiče odpuzovány. Proto je možné, že tyčový magnet zůstane viset ve vzduchu nad deskou dokonalého vodiče vytvarované do podoby talíře (*obr. 16.9*). Magnet je udržován odpudivou silou v důsledku indukovaných vířivých proudů v dokonalém vodiči. Při pokojových teplotách dokonalé vodiče neexistují, ale některé materiály se stávají dokonalými vodiči při dostatečně nízkých teplotách. Např. cín, při teplotách pod 3,8 K dokonale vede elektrický proud. Proto se nazývá *supravodič*.

Není-li vodič na *obr. 16.8* úplně dokonalý, bude vířivým proudům klást určitý odpor. Proudů budou postupně zanikat a magnet pomalu dosedne na dno. Vířivé proudy v nedokonalých vodičích potřebují ke svému udržení emn a k udržení emn je potřebná změna toku. Tok magnetického pole postupně proniká do vodiče.

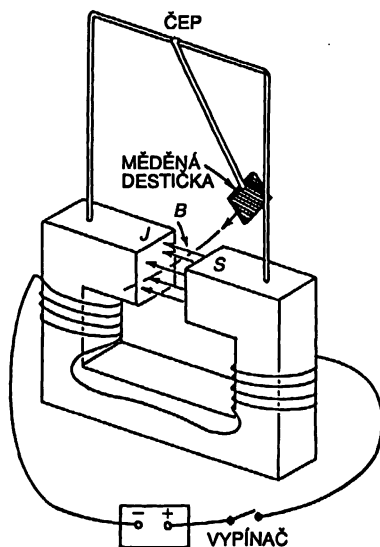


Obr. 16.8 Elektromagnet v blízkosti dokonale vodivé desky



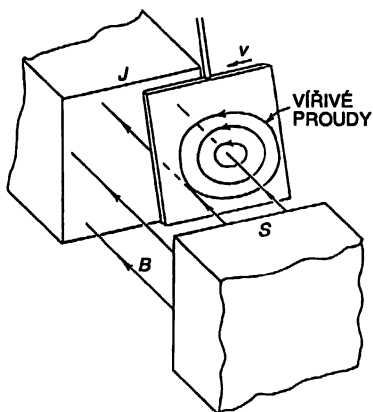
Obr. 16.9 Tyčový magnet visí nad supravodivou mísou v důsledku odpuzování vířivými proudy.

V obyčejném vodiči existují nejen odpuzivé síly vířivých proudů, ale mohou v nich být i boční síly. Např. pohybujeme-li magnetem do stran podél vodivého povrchu, vytvářejí vířivé proudy brzdnou sílu, neboť indukované proudy brání změnám toku. Takové síly jsou úměrné rychlosti a podobají se viskózním silám.

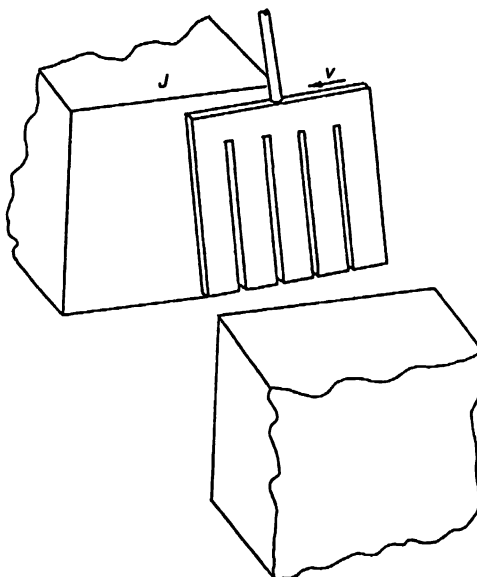


Obr. 16.10 Brzdění kyvadla svědčí o silách pocházejících od vířivých proudů.

Tyto jevy lze demonstrovat na zařízení podle *obr. 16.10*. Čtvercová měděná destička je upevněna na konci tyče, a vytváří tak kyvadlo, které se kývá mezi póly elektromagnetu. Při zapnutí magnetu se pohyb kyvadla náhle zastaví. Když se kovová destička dostane do štěrbiny magnetu, indukuje se v ní proud, který působí proti změně toku destičkou. Kdyby byla destička dokonale vodivá, byly by proudy tak velké, že by ji znovu vytlačily a ona by se vrátila zpět. Měděná destička však určitý odpor má, a proto nejdřív proudy přinutí destičku, aby se úplně zastavila, když začíná vstupovat do magnetického pole. Potom tak jak proudy zanikají, pokračuje destička pomalu v pohybu magnetickým polem, až se nakonec úplně zastaví.



Obr. 16.11 Vířivé proudy v měděném kyvadle



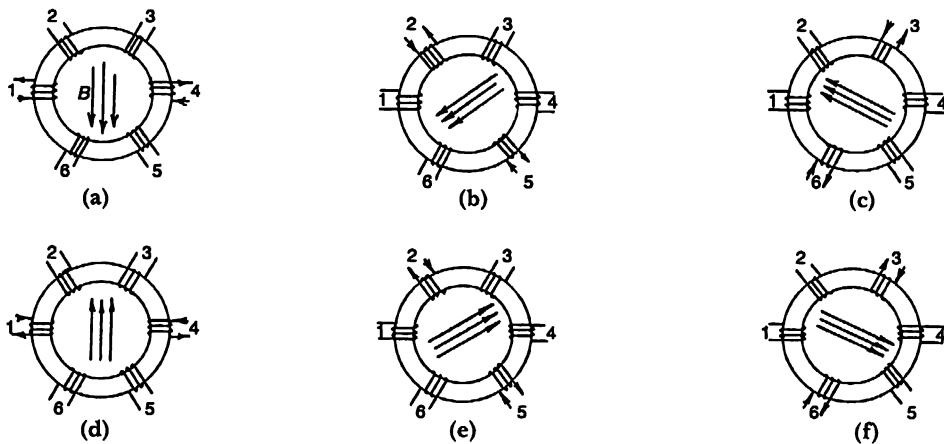
Obr. 16.12 Účinek vířivých proudů se výrazně zmenší, když do měděné destičky vyřezeme štěrbinu.

Charakter vířivých proudů v měděném kyvadle vystihuje *obr. 16.11*, a geometrie proudů silně závisí na tvaru destičky. Např. nahradíme-li měděnou destičku takovou, v níž je vyřezáno několik

štěrbín (obr. 16.12), účinek vířivých proudů se výrazně sníží. Kyvadlo prochází magnetickým polem pouze málo přibrzděno. Příčina spočívá v tom, že proudy v každé části destičky jsou buzeny menšími toky, takže účinky odporu každé smyčky jsou větší. Proudů jsou menší a menší je i brzdní. Viskózní charakter síly je zřejmější, umístíme-li měděnou destičku mezi póly magnetu obr. 16.10, a uvolníme ji. Destička nepadne, ale pomalu se spouští dolů. Vířivé proudy kladou pohybu velký odpor – asi takový, jaký je viskózní odpor medu.

Když místo posunu poblíž magnetu zkusíme vodič otáčet v magnetickém poli, vznikne ze stejných důvodů brzdní moment. Naopak otáčíme-li magnetem, pohybujeme-li jeho póly v blízkosti vodivé desky nebo prstence, bude tento prstenec vlečen za magnetem; proudy v prstenci vytvoří moment, který se snaží otáčet prstenec spolu s magnetem.

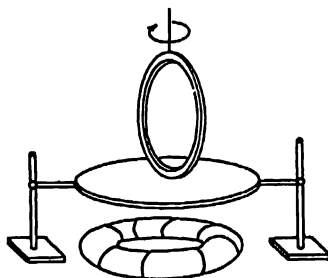
Pole, které je stejné jako pole rotujícího magnetu, lze vytvořit takovým seskupením cívek, jako představuje obr. 16.13. Vezmeme železný toroid (tj. prstenec ze železa v podobě věnečku) a navíjeme na něj šest cívek. Zavedeme-li proud podle obrázku (a) do cívek (1) a (4), dostaneme magnetické pole ve směru, jenž je nakreslen na obrázku. Přepneme-li proud do cívek (2) a (5), bude mít magnetické pole nový směr, který je nakreslen na obr. (b). Budeme-li pokračovat v tomto postupu, dostaneme posloupnost polí zobrazených na ostatních částech obrázku. Děje-li se to spojitě, máme točivé magnetické pole. Požadovanou posloupnost proudů můžeme snadno získat, připojíme-li cívky na třífázovou síť, neboť ta právě dává takovouto posloupnost proudů.



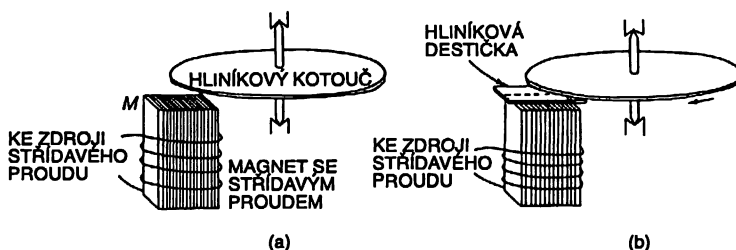
Obr. 16.13 Vytváření točivého magnetického pole

Třífázový proud se vyrábí generátorem využívajícím principu z obr. 16.1, až na to, že v tom případě máme tři smyčky upevněné symetricky na téžce hřídeli, tj. mezi smyčkami je úhel 120° . Když se cívky otáčejí jako jeden celek, je emf v pravidelném sledu největší nejdříve v jedné, pak v další atd. Třífázový proud má mnoho praktických výhod. Jednou z nich je možnost vytvoření točivého magnetického pole. Moment působící na vodič od takového točivého pole se snadno demonstruje na kovovém prstenci stojícím na izolační desce těsně nad toroidem (obr. 16.14). Točivé pole nutí prstenec otáčet se kolem vertikální osy. Základní prvky, které jsou vidět na obrázku, jsou tytéž jako v případě velkých komerčních třífázových indukčních motorů.

Jiný druh indukčního motoru znázorňuje obr. 16.15. Takové zařízení nelze používat jako praktický vysoce účinný motor, ale poslouží k ilustraci principu.



Obr. 16.14 Pomocí točivého pole (obr. 16.13) lze vodivému prstenci udělit moment síly a způsobit jeho otáčení



Obr. 16.15 Jednoduchý příklad indukčního motoru se stíněným polem

Elektromagnet M , který se skládá ze svazky laminovaných železných plechů omotaných solenoidovou cívkou, je napájen generátorem střídavého proudu. Magnet vytváří proměnný tok B hliníkovým kotoučem. Kdybychom měli jen tyto dvě složky, které znázorňuje část (a) obrázku, ještě bychom neměli motor. V kotouči sice jsou vířivé proudy, ale jsou symetrické a nevzniká moment sil. (V kotouči bude probíhat určitý ohřev způsobený indukovanými proudy.) Přikryjeme-li nyní hliníkovou destičkou pouze polovinu pólu magnetu (jak ukazuje část (b) obrázku), začne kotouč rotovat a máme motor. Jeho činnost závisí na *dvou* jevech souvisejících s vířivými proudy. Především vířivé proudy v hliníkové destičce brání změně toku, který jí prochází, takže magnetické pole nad destičkou vždy zaostává za polem nad tou částí pólu, která je odkryta. Tento jev „zastíněného pólu“ vytváří pole, jež se v „zastíněné“ oblasti mění podobně jako v „nezastíněné“ s tím rozdílem, že je opožděno o konstantní dobu. Výsledný efekt je takový, jako kdyby měl magnet jen poloviční šířku a spojitě se posouval z nezastíněné do zastíněné oblasti. Dále proměnná pole interagují s vířivými proudy v kotouči a vytvářejí v něm moment síly.

16.4 ELEKTROTECHNIKA

Když Faraday poprvé uveřejnil svůj pozoruhodný objev o tom, že mění se magnetický tok vytváří emn, položili mu otázku (tak, jak kladou každému, kdo objeví nový přírodní úkaz): „K čemu je to dobré?“ To, co objevil, byla kuriozita spočívající v tom, že při pohybu drátu v blízkosti magnetu vznikl nepatrný proud. Jaký by z toho mohl být užitek? A on tehdy odpověděl: „Jaký je užitek z novorozence?“

Zamyslete se nad tím, jakým úžasným praktickým aplikacím jeho objev vedl. To o čem jsme hovořili, nebyly pouze hračky, ale příklady vybrané většinou k tomu, aby demonstrovaly princip

nějakého praktického stroje. Například prstenec rotující v točivém magnetickém poli je indukční motor. Mezi ním a praktickým indukčním motorem samozřejmě jsou určité rozdíly. Prstenec má velmi malý moment síly a mohli byste jej zastavit rukou. Aby vznikl dobrý motor, musí být vše sestaveno těsněji: nesmíte tam „plýtvat“ magnetickým polem ve vzduchu. Zaprvé, pole se koncentruje použitím železa. Ještě jsme nehovořili o tom, jak se to železu povede, ale železo může deset až stokrát zesílit magnetické pole oproti tomu, jež vytváří samotné měděné cívkky. Za druhé, meze-ry mezi kousky železa se dělají malé; aby se to podařilo, jistá část železa se dává dokonce i do rotujícího prstence. Vše je zařízeno tak, aby byly získány co největší síly a co největší účinnost přeměny elektrického výkonu na mechanický, a takovýto prstenec byste rukou neudrželi.

Problém zmenšování mezer a vůbec takové sestavní věcí, aby se dosáhlo nejpraktičtějšího režimu, je už věcí *inženýrů*. Vyžaduje to vážné studium konstrukčních problémů, ačkoliv k určení sil nejsou potřebné žádné nové principy. Cesta od základních principů k praktickému a ekonomickému projektu je velmi dlouhá. A právě takový pečlivý inženýrský projekt umožnil vybudovat něco tak úžasného, jako je přehrada nazvaná Boulder Dam a všeho co s ní souvisí.

Co to vlastně Boulder Dam je? Velká řeka je zastavena betonovou stěnou. Jenže jakou stěnou! Její tvar, to je dokonalá křivka propočtená tak, aby celou řeku drželo co nejméně betonu. Vespod se rozšiřuje v nádherném tvaru, který nadchne umělce, ale který oceňují i inženýři, protože vědí, že rozšíření souvisí s růstem tlaku při ponoru do hloubky. Ale to jsme se vzdělili od elektřiny.

Pak se vody řeky odvedou do obrovského potrubí. Už to samo o sobě je pozoruhodný inženýrský výkon. Potrubí vede vodu k „vodnímu kolu“, k ohromné turbíně, a tak se kola uvádějí do pohybu. (To je další mistrovský kousek inženýrů.) Na co však je otáčení kol? Jsou spojeny důmyslnou spleť mědi a železa, v níž je všechno zkrouceno a propleteno. Jsou to v podstatě dvě části, jedna, která se otáčí, a druhá, která stojí. Je to všechno složitá směs několika materiálů, většinou železa a mědi, ale je tam i papír a šelak jako izolace. Rotující monstrum. Generátor. Z té spleti mědi a železa se kdesi vynořuje několik měděných vývodů. Přehrada, turbína, měď a železo, to vše je k tomu, aby se na těchto měděných vývodech objevilo něco zvláštního – elektromotorické napětí. Pak se tyto měděné vývody ještě obtočí kolem dalšího železa, a vytvoří tak transformátor, čímž jejich práce končí.

Kolem tohoto železa je ovinut další měděný kabel, který nemá žádné přímé spojení s vývody generátoru; generátorem je ovlivněn proto, že prochází v blízkosti vývodů a získává z nich emn. Transformátor přeměňuje výkon při relativně nízkých napětích potřebných ke konstrukci účinného generátoru na velmi vysoká napětí, která nejlépe vyhovují účinnému přenosu elektrické energie dlouhými kabely.

A vše musí být mimořádně účinné – nesmí dojít k plýtvání, ke ztrátám. Proč? Je přenášena energie pro celou metropoli. Představte si, kolik by to bylo energie, kdyby se ztratila jen malá část – jedno nebo dvě procenta! Kdyby se v transformátoru ztrácelo jen jedno procento výkonu, bylo by třeba tuto energii někam odvést. Kdyby se objevila v podobě tepla, rychle by vše roztavila. Samozřejmě, určité malé ztráty tam budou, ale ty vyžadují jen několik čerpadel, které budou v radiátoru pohánět olej a zabraňovat, aby se transformátor přehřál.

Z přehrady Boulder Dam vychází několik tuctů měděných vodičů, (dlouhých, velmi dlouhých a silných jako vaše pěst), které putují stovky kilometrů ve všech směrech. Tenké měděné pruty nesoucí energii mohutné řeky. Pak se pruty rozvětvují a máme víc prutů... potom máme víc transformátorů... někdy vedou k velkým generátorům převádějícím proud do jiné podoby... někdy k motorům důležitých průmyslových podniků... k dalším transformátorům... pak jsou další a další rozvětvení... až se nakonec řeka rozšíří na celé město – pohání motory, produkuje teplo, dává světlo, vyrábí zařízení. Zázrak ohnivých světel stvořených ze studené vody vzdálené

stovky kilometrů – a vše se stalo díky speciálně sestaveným kouskům mědi a železa. Obrovské motory k válcování oceli nebo jemné motorky pro zubařskou vrtačku. Tisíce malých koleček, která se otáčejí jako odezva pohybu velkého kola na Boulder Dam. Zastavte velké kolo a přestanou se otáčet všechna ostatní; světla zhasnou. Je vidět, že opravdu vše je propojeno.

To však není všechno. Tentýž jev, který bere ohromnou energii řece a rozděluje ji po krajině a několika kapkami z řeky roztáhne zubařovu vrtačku, přichází na pomoc při konstrukci precizních zařízení... k detekci neuvěřitelně malých proudů... k přenosu hlasu, hudby, obrazu... pro počítače... pro automatická zařízení fantastické přesnosti.

To vše je možné proto, že existuje pečlivě navržené seskupení mědi a železa – účinně vytvořená magnetická pole... železné bloky s průměrem 1,8 m rotující v prostoru, který má jen o 1,5 mm větší průměr... pečlivě propočtený poměr mědi, aby bylo dosaženo optimální účinnosti... jsou tu neobvyklé tvary, které slouží svému účelu tak, jak sloužilo zakřivení přehradní di.

Objeví-li jednou v budoucnosti nějaký archeolog Boulder Dam, bude pravděpodobně nadšen krásou jejích křivek. Ale i průzkumníci z nějakých velkých civilizací budoucnosti budou při pohledu na generátory a transformátory říkat: „Všimněte si, že každý kousek železa má úžasný účelný tvar. Uvažte, kolik důmyslu je skryto v každém kousku mědi!“

To vše svědčí o možnostech techniky, o precizních výpočtech našich elektrotechniků. V generátoru bylo vytvořeno něco, co jinde v přírodě neexistuje. Je pravda, že síly elektromagnetické indukce najdete i jinde. Někde u Slunce nebo hvězd určitě působí jevy elektromagnetické indukce. Možná (ačkoliv to není jisté) i zemské magnetické pole je udržováno analogem elektrického generátoru, který pracuje s proudy tekoucími nitrem Země. Ale nikde není takové seskupení pohybujících se částí, které by produkovaly elektrickou energii tak, jako se to děje v generátoru, a to s velkou účinností a pravidelností.

Může se vám zdát, že navrhování elektrických generátorů už není zajímavým předmětem, že je to mrtvá disciplína, neboť vše už bylo uděláno. Téměř dokonalé motory a generátory stačí sebrat ze skladištních polic. I kdyby to byla pravda, mohli bychom obdivovat tu úžasnou zručnost, která vedla k téměř dokonalému vyřešení problému. Jenže stále zůstává mnoho nevyřešených problémů. Dokonce generátory a transformátory se opět stávají problémem. Je pravděpodobné, že celá oblast nízkých teplot a supravodičů se brzy stane základnou pro řešení problému přenosu elektrické energie. Tento radikálně nový faktor bude vyžadovat nové optimální konstrukce. Energetické sítě budoucnosti se možná budou jen málo podobat těm dnešním.

Vidíte, že aplikace a problémy, s nimiž se člověk setká při studiu zákonů elektromagnetické indukce, nemají konce. Studium konstrukce elektrických strojů je samo o sobě celoživotním úkolem. Nemůžeme se dál ubírat tímto směrem, ale musíme si uvědomit skutečnost, že objev zákona elektromagnetické indukce spojil teorii s ohromným množstvím aplikací. Tento předmět musíme ponechat inženýrům a vědcům, kteří se zabývají podrobným rozpracováním jednotlivých aplikací. Fyzika jim dá jen základ, základní principy, které platí všude. (Náš základ však ještě není úplný, neboť jsme se ještě podrobně nezabývali vlastnostmi železa a mědi. Fyzika má o těchto materiálech mnohlo co říci, jak se dovíme později.)

Moderní elektrotechnika začala Faradayovými objevy. Neužitečné batole se vyvinulo v záračnou bytost a změnilo tvář Země tak, jak by si to hrdý otec nikdy nedokázal představit.

17 Zákony

elektromagnetické indukce

17.1 FYZIKA ELEKTROMAGNETICKÉ INDUKCE

17.2 VÝJIMKY Z „PRAVIDLA TOKU“

**17.3 URYCHLOVÁNÍ ČÁSTICE INDUKOVANÝM
ELEKTRICKÝM POLEM. BETATRON**

17.4 PARADOX

17.5 GENERÁTOR STŘÍDAVÉHO PROUDU

17.6 VZÁJEMNÁ INDUKČNOST

17.7 SAMOINDUKČNOST

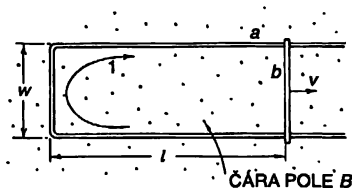
17.8 INDUKČNOST A MAGNETICKÁ ENERGIE

17.1 FYZIKA ELEKTROMAGNETICKÉ INDUKCE

V předcházející části jsme popsali mnoho jevů, které poukazovaly na to, jak složité a zajímavé jsou jevy elektromagnetické indukce. Nyní bychom mohli pohovořit o základních principech, které za těmito jevy stojí. Už jsme definovali emn ve vodivém obvodu jako celkovou sílu působící na náboje, akumulovanou po celé délce obvodu. Přesněji je to tangenciální složka síly na jednotkový náboj, integrovaná podél vodiče po celém obvodu. Tato veličina je proto rovna celkové práci konané na jednotkovém náboji, jenž jednou prochází po obvodu.

Uvedli jsme pravidlo toku, které říká, že emn je rovno rychlosti změny magnetického toku takovýmto vodivým obvodem. Podívejme se na příčiny tohoto jevu. Nejdříve vezmeme v úvahu případ, kdy se tok mění proto, že se část obvodu pohybuje v konstantním poli.

Na obr. 17.1 je znázorněna jednoduchá smyčka z drátu, jejíž rozměry jsou měnitelné. Smyčka má dvě části, pevnou část (a) ve tvaru U a pohyblivou příčnou část (b), která může klouzat podél dvou ramen U. Vždy je tam úplný obvod, ale jeho plocha se mění. Nyní umístíme smyčku do homogenního magnetického pole tak, aby rovina U byla kolmá k poli. Podle pravidla se při pohybu příčky objeví v smyčce emn, které je úměrné rychlosti změny toku smyčkou. Toto emn způsobí ve smyčce proud. Budeme předpokládat, že vodič má dost velký odpor, a proto jsou proudy malé.



Obr. 17.1 Mění-li se v důsledku změny plochy obvodu magnetický tok, indukuje se ve smyčce emn.

Potom můžeme magnetické pole tohoto proudu zanedbat. Ve shodě s označením na obrázku bude tok smyčkou roven wlB , a proto pravidlo toku poskytuje následující vztah pro emn, které budeme označovat symbolem \mathcal{E} :

$$\mathcal{E} = wB \frac{dl}{dt} = wBv$$

(v je rychlost posunu příčky).

Tento výsledek však musí být možné vysvětlit i tehdy, když uvažujeme magnetickou sílu $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ působící na náboje v pohybující se příčce. Tyto náboje pocítí sílu, která je k vodiči tangenciální a která je rovna vB v případě jednotkového náboje. Je konstantní podél příčky v délce w a všude jinde je nulová, takže integrál je roven

$$\mathcal{E} = wvB,$$

což je stejný výsledek, jako jsme dostali z rychlosti změny toku.

Tuto argumentaci lze rozšířit i na každý takový případ, kdy máme konstantní magnetické pole a vodiče se pohybují. Obecně je možné dokázat, že v každém obvodu, jehož části se pohybují v konstantním magnetickém poli, je emn rovno časové derivaci magnetického toku bez ohledu na tvar obvodu.

Co se však stane tehdy, když smyčka stojí a mění se magnetické pole? Odpověď na tuto otázku není možné získat stejným způsobem. Faraday však zjistil (z experimentu), že pravidlo toku platí bez ohledu na to, co je příčinou změny toku. Síla působící na elektrické náboje je zcela obecně dána výrazem $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$; nevyskytují se tam žádné zvláštní „síly pocházející od změn magnetických polí“. Každá síla působící na náboje v nepohyblivém vodiči pochází od členu \mathbf{E} . Faradayova pozorování vedla k poznatku, že elektrická a magnetická pole jsou vázána novým zákonem: v oblasti, kde se s časem mění magnetické pole, vznikají elektrická pole. Právě toto elektrické pole pohání elektrony vodičem, a je tak odpovědné za emn v nehybném obvodu, mění-li se tam magnetický tok.

Obecný zákon pro elektrické pole související s měnícím se magnetickým polem má tvar

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (17.1)$$

a nazývá se Faradayův zákon. Objevil ho Faraday, ale v diferenciální formě jej poprvé uvedl Maxwell jako jednu ze svých rovnic. Všimněme si, jak z tohoto zákona vyplývá pravidlo toku pro obvody.

Použitím Stokesovy věty můžeme tento zákon přepsat do integrální formy

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} dS = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (17.2)$$

kde jako obvykle, je Γ libovolná uzavřená křivka a S libovolná plocha ohraničená touto křivkou. Musíme mít na zřeteli, že Γ je *matematická* křivka fixovaná v prostoru a S je pevná plocha. Pak je možné dát časovou derivaci před integrál, čímž dostaneme

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{tok plochou } S). \quad (17.3)$$

Aplikujeme-li tento vztah na křivku Γ , která prochází podél *pevného* obvodu vodičů, dostaneme opět „pravidlo toku“. Integrál na levé straně představuje emn a na pravé straně je záporně vzatá změna toku procházejícího plochou, jíž ohraničuje křivka. Rovnice (17.1) aplikovaná na pevný obvod je rovnocenná s pravidlem toku.

Pravidlo toku (řekajíc, že emn v obvodu je rovno rychlosti změny magnetického toku obvodem) platí tedy bez ohledu na to, zda se tok mění v důsledku změny pole nebo v důsledku pohybu obvodu (nebo probíhají-li obě změny). Tyto dvě možnosti – pohyb obvodu nebo změny pole – nejsou v tvrzení pravidla rozlišeny. V našem vysvětlení pravidla jsme však použili dva zcela rozdílné zákony pro dva případy: $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ pro pohyb obvodu a $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ pro změny pole.

Ve fyzice neznáme žádný jiný takový jednoduchý a přesný obecný princip, který by ke skutečnému pochopení vyžadoval analýzu *dvou rozdílných jevů*. Obvykle takové krásné zobecnění pochází z jediného hlubokého, základního principu. Ale v tomto případě žádný takový hluboký důsledek nějakého principu nemáme. Toto pravidlo musíme chápat jako kombinaci dvou zcela odlišných jevů.

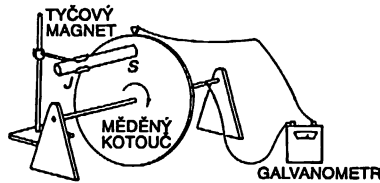
Pravidlo toku musíme chápat následujícím způsobem. Obecně je síla na jednotkový náboj rovna $\mathbf{F}/q = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$. V pohybujiících se vodičích se objevuje síla vyjádřená druhým členem. Kromě toho vzniká pole \mathbf{E} , jestliže se někde se mění magnetické pole. Tyto jevy jsou nezávislé, ale emn podél vodivé smyčky je vždy rovno rychlosti změny magnetického toku smyčkou.

17.2 VÝJIMKY Z „PRAVIDLA TOKU“

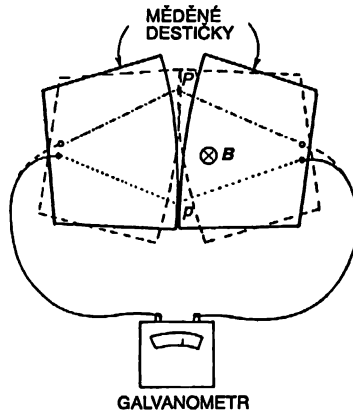
Uveďme několik příkladů pocházejících částečně od Faradaye, z nichž je vidět, jak je důležité rozlišovat tyto dva jevy, odpovědné za indukované emn. Naše příklady zahrnují situace, v nichž pravidlo toku neplatí buď proto, že nemáme žádný vodič, nebo proto, že *dráha* sledovaná indukovanými proudy se v objemu vodiče přemísťuje.

Začneme důležitou poznámkou: Ta část emn, která pochází od pole E , nezávisí na existenci fyzického vodiče (na rozdíl od té části, která pochází od $v \times B$). Pole E může existovat i v prázdném prostoru a jeho křivkový integrál po libovolné křivce, kterou si představíme pevně v prostoru, je roven rychlosti změny toku B touto křivkou. (Všimněte si, že je to úplně jinak než u pole E vytvářeném statickými náboji, když byl křivkový integrál E po uzavřené smyčce vždy nulový.)

Nyní popíšeme případ, kdy se tok obvodem nemění, a přece existuje emn. Na obr. 17.2 je znázorněn vodivý kotouč, který je umístěn v magnetickém poli a může se otáčet kolem pevné osy. Jeden kontakt je přiložen k ose a druhý je opřen o vnější okraj kotouče. Obvod je uzavřen galvanometrem. Když se kotouč otáčí, zůstává „obvod“ – ve smyslu místa v prostoru, kterým tečou proudy – stále stejný. Část obvodu však prochází kotoučem, tedy materiálem, kterým se pohybuje. Ačkoli je tok „obvodem“ konstantní, bude v obvodu emn, o čemž je možné se přesvědčit sledováním výchylky galvanometru. Je jasné, že máme případ, kdy síla $v \times B$ v pohybujícím se kotouči vyvolává emn, které není možné přiřadit změně toku,



Obr. 17.2 Při otáčení kotouče vzniká emn pocházející od $v \times B$, ale tok se přitom nemění.



Obr. 17.3 Při pootočení destiček v homogenním magnetickém poli se tok může silně změnit, ale emn nevzniká.

Opačným příkladem je dost neobvyklá situace, kdy se tok „obvodem“ (opět ve smyslu místa, v němž je proud) mění, ale nemáme tam emn. Představme si dvě kovové destičky s mírně zakřivenými okraji, které znázorňuje obr. 17.3 a které jsou umístěny v homogenním magnetickém poli kolmém k jejich povrchu. Tak, jak je znázorněno na obrázku, je každá z destiček připojena ke galvanometru. Destičky se v jednom bodě P dotýkají, čímž je vytvořen uzavřený obvod. Otočíme-li destičky o malý úhel, posune se jejich styčný bod do bodu P' . Představíme-li si „obvod“ tak, že se uzavírá destičkami tam, kde prochází na obrázku přerušovaná čára, mění se při otáčení destiček velmi výrazně magnetický tok procházející tímto obvodem. Natáčení lze provést velmi

pomalými pohyby, při nichž je $v \times B$ nepatrné a emn prakticky neexistuje. Pravidlo toku však v tomto případě neplatí. Lze jej aplikovat pouze na obvody, v nichž se nemění *materiál* obvodu.

Při změně materiálu obvodu se musíme vrátit k základním zákonům. *Správný* fyzikální obsah je vždy dán dvěma základními zákony

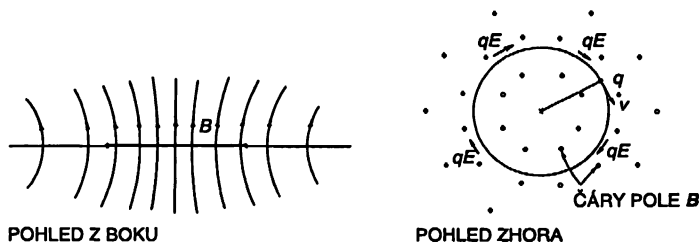
$$F = q(E + v \times B)$$

$$\nabla \times E = - \frac{\partial B}{\partial t}.$$

17.3 URYCHLOVÁNÍ ČÁSTICE INDUKOVANÝM ELEKTRICKÝM POLEM. BETATRON

Už jsme hovořili o tom, že elektromotorické napětí generované měnícím se magnetickým polem může existovat i bez vodičů; můžeme mít elektromagnetickou indukci i bez drátů. Můžeme si představit emn podél libovolné matematické křivky v prostoru. Je definováno jako tangenciální složka E integrovaná po křivce. Faradayův zákon říká, že tento křivkový integrál je roven rychlosti změny magnetického toku uzavřenou křivkou (vztah 17.3).

Jako příklad působení takového indukovaného elektrického pole budeme nyní uvažovat pohyb elektronů v proměnném magnetickém poli. Představme si magnetické pole, jež má všude v rovině vertikální směr (obr. 17.4). Magnetické pole je vytvořeno elektromagnetem, ale takové podrobnosti nás nebudou zajímat. Budeme však předpokládat, že jde o magnetické pole, které je vzhledem k nějaké ose symetrické, tj. že intenzita magnetického pole závisí pouze na vzdálenosti od této osy.



Obr. 17.4 Elektron je urychlován v osově symetrickém časově proměnném magnetickém poli

Magnetické pole se mění i v čase. Dále si představíme elektron, který se pohybuje v tomto poli po kruhové dráze s konstantním poloměrem. Střed dráhy leží na zmíněné ose. (Později uvidíme, jak může být takový pohyb uskutečněn.) V důsledku měnícího se magnetického pole bude existovat elektrické pole E tangenciální k trajektorii elektronu, a to bude způsobovat pohyb elektronu po kružnici. Má-li trajektorie elektronu poloměr r , bude křivkový integrál E podél trajektorie roven hodnotě E násobené obvodem kruhu $2\pi r$. Magnetický tok je obecně dán integrálem. Předpokládáme-li, že B_{stf} je střední magnetické pole uvnitř kruhu, je tok roven součinu tohoto středního magnetického pole a plochy kruhu. Tak dostaneme

$$2\pi r E = \frac{\partial}{\partial t} (B_{stf} \cdot \pi r^2).$$

Protože předpokládáme konstantní r , bude E úměrné časové derivaci středního pole:

$$E = \frac{r}{2} \frac{dB_{\text{stf}}}{dt}. \quad (17.4)$$

Elektron pocítí elektrickou sílu qE a bude urychlován. Uvědomíme-li si, že relativisticky správná pohybová rovnice dává rychlost změny hybnosti úměrnou síle, dostaneme

$$qE = \frac{dp}{dt}. \quad (17.5)$$

Pro kruhovou trajektorii jsme předpokládali, že elektrická síla působící na elektron má vždy směr jeho pohybu, a proto bude celková hybnost růst rychlostí určenou rovnicí (17.5). Zkombinovaním vztahů (17.5) a (17.4) můžeme vyjádřit rychlost změny hybnosti pomocí změny středního magnetického pole:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{qr}{2} \cdot \frac{dB_{\text{stf}}}{dt}. \quad (17.6)$$

Integrujeme-li tento vztah podle t , dostaneme pro hybnost elektronu vyjádření

$$p = p_0 + \frac{qr}{2} \Delta B_{\text{stf}}, \quad (17.7)$$

kde p_0 je počáteční hybnost elektronu a ΔB_{stf} je změna B_{stf} . Na této myšlence je založena činnost *betatronu* – zařízení k urychlování elektronů na velké energie.

Abychom podrobně pochopili, jak betatron pracuje, musíme si vysvětlit, co nutí elektron pohybovat se po kružnici. Tento princip už jsme zmínili v 11. kapitole 1. dílu. Vytvoříme-li na dráze elektronu magnetické pole B vznikne příčná síla $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, která může při vhodné volbě B způsobit, že se elektron bude pohybovat po předpokládané trajektorii. V betatronu způsobuje tato příčná síla pohyb elektronu po kružnici s konstantním poloměrem. Použijeme-li opět relativistickou pohybovou rovnici, nyní pro příčnou složku síly, můžeme určit, jaké magnetické pole musí být na trajektorii. V betatronu (*obr. 17.4*) je pole B kolmé k \mathbf{v} , a proto je příčná síla rovna qvB . Síla je tedy rovna rychlosti změny příčné složky hybnosti $p_{\text{př}}$

$$qvB = \frac{dp_{\text{př}}}{dt}. \quad (17.8)$$

Pohybuje-li se částice po kružnici, je rychlost změny její příčné složky rovna součinu celkové hybnosti a úhlové rychlosti ω (v souladu s argumenty 11. kapitoly 1. dílu),

$$\frac{dp_{\text{př}}}{dt} = \omega p, \quad (17.9)$$

a protože jde o kruhový pohyb, bude platit

$$\omega = \frac{v}{r}. \quad (17.10)$$

Zvolíme-li magnetickou sílu tak, aby odpovídala příčnému zrychlení, dostaneme

$$qvB_r = p \frac{v}{r}, \quad (17.11)$$

kde B_r je pole při poloměru r .

Po dobu činnosti betatronu roste hybnost elektronu úměrně $B_{\text{stř}}$ podle vztahu (17.7) a má-li elektron pokračovat v pohybu po kružnici, musí být vztah (17.11) splněn i při nárůstu hybnosti elektronu. Hodnota $B_{\text{stř}}$ musí vzrůstat úměrně hybnosti p . Porovnáním vztahu (17.11) se vztahem (17.7), který určuje p , zjistíme, že mezi středním magnetickým polem $B_{\text{stř}}$ uvnitř trajektorie s poloměrem r a magnetickým polem B_r na trajektorii platí následující vztah

$$\Delta B_{\text{stř}} = 2 \Delta B_r. \quad (17.12)$$

Správná činnost betatronu vyžaduje, aby střední magnetické pole uvnitř trajektorie rostlo dvakrát rychleji než magnetické pole na samotné trajektorii. Za těchto podmínek při růstu energie částice, vyvolané indukovaným elektrickým polem, bude magnetické pole na trajektorii růst právě tak rychle, aby se částice stále pohybovala po kružnici.

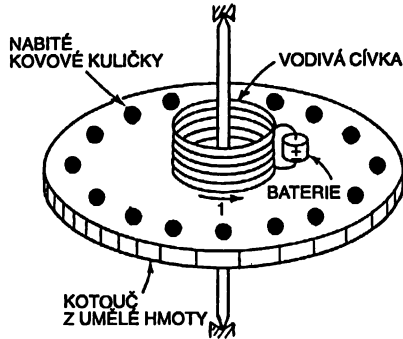
Betatron je používán k urychlování elektronů na energie desítek milionů elektronvoltů nebo dokonce až stovek milionů elektronvoltů. K urychlování elektronů na energie mnohem vyšší než několik stovek milionů elektronvoltů se však už betatron z několika důvodů nehodí. Jeden z důvodů spočívá v praktických těžkostech při dosahování požadovaných silných středních magnetických polí uvnitř trajektorie. Druhý pramení z toho, že rovnice (17.6) už při velkých energiích neplatí, neboť nepočítá se ztrátou energie částice v důsledku jejího vyzařování elektromagnetické energie (tzv. synchrotronové záření, o němž jsme hovořili v 36. kapitole 1. dílu). Z těchto důvodů se urychlování elektronů na nejvyšší energie (na mnoho miliard elektronvoltů) uskutečňuje pomocí jiného zařízení zvaného *synchrotron*.

17.4 PARADOX

Nyní bychom rádi popsali jeden zdánlivý paradox. Paradoxem rozumíme takovou situaci, která připouští jednu odpověď při jednom způsobu analýzy a jinou odpověď při dalším způsobu analýzy, takže jsme na rozpacích, co by se vlastně mělo stát. Ve fyzice, samozřejmě, neexistují skutečné paradoxy, neboť vždy je jen jedna odpověď správná; alespoň věříme, že příroda postupuje jen jedním způsobem (a to je, přirozeně, ten správný způsob). Ve fyzice je tedy paradoxem jen zmatek našeho chápání. A tady je ten náš paradox.

Představme si, že jsme sestrojili zařízení znázorněné na *obr. 17.5*. Je to tenký kruhový plastický kotouč upevněný koncentricky na ose s výbornými ložisky, aby se mohl volně otáčet. Na kotouči je vodivá cívka ve tvaru krátkého solenoidu, koncentrického s osou otáčení. Tímto solenoidem teče ustálený proud I , jehož zdrojem je malá baterie upevněná na kotouči. U okraje kotouče jsou rovnoměrně rozloženy na kružnici malé kovové kuličky, izolované navzájem i od solenoidu plastickým materiálem disku. Každá z těchto malých vodivých kuliček je nabitá stejným elektrostatickým nábojem Q . Vše je ustáleno a disk se nehýbe. Nyní předpokládejme, že díky náhodě – možná i záměrně – se bez jakéhokoliv vnějšího zásahu přeruší proud v solenoidu. Dokud tekl proud, existoval magnetický tok solenoidem a byl víceméně rovnoběžný s osou kotouče. Je-li proud přerušen, magnetický tok klesne k nule. Objeví se indukované elektrické pole podél

kružnic soustředěných s osou. Nabité kuličky na obvodu kotouče pocítí tečnou elektrickou sílu. Tato elektrická síla má stejný smysl pro všechny náboje, a proto vyvolá otáčivý moment působící na kotouč. Pod vlivem těchto argumentů bychom čekali, že zánikem proudu v solenoidu by se měl kotouč začít otáčet. Známe-li moment setrvačnosti disku, proud tekoucí solenoidem a náboje na kuličkách, můžeme vypočítat výslednou úhlovou rychlost.



Obr. 17.5 Bude se kotouč otáčet, když přerušíme proud I ?

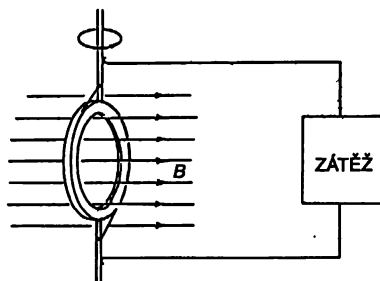
Můžeme však argumentovat i jinak. Použijeme-li princip zachování momentu hybnosti, můžeme prohlásit, že moment hybnosti kotouče se vším zařízením byl na počátku nulový, a proto by měl nulový zůstat. Po přerušení proudu by nemělo dojít k žádnému otáčení. Která argumentace je správná? Bude nebo nebude kotouč rotovat? Na tuto otázku byste měli po úvaze odpovědět vy.

Bude třeba vás upozornit, že správná odpověď nezávisí na nějakém nepodstatném prvku, jakým je například asymetrická poloha baterie. Můžete si vlastně představit ideální situaci, kdy je solenoid sestaven ze supravodivého drátu, a tím protéká proud. Potom, když jsme kotouč opatrně usadili, teplotu solenoidu nepatrně zvýšíme. Když teplota dosáhne hodnoty, při níž supravodivost přechází na normální vodivost, poklesne proud v solenoidu na nulu v důsledku odporu vodiče. Tak jako předtím klesne magnetický tok k nule a kolem osy vznikne elektrické pole. Je nutné říci, že řešení není jednoduché, ale není v něm žádný trik. Najdete-li řešení, objevíte důležitý princip elektromagnetizmu.

17.5 GENERÁTOR STŘÍDAVÉHO PROUDU

Ve zbývající části této kapitoly použijeme principy článku 17.1 k analýze jevů, o nichž jsme diskutovali v kapitole 16. Nejdříve si podrobněji všimneme generátoru střídavého proudu. Základem takového generátoru je vodivá cívka otáčející se v homogenním magnetickém poli. Stejného výsledku dosáhneme i tehdy, když máme nepohyblivou cívku v magnetickém poli, jehož směr se otáčí tak, jak bylo popsáno v předcházející kapitole. Budeme však uvažovat jen první případ. Předpokládejme, že máme kruhovou vodivou cívku, jež se může otáčet kolem osy procházející jedním z jejích průměrů. Tuto cívku umístíme do magnetického pole, které je kolmé k ose otáčení tak, jak znázorňuje obr. 17.6. Dále si představme, že oba konce cívky jsou připojeny k vnějšímu obvodu pomocí nějakých kluzných kontaktů. V důsledku otáčení cívky se bude měnit magnetický tok, který jí prochází. V obvodu cívky se proto projeví emf. Nechť je S plocha cívky a ϑ úhel mezi magnetickým polem a normálou k rovině cívky. Pak je tok cívkou roven

$$BS \cos \vartheta. \quad (17.13)$$



Obr. 17.6 Vodivá cívka otáčející se v homogenním magnetickém poli – základní myšlenka generátoru střídavého proudu.

Otáčeli se cívka konstantní úhlovou rychlostí ω , mění se ϑ s časem podle závislosti $\vartheta = \omega t$. Každý závit cívky bude mít emn rovno rychlosti změny tohoto toku. Má-li cívka N závitů, bude celkové emn N -krát větší, takže

$$\mathcal{E} = -N \frac{d}{dt} (BS \cos \omega t) = NBS \omega \sin \omega t. \quad (17.14)$$

Vyvedeme-li vodiče z generátoru na místo, které je dost daleko od otáčející se cívky, takže magnetické pole tam je nulové, nebo se alespoň s časem nemění, bude rotace E v této oblasti nulová a můžeme definovat potenciál. Neodebíráme-li z generátoru žádný proud, bude potenciálový rozdíl U mezi těmi dvěma vodiči roven emn otáčející se cívky, tj.

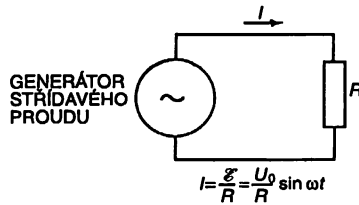
$$U = NBS \omega \sin \omega t = U_0 \sin \omega t.$$

Potenciálový rozdíl mezi vodiči se mění jako $\sin \omega t$. Takto se měnící rozdíl potenciálů se nazývá střídavé napětí.

Protože mezi vodiči je elektrické pole, musí být elektricky nabitě. Je jasné, že emn generátoru vtačuje nadbytečné náboje do vodiče, pokud od nich pocházející pole není dost silné k vyrovnání indukční síly. Podíváme-li se na generátor zvenku, chovají se oba vodiče tak, jako kdyby byly elektrostaticky nabitě na potenciální rozdíl U a jako kdyby se náboj měnil s časem tak, že by dával střídavý potenciálový rozdíl. Oproti elektrostatice je tu ještě jeden rozdíl. Připojíme-li generátor k vnějšímu obvodu, který umožňuje protékání proudu, zjistíme, že emn nedovoluje vybití vodičů, ale pokračuje v dodávání náboje, dokud je odebrán proud. Děje se to takovým způsobem, že emn se vždy snaží udržet stejný potenciálový rozdíl vodičů. Je-li generátor připojen k obvodu, jehož celkový odpor je R , bude proud protékající obvodem přímo úměrný emn generátoru a nepřímo úměrný R . Protože emn má sinusový časový průběh, bude jej mít i proud. Vzniká střídavý proud

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{U_0}{R} \sin \omega t.$$

Schématicky je takový obvod znázorněn na obr. 17.7.



Obr. 17.7 Obvod s generátorem střídavého proudu a odporem

Také je vidět, že emn určuje, kolik energie dodává generátor. Každý náboj ve vodiči dostává za jednotku času energii $F \cdot v$, kde F je síla působící na náboj a v je jeho rychlost. Necht' je počet nábojů pohybujících se v délkové jednotce vodiče roven n ; výkon dodávaný do elementu ds vodiče je pak roven

$$F \cdot v n ds.$$

Ve vodiči směřuje v vždy podél ds , a proto lze výkon vyjádřit ve tvaru

$$nvF \cdot ds.$$

Celkový výkon dodávaný do obvodu je pak integrálem tohoto výrazu podél celé smyčky:

$$\text{výkon} = \oint nvF \cdot ds. \quad (17.15)$$

Připomeňme, že qnv je proud I a že emn je definováno jako integrál F/q po celém obvodu. Tak dostaneme výsledek

$$\text{výkon dodávaný generátorem} = \mathcal{E}I. \quad (17.16)$$

Teče-li cívkou generátoru proud, budou na ni působit i mechanické síly. Už víme, že moment sil působící na cívku je úměrný jejímu magnetickému momentu, magnetické indukci B a sinu úhlu mezi těmito veličinami. Magnetický moment je součin plochy cívky a proudu, který jí protéká. Proto moment sil vyjádříme takto:

$$\tau = NISB \sin \vartheta. \quad (17.17)$$

Rychlost s níž se musí konat mechanická práce, aby se cívka otáčela, je součin úhlové frekvence ω a momentu hybnosti

$$\frac{dW}{dt} = \omega \tau = \omega NISB \sin \vartheta. \quad (17.18)$$

Porovnáváme-li tuto rovnici s rovnicí (17.14) vidíme, že rychlost, s jakou musí být konána mechanická práce, aby se cívka otáčela proti magnetickým silám, je rovna právě $\mathcal{E}I$, tedy rychlosti, s níž je dodávána elektrická energie emn generátoru. Všechna mechanická energie spotřebovaná generátorem se objevuje jako elektrická energie v obvodu.

Jako další příklad proudů a sil podmíněných indukovaným emn si všimněme, co se odehrává v zařízení popsaném v kapitole 12 a znázorněném na obr. 17.1. Máme tam dva rovnoběžné vodiče,

na jednom konci pevně propojené tak jako písmeno U a na druhém konci přeložené kluznou tyčkou. To vše je v homogenním magnetickém poli kolmém k rovině rovnoběžných vodičů. Předpokládejme, že „spodek“ písmene U (na levé straně obrázku) je z materiálu, který má velký odpor, zatímco dva boční vodiče jsou z dobře vodivého materiálu, jako např. měď. Pak se nemusíme znepokojovat změnami odporu v obvodu při pohybu kluzné tyčky. Tak jako předtím pro emn v obvodu platí

$$\mathcal{E} = v B w. \quad (17.19)$$

Proud v obvodu je přímo úměrný tomuto emn a nepřímo úměrný odporu obvodu

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{v B w}{R}. \quad (17.20)$$

V důsledku tohoto proudu bude na kluznou tyčku působit magnetická síla, která je úměrná délce tyčky, magnetickému poli a proudu, který okruhem protéká, takže

$$F = B I w. \quad (17.21)$$

Dosadíme-li za I z rovnice (17.20), dostaneme pro sílu vyjádření

$$F = \frac{B^2 w^2}{R} v. \quad (17.22)$$

Vidíme, že síla je úměrná rychlosti pohybu tyčky. Snadno zjistíme, že směr síly je opačný ke směru rychlosti. Taková síla „úměrná rychlosti“, podobná viskózní síle, se objevuje vždy, když vodiče pohybující se v magnetickém poli vytvářejí vytváří indukované proudy. Vířivé proudy, o nichž jsme hovořili v předcházející kapitole, také vyvolávají síly úměrné rychlosti vodiče, ačkoli v těchto případech bývá rozdělení proudů složité a analýza problémů obtížná.

Při konstrukci mechanických systémů se často s výhodou využívají tlumivé síly úměrné rychlosti. Jeden z nejhodnějších způsobů získání takových sil závislých na rychlosti je využití vířivých proudů. Příklad aplikace takové síly najdete v obyčejném domácím wattmetru. Je v něm tenký hliníkový kotouč, který rotuje mezi póly permanentního magnetu. Tento kotouč je poháněn malým elektromotorem, jehož moment síly je úměrný výkonu spotřebovanému v elektrických obvodech domácnosti. Působením vířivých proudů v kotouči vzniká síla odporu úměrná rychlosti. V rovnováze proto bude rychlost úměrná rychlosti spotřeby elektrické energie. Pomocí počítacího připojeného k rotujícímu kotouči získáváme údaj o počtu otáček, které kotouč uskutečnil. Tento údaj určuje celkovou spotřebovanou energii, tj. počet spotřebovaných watt hodin.

Ze vztahu (17.22) je vidět, že síla indukovaných proudů, tj. síla všech vířivých proudů, je nepřímo úměrná odporu. Síla bude tím větší, čím větší je vodivost materiálu. Příčina spočívá v tom, že při malém odporu vytváří emn větší proud a větší proudy dávají větší mechanické síly.

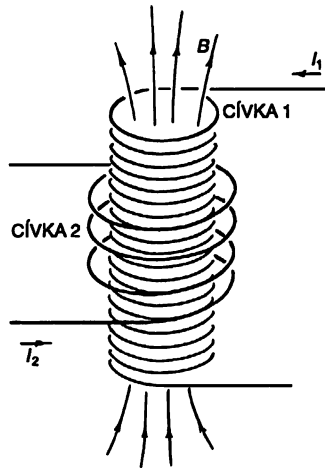
Z našich vztahů lze vyzorovat i to, že elektrická energie dodaná odporu v obvodu je rovna součinu $\mathcal{E}I$. Rychlost, s níž je vykonávána práce při pohybu kluzné tyčky, je rovna součinu rychlosti tyčky a síly, která na ni působí. Vyjádříme-li sílu pomocí vztahu (17.21), dostaneme pro rychlost konání práce výraz

$$\frac{dW}{dt} = \frac{v^2 B^2 w^2}{R}.$$

Tento výraz je opravdu roven součinu $\mathcal{E}I$, který bychom dostali ze vztahů (17.19) a (17.20). Mechanická práce se opět objevuje jako elektrická energie.

17.6 VZÁJEMNÁ INDUKČNOST

Nyní bychom měli uvažovat takovou situaci, kdy jsou vodivé cívky pevné, ale mění se magnetická pole. Když jsme popisovali vytváření magnetických polí proudy, uvažovali jsme pouze případ stacionárních proudů. Pokud se však proudy budou měnit pomalu, bude magnetické pole v každém okamžiku téměř stejné jako magnetické pole ustáleného proudu. V této části budeme předpokládat, že proudy se mění vždy dostatečně pomalu, takže předcházející tvrzení je pravdivé.



Obr. 17.8 Proud tekoucí cívkou 1 vytváří magnetické pole procházející průřezem cívky 2

Na obr. 17.8 je znázorněno seskupení dvou cívek, pomocí něhož lze demonstrovat základní jevy, na nichž je založena činnost transformátoru. Cívka 1 se skládá z vodivého drátu navinutého ve tvaru dlouhého solenoidu. Kolem této cívky – a izolovaně od ní – je navinuta cívka 2, skládající se z několika závitů drátu. Víme, že v cívce 1 se objeví magnetické pole, poteče-li jí proud. Toto magnetické pole prochází i cívkou 2. Mění-li se proud v cívce 1, bude se měnit i magnetický tok a v cívce 2 se objeví indukované emn. Toto indukované emn nyní vypočítáme.

V části 13.5 jsme poznali, že magnetické pole uvnitř dlouhého solenoidu je homogenní a má velikost

$$B = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{N_1 I_1}{l}, \quad (17.23)$$

kde N_1 je počet závitů cívky 1, I_1 je proud tekoucí touto cívkou a l je její délka. Necht' příčný řez cívkou 1 má plochu S . Tok pole B je pak roven součinu jeho velikosti a plochy S . Má-li cívka 2 N_2 závitů, prochází tento tok cívkou N_2 -krát. Proto lze emn v cívce 2 vyjádřit vztahem

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 S \frac{dB}{dt}. \quad (17.24)$$

Jedinou veličinou ve vztahu (17.23), která se s časem mění, je I_1 . Proto pro emn platí

$$\mathcal{E}_2 = - \frac{N_1 N_2 S}{\epsilon_0 c^2 l} \frac{dI_1}{dt}. \quad (17.25)$$

Vidíme, že emn v cívce 2 je úměrné rychlosti změny proudu v cívce 1. Konstanta úměrnosti, která je vlastně geometrickým faktorem těchto cívek, se nazývá *vzájemná indukčnost* a obvykle se označuje M_{21} . Rovnice (17.25) pak získá tvar

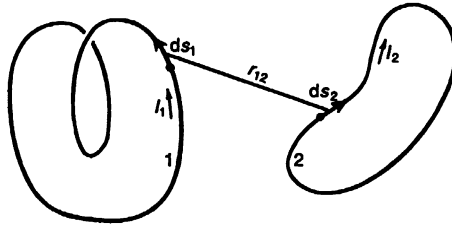
$$\mathcal{E}_2 = M_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (17.26)$$

Nyní předpokládejme, že bychom měli vést proud cívkou 2 a chtěli bychom vědět, jaké je emn v cívce 1. Vypočítali bychom magnetické pole, které je všude úměrné proudu I_2 . Tok cívkou 1 by závisel na geometrii, ale byl by úměrný proudu I_2 . Emn v cívce 1 by proto bylo opět úměrné $\frac{dI_2}{dt}$, takže

$$\mathcal{E}_1 = M_{12} \frac{dI_2}{dt}. \quad (17.27)$$

Výpočet M_{12} by byl těžší než výpočet M_{21} , který jsme uvedli. Nebudeme jej však dělat, neboť ještě v této kapitole ukážeme, že M_{12} musí být rovno M_{21} .

Protože pole *libovolné* cívky je úměrné proudu, který jí protéká, dostali bychom podobný výsledek pro libovolné dvě vodivé cívky. Rovnice (17.26) a (17.27) by měly tentýž tvar, jen konstanty M_{21} a M_{12} by byly jiné. Jejich hodnoty by závisely na tvarech cívek a na jejich vzájemné poloze.



Obr. 17.9 Dvě libovolné cívky mají vzájemnou indukčnost M úměrnou integrálu z $ds_1 \cdot ds_2 / r_{12}$

Předpokládejme, že bychom chtěli najít vzájemnou indukčnost mezi dvěma libovolnými cívkami, např. takovými, jaké znázorňuje obr. 17.9. Víme, že obecný výraz pro emn v cívce 1 lze zapsat ve tvaru

$$\mathcal{E}_1 = - \frac{d}{dt} \int_{(1)} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS,$$

kde \mathbf{B} je magnetické pole a integrál je třeba brát po ploše ohraničené obvodem 1. V článku 14.1 jsme už viděli, že takový plošný integrál z \mathbf{B} lze vyjádřit pomocí křivkového integrálu vektorového potenciálu. Konkrétně

$$\int_{(1)} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_{(1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}_1,$$

kde \mathbf{A} představuje vektorový potenciál a $d\mathbf{s}_1$ je element obvodu 1. Křivkový integrál je brán podél obvodu 1. Emn v cívce 1 lze pak vyjádřit ve tvaru

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d}{dt} \oint_{(1)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}_1. \quad (17.28)$$

Nyní předpokládejme, že vektorový potenciál v obvodu 1 pochází od proudů v obvodu 2. Proto je možné jej vyjádřit jako křivkový integrál podél obvodu 2

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \oint_{(2)} \frac{I_2 d\mathbf{s}_2}{r_{12}}, \quad (17.29)$$

kde I_2 je proud v obvodu 2 a r_{12} je vzdálenost od elementu obvodu $d\mathbf{s}_2$ k tomu bodu v obvodu 1, ve kterém určujeme vektorový potenciál (obr. 17.9). Zkombinujeme-li vztahy (17.28) a (17.29), můžeme emn v obvodu 1 vyjádřit jako dvojitý křivkový integrál

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{d}{dt} \oint_{(1)} \oint_{(2)} \frac{I_2 d\mathbf{s}_2}{r_{12}} \cdot d\mathbf{s}_1.$$

V tomto vztahu se všechny integrály berou podél nehybných obvodů. Jedinou proměnnou veličinou je proud I_2 , který nezávisí na integračních proměnných. Můžeme jej proto dát před integrály. Pro emn pak dostaneme

$$\mathcal{E}_1 = M_{12} \frac{dI_2}{dt},$$

kde M_{12} je koeficient vyjádřený vztahem

$$M_{12} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{d}{dt} \oint_{(1)} \oint_{(2)} \frac{d\mathbf{s}_2 \cdot d\mathbf{s}_1}{r_{12}}. \quad (17.30)$$

Z tohoto vyjádření je zřejmé, že M_{12} závisí pouze na geometrii obvodu. Závisí na jisté střední vzdálenosti těchto obvodů, přičemž s největší vahou se na vystředování účastní paralelní úseky obou cívek. Naši rovnici lze použít k výpočtu vzájemné indukčnosti libovolných dvou obvodů jakéhokoliv tvaru. Také je vidět, že integrál pro M_{12} je shodný s integrálem pro M_{21} . Tak jsme dokázali, že tyto koeficienty jsou shodné. Máme-li soustavu pouze dvou cívek, používáme často místo symbolů M_{12} a M_{21} pouze symbol M a nazýváme jej pouze *vzájemnou indukčností*:

$$M_{12} = M_{21} = M.$$

17.7 SAMOINDUKČNOST

Při zkoumání indukovaných elektromotorických napětí ve dvou cívkách znázorněných na *obr. 17.8*, resp. *17.9* jsme uvažovali jen případ, kdy proud tekl pouze jednou s cívky. Potečou-li proudy oběma cívkami současně, bude magnetický tok procházející každou z cívek součtem dvou toků, jež by existovaly odděleně, neboť pro magnetická pole platí zákon superpozice. Emn v každé cívce proto bude úměrné nejen změně proudu v cívce druhé, ale i změně proudu v ní samé. Pro celkové emn v cívce 2 tedy platí²¹⁾

$$\mathcal{E}_2 = M_{21} \frac{dI_1}{dt} + M_{22} \frac{dI_2}{dt}. \quad (17.31)$$

Podobně bude emn v cívce 1 záviset nejen na měnícím se proudu v cívce 2, ale i na měnícím se proudu v ní samé.

$$\mathcal{E}_1 = M_{12} \frac{dI_2}{dt} + M_{11} \frac{dI_1}{dt}. \quad (17.32)$$

Koeficienty M_{22} a M_{11} jsou vždy záporné. Obvykle je zapisujeme jako

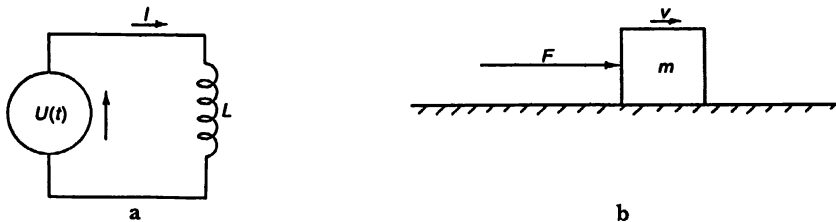
$$M_{11} = -L_1, \quad M_{22} = -L_2, \quad (17.33)$$

kde L_1 a L_2 nazýváme *samoindukčností* cívek.

Emn samoindukce bude, samozřejmě, existovat i tehdy, když máme jen jednu cívku. Libovolná cívka má sama indukčnost L . Emn bude úměrné rychlosti změny proudu v ní. V případě samostatné cívky se obvykle dohodneme na tom, že emn a proud považujeme za kladné, mají-li shodný směr. Pak můžeme pro emn samotné cívky psát

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (17.34)$$

Záporné znaménko svědčí o tom, že emn působí proti změnám proudu a toto emn se často nazývá „zpětné emn“.



Obr. 17.10 a) Obvod se zdrojem napětí a s indukčností, b) Analogický mechanický systém

²¹⁾ Znaménko M_{12} a M_{21} v (17.31) a (17.32) závisí na volném výběru kladného směru proudu v obou cívkách.

Protože v každé cívce existuje samoindukce, která působí proti proudovým změnám, bude proud v cívce vykazovat určitý druh setrvačnosti. Skutečně, chceme-li změnit proud v cívce, musíme překonat tuto setrvačnost připojením cívky k nějakému vnějšímu zdroji napětí, jakým je baterie nebo generátor (to je schématicky znázorněno na obr. 17.10 a). V takovémto obvodu závisí proud I na napětí U podle vztahu

$$U = L \frac{dI}{dt}. \quad (17.35)$$

Tento vztah má tvar Newtonova pohybového zákona pro částici pohybující se v jednom směru. Můžeme ji zkoumat na základě principu, že „stejně rovnice mají stejná řešení“. Přiřadíme-li tedy vnější napětí U působící síle F a proud I v cívce přiřadíme rychlosti v částice, bude potom indukčnost cívky L odpovídat hmotnosti m částice (obr. 17.10 b).²²⁾ Tímto způsobem je sestavena tab. 17.1, která vystihuje souvislost mezi mechanickými a elektrickými veličinami.

Tabulka 17.1

Částice	Cívka
F (síla)	U (napětí, rozdíl potenciálů)
v (rychlost)	I (proud)
x (posunutí)	q (náboj)
$F = m \frac{dv}{dt}$	$U = L \frac{dI}{dt}$
mv (hybnost)	LI
$\frac{1}{2} mv^2$ (kinetická energie)	$\frac{1}{2} LI^2$ (magnetická energie)

17.8 INDUKČNOST A MAGNETICKÁ ENERGIE

V analogii, kterou jsme zavedli v předcházející části, bychom mohli pokračovat dále. Tak bychom přišli k poznatku, že mechanické hybnosti $p = mv$, jejíž rychlost změny je rovna působící síle, by měla odpovídat analogická veličina rovna LI , jejíž rychlost změny je U . Samozřejmě, že nemáme právo říkat, že LI je skutečná hybnost obvodu (ona jí totiž ani není). Celý obvod může být nehybný, a proto ani hybnost nemá. Veličina LI je pouze veličině mv analogická v tom smyslu, že vyhovuje podobným rovnicím. Stejným způsobem odpovídá kinetické energii $\frac{1}{2} mv^2$ analogická veličina $\frac{1}{2} LI^2$. Zde nás však čeká překvapení. Tato veličina $\frac{1}{2} LI^2$ je skutečně energie

²²⁾ Mimoходом, toto *není jediný* způsob, kterým je možné zavést souvislost mezi mechanickými a elektrickými veličinami.

i v elektrickém případě. Je tomu tak, protože rychlost konání práce na indukčnosti je rovna UI a v mechanickém systému je rovna Fv – což je odpovídající veličina. Proto v případě energie jde nejen o matematickou korespondenci veličin, ale mají také tyž fyzikální význam.

Podívejme se na to podrobněji. Ve vztahu (17.16) jsme viděli, že rychlost konání elektrické práce indukovanými silami je rovna součinu elektromotorického napětí a proudu

$$\frac{dW_{\text{ind}}}{dt} = \mathcal{E}I.$$

Nahradíme-li ve shodě se vztahem (17.34) \mathcal{E} výrazem, v němž vystupuje proud, dostaneme

$$\frac{dW_{\text{ind}}}{dt} = -LI \frac{dI}{dt}. \quad (17.36)$$

Zintegrujeme-li tuto rovnici, zjistíme, že energie z vnějšího zdroje, potřebná k překonání emn při samoindukci po dobu nárůstu proudu²³⁾ (jež musí být rovna nahromaděné energii W) je rovna

$$-W_{\text{ind}} = W = \frac{1}{2} LI^2. \quad (17.37)$$

Proto je energie nahromaděná v indukčnosti rovna $\frac{1}{2} LI^2$.

Použijeme-li tyto argumenty na případ dvou cívek, např. takových, jaké znázorňuje obr. 17.8 nebo 17.9, můžeme ukázat, že celková elektrická energie systému je dána vztahem

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + MI_1 I_2. \quad (17.38)$$

Kdybychom vycházeli ze situace, že $I=0$ v obou cívkách, mohli bychom nejprve zapnout proud I_1 v cívce 1 při nezměněném $I_2=0$. Vykonaná práce je pak rovna $\frac{1}{2} L_1 I_1^2$. Zapneme-li potom proud I_2 , nekonnáme pouze práci $\frac{1}{2} L_2 I_2^2$ proti emn obvodu 2, ale i dodatečné množství práce $MI_1 I_2$, které je integrálem emn $[M(dI_2/dt)]$ v obvodu 1 násobeným nyní už konstantním proudem I_1 v tomto obvodu.

Hledejme sílu působící mezi libovolnými dvěma cívkami, jimiž tečou proudy I_1 a I_2 . Dalo by se čekat, že bude možné použít princip virtuální práce a provést variaci energie vyjádřenou vztahem (17.38). Musíme však mít na zřeteli, že při změně vzájemné polohy cívek je vzájemná indukčnost M jedinou proměnnou veličinou. Pak bychom mohli psát rovnici virtuální práce ve tvaru

$$-F\Delta x = \Delta W = I_1 I_2 \Delta M \text{ (nesprávně).}$$

²³⁾

Zanedbáváme všechny tepelné ztráty energie způsobené průchodem proudu odporem cívk. Takové ztráty vyžadují dodatečnou energii od zdroje, ale nemění energii, která je transformována indukčností.

Tato rovnice je nesprávná, neboť zahrnuje (jak už jsme poznali dříve) pouze změny energie dvou cívek, a ne změnu energie zdrojů, které udržují proudy I_1 a I_2 na stálých hodnotách. Už víme, že tyto zdroje musí dodávat energii ke kompenzaci indukovaných emn v cívkách, když se tyto pohybují. Chceme-li správně aplikovat princip virtuální práce, musíme zahrnout i tyto energie. Už jsme však viděli, že postup je možné zkrátit tehdy, když si při použití principu virtuální práce uvědomíme, že celková energie je vlastně mechanická energie W_{mech} s opačným znaménkem. Proto můžeme pro sílu psát

$$-F\Delta x = \Delta W_{\text{mech}} = -\Delta W. \quad (17.39)$$

Pak pro sílu mezi dvěma cívkami platí

$$F\Delta x = I_1 I_2 \Delta M.$$

Rovnici (17.38) pro energii systému dvou cívek využijeme k tomu, abychom odvodili zajímavou nerovnost mezi vzájemnou indukčností M a samoindukčnostmi L_1 a L_2 dvou cívek. Je jasné, že energie dvou cívek musí být kladná. Začneme-li s nulovými proudy v cívkách a tyto proudy pak zvětšíme na nějakou hodnotu, dodáme tím energii našemu systému. V opačném případě by proudy samovolně rostly a odevzdávaly energii okolnímu světu, což je nepravděpodobné. Naši rovnici pro energii (17.38) můžeme vyjádřit v ekvivalentním tvaru

$$W = \frac{1}{2} L_1 \left(I_1 + \frac{M}{L_1} I_2 \right)^2 + \frac{1}{2} \left(L_2 - \frac{M^2}{L_1} \right) I_2^2. \quad (17.40)$$

Je to prostá algebraická transformace. Tato veličina musí být vždy kladná při libovolných hodnotách I_1 a I_2 . Musí být kladná i tehdy, když I_2 nabývá hodnoty

$$I_2 = -\frac{L_1}{M} I_1. \quad (17.41)$$

Pro takový proud I_2 je však první člen v rovnici (17.40) nulový. Má-li být energie kladná, musí být druhý člen v rovnici (17.40) větší než nula. Tak dostaneme podmínku

$$L_1 L_2 > M^2.$$

Dokázali jsme tedy obecné tvrzení, že hodnota vzájemné indukčnosti M dvou libovolných cívek je nevyhnutelně menší, nebo je rovna geometrickému průměru dvou indukčností. (Samotné M může být kladné nebo záporné podle toho, jak byla vybrána znaménka proudů I_1 , I_2):

$$|M| \leq \sqrt{L_1 L_2}. \quad (17.42)$$

Vztah mezi M a samoindukčnostmi je obvykle zapisován ve tvaru

$$M = k \sqrt{L_1 L_2}. \quad (17.43)$$

Konstanta k se nazývá *vazbový koeficient*. Prochází-li většina magnetického toku z jedné cívky druhou cívku, bude se koeficient vazby blížit jedné; řekáme, že cívky jsou těsně vázány. Jsou-li cívky od sebe velmi vzdálené, nebo je-li to zařízení tak, že vzájemný průnik jejich toků je velmi malý, bude se vazbový koeficient blížit nule a vzájemná indukčnost bude velmi malá.

Pro výpočet vzájemné indukčnosti dvou cívek jsme uvedli vztah (17.30), který představuje dvojitý křivkový integrál podél dvou obvodů. Zdálo by se, že takový vztah lze použít i pro výpočet samoindukce jedné cívky, počítáme-li oba integrály kolem téže cívky. To však není možné, neboť při integrování kolem cívek se jmenovatel r_{12} integrandu blíží nule, jsou-li dva křivkové elementy v jednom bodě. Takto získaná samoindukčnost je pak nekonečná. Příčina spočívá v tom, že zmíněný vztah představuje aproximaci platnou jen tehdy, když jsou průřezy vodičů dvou obvodů malé ve srovnání se vzdáleností mezi jednotlivými obvody. Tato aproximace je prostě nevhodná pro samostatnou cívku. Je však pravda, že indukčnost samostatné cívky roste logaritmicky k nekonečnu, volíme-li průměr vodiče stále menší a menší.

Musíme proto hledat způsob výpočtu samoindukce jedné cívky. Bude důležité zahrnout rozložení proudů ve vodičích, neboť rozměr vodiče se stává důležitým parametrem. Neměli bychom se proto ptát na indukčnost „obvodu“, ale na indukčnost *rozložení* vodičů. Snad nejjednodušším způsobem hledání této indukčnosti je využití magnetické energie. Už v článku 15.3 jsme našli výraz pro magnetickou energii rozložení stacionárních proudů:

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \, dV. \quad (17.44)$$

Známe-li rozdělení proudové hustoty \mathbf{j} , můžeme vypočítat vektorový potenciál \mathbf{A} a vypočtením integrálu ze vztahu (17.44) určit energii. Tato energie je rovna magnetické energii samoindukce $\frac{1}{2} LI^2$. Porovnáním pak dostaneme vztah pro indukčnost

$$L = \frac{1}{I^2} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \, dV. \quad (17.45)$$

Samozřejmě očekáváme, že indukčnost je číslo, které závisí jen na geometrii obvodu a ne na proudu I v obvodu. Vztah (17.45) však opravdu dává takový výsledek, neboť integrál v tomto vztahu je úměrný druhé mocnině proudu – proud se tam jednou objevuje prostřednictvím \mathbf{j} a podruhé prostřednictvím vektorového potenciálu \mathbf{A} . Integrál dělený I^2 pak bude záviset na geometrii obvodu, a ne na proudu I .

Vztah (17.44) pro energii rozložených proudů může být převeden do zcela odlišného tvaru, který je pro výpočet někdy výhodnější. Později uvidíme, že tento tvar je důležitý proto, že má obecnější platnost. V energetické rovnici (17.44) souvisí \mathbf{A} i \mathbf{j} s \mathbf{B} , takže lze čekat, že energii je možné vyjádřit pomocí magnetického pole – tak jako jsme dokázali dát do souvislosti elektrostatickou energii a elektrické pole. Začneme tím, že \mathbf{j} nahradíme výrazem $\epsilon_0 c^2 \nabla \times \mathbf{B}$. Veličina \mathbf{A} není jednoduše nahraditelná, neboť vztah $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ nelze obrátit tak, aby vyjadřoval \mathbf{A} pomocí \mathbf{B} . Můžeme však psát

$$W = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} \, dV. \quad (17.46)$$

Je zajímavé to, že při určitých omezeních lze tento integrál přepsat do tvaru

$$W = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dV. \quad (17.47)$$

Abychom se o tom přesvědčili, zapíšeme podrobně jeden typický člen. Předpokládejme, že jsme vzali člen $(\nabla \times \mathbf{B})_z A_z$, který se vyskytuje v integrálu rovnice (17.46). Při zápisu pomocí složek máme

$$\int \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) A_z dx dy dz.$$

(Jsou tam, samozřejmě, dva další integrály stejného typu.) Nyní integrujeme první člen metodou per partes. Tak dostaneme

$$\int \frac{\partial B_y}{\partial x} A_z dx = B_y A_z - \int B_y \frac{\partial A_z}{\partial x} dx.$$

Předpokládejme, že náš systém, tj. zdroje a pole, je konečný, takže na velkých vzdálenostech se všechna pole blíží nule. Integrujeme-li tedy přes celý prostor, dá člen $B_y A_z$ v limitě nulu. Zůstal nám jen člen s $B_y (\partial A_z / \partial x)$, který je zřejmě jednou částí $B_y (\nabla \times \mathbf{A})_z$, a tedy i $\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})$. Kdybychom vypočítali ostatních pět členů, viděli bychom, že rovnice (17.47) je opravdu ekvivalentní rovnici (17.46).

Nyní však můžeme nahradit $(\nabla \times \mathbf{A})$ veličinou \mathbf{B} a dostaneme

$$W = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} dV. \quad (17.48)$$

Energii magnetostatické situace jsme tedy vyjádřili pouze pomocí magnetického pole. Tento výraz odpovídá výrazu, který jsme získali pro elektrostatickou energii

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV. \quad (17.49)$$

Jeden z důvodů, proč klademe důraz na tyto dva energetické vztahy, spočívá v tom, že jsou v některých případech výhodnější než jiné vztahy. Důležité je však to, že v případě dynamických polí (kdy \mathbf{E} a \mathbf{B} se s časem mění) zůstávají výrazy (17.48) a (17.49) v platnosti, zatímco jiné vztahy, které jsme odvodili pro elektrostatickou nebo magnetickou energii, už neplatí – jsou správné pouze pro statická pole.

Známe-li magnetické pole \mathbf{B} jedné cívky, můžeme najít koeficient samoindukčnosti tak, že výraz pro energii (17.48) položíme roven výrazu $\frac{1}{2} LI^2$. Zkoumejme, jaký výsledek dostaneme pro koeficient samoindukčnosti dlouhého solenoidu. Už dříve jsme viděli, že magnetické pole uvnitř solenoidu je konstantní a vně je \mathbf{B} nulové. Velikost pole uvnitř solenoidu je rovna $B = nI / \epsilon_0 c^2$, kde n je počet závitů na jednotku délky vinutí a I je proud. Je-li poloměr cívky r

a délka cívky l (l považujeme za velmi dlouhé, takže můžeme zanedbat efekty na okrajích solenoidu; $l \gg r$), bude vnitřní objem $\pi r^2 l$. Pro magnetickou energii proto platí

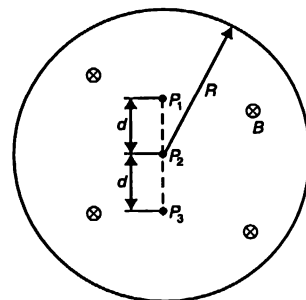
$$W = \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} B^2 \cdot (\text{objem}) = \frac{n^2 I^2}{2 \varepsilon_0 c^2} \pi r^2 l$$

a tento výraz musí být roven $\frac{1}{2} LI^2$. Musí tedy platit

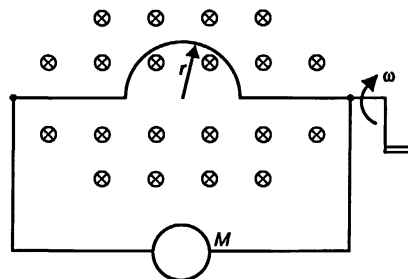
$$L = \frac{\pi r^2 n^2}{\varepsilon_0 c^2} l. \quad (17.50)$$

PŘÍKLADY A CVIČENÍ

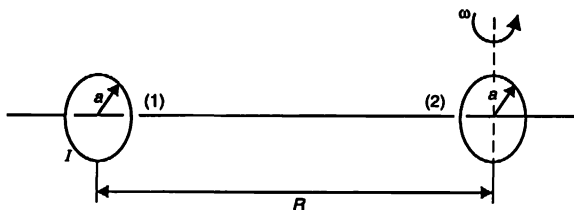
- 17.1 ■ Na obrázku je křížky ukázáno homogenní magnetické pole B uvnitř válce s poloměrem R . Magnetická indukce B se zmenšuje v čase rychlostí $0,01 \text{ T/s}$. Určete směr a velikost okamžitého zrychlení elektronu umístěného v bodech P_1 , P_2 a P_3 . Vzdálenost $a = 5,0 \text{ cm}$.



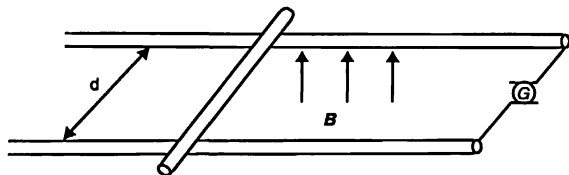
- 17.2 ■ Pevný drát ohnutý do polokružnice s poloměrem r rotuje úhlovou rychlostí ω v homogenním magnetickém poli (viz obrázek). Čemu jsou rovny frekvence a amplituda napětí a proudu indukovaného ve vodiči, je-li vnitřní odpor voltmetru M roven R_M a odpor ostatních částí obvodu lze zanedbat? Předpokládejte, že magnetické pole vyvolané proudem je malé ve srovnání s homogenním polem B , tj. že indukovaný proud je malý a nemůže podstatně ovlivnit velikost vnějšího magnetického pole B .



- 17.3 ■ Kruhovou smyčkou (1) malého poloměru a teče ustálený proud I . Druhá, stejná smyčka (2) je umístěna na ose procházející středem první smyčky ve vzdálenosti $R > a$. Roviny smyček jsou zpočátku rovnoběžné. Pak se smyčka (2) začne otáčet úhlovou rychlostí ω kolem jednoho ze svých průměrů. Jaké se bude ve smyčce (2) indukovat emn?



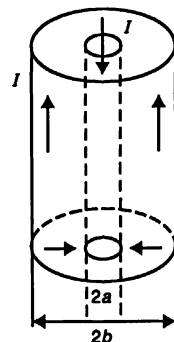
- 17.4 ■ Kovová tyčka o hmotnosti m klouže bez tření po dvou rovnoběžných vodivých kolejnicích rozmístěných ve vzájemné vzdálenosti d podle obrázku. Při pohybu protíná tyčka indukční čáry homogenního magnetického pole B mířící vzhůru.



- Generátor G vyvolává konstantní proud I , který protéká z jedné kolejnice do druhé klouzající tyčkou. Určete směr a velikost rychlosti tyčky jako funkci času za předpokladu, že v okamžiku $t = 0$ byla tyčka v klidu.
- Generátor nahradíme baterií s konstantním emn. Tyčka se přitom pohybuje stálou rychlostí. Najděte rychlost ustáleného pohybu. Dosáhne tyčka takové rychlosti v podmínkách případu a)?
- Čemu je roven proud v případě b), když bylo dosaženo ustáleného pohybu? Předpokládejte, že magnetické pole vyvolané proudem I je mnohem menší než pole B .

17.5 ■ Obvod je složen ze dvou cívek o indukčnostech L_1 a L_2 spojených v sérii. Vzájemná indukčnost cívek je rovna M . Jaká je celková indukčnost obvodu? Jak se změní celková indukčnost, převíne-li vinutí jedné z cívek opačným směrem?

17.6 ■ Koaxiální kabel je tvořen vnitřním vodičem a obklopujícím válcovým vodičem, jimiž protékají proudy opačnými směry. Poloměr vnitřního vodiče je a , vnější poloměr válce je b (viz obrázek).



a) Ukažte, že za předpokladu, že proud teče vnitřním vodičem pouze po jeho povrchu, bude indukčnost na jednotku délky kabelu rovna

$$L_l = \frac{l}{2\pi \epsilon_0 c^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

b) Jaká bude indukčnost na jednotku délky kabelu, bude-li proud rovnoměrně rozložen po celém průřezu vnitřního vodiče? Porovnejte oba výsledky. Závísí výsledek významně na způsobu rozložení proudu po průřezu vnitřního vodiče?

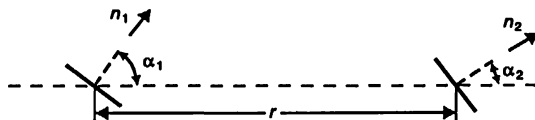
17.7 ■ Toroidální cívka s N závitů má čtvercový průřez o straně a a vnitřní poloměr roven b .

a) Ukažte, že indukčnost cívky je rovna $L = \frac{N^2 a}{2\pi \epsilon_0 c^2} \ln\left(1 + \frac{a}{b}\right)$.

b) Vyjádřete vzájemnou indukčnost soustavy skládající se z popsané toroidální cívky a dlouhého přímého vodiče umístěného v ose symetrie toroidu. Předpokládejte, že vodiče uzavírající obvod jsou natolik vzdáleny od cívky, že jejich vliv je možno zanedbat.

c) Najděte poměr indukčnosti cívky a vzájemné indukčnosti soustavy.

17.8 ■ Dvě rovinné vodivé smyčky o stejné ploše S protékané proudem I jsou umístěny ve vzájemné vzdálenosti r tak, jak je ukázáno na obrázku. Jednotkové vektory n_1 a n_2 ve směru normál k ploše smyček svírají se spojnici středů obou smyček úhly α_1 a α_2 a leží s ní v jedné rovině.

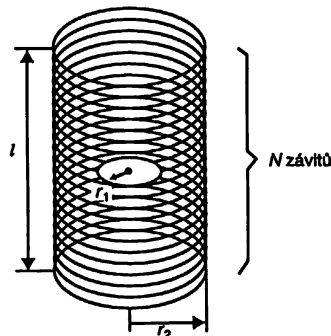


a) Za předpokladu, že poloměr každé smyčky je mnohem menší než r najděte vzájemnou indukčnost M smyček.

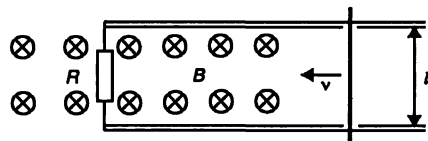
b) Pomocí nalezeného výrazu pro M určete velikost a směr síly působící mezi smyčkami.

c) Jak se změní tato síla, změníme-li směr proudu v jedné nebo v obou smyčkách?

17.9 ■ Kruhová drátěná smyčka poloměru r_1 je umístěna ve středu solenoidu délky l , který je tvořen N závitů poloměru r_2 , přičemž $r_2 > r_1$. Osa smyčky a osa solenoidu splývají (viz obrázek). Označíme-li obvod smyčky indexem 1 a obvod solenoidu indexem 2, určete vzájemné indukčnosti M_{12} a M_{21} .

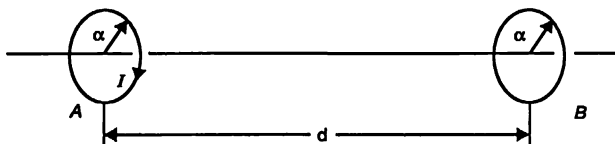


17.10 ■ V homogenním magnetickém poli B kolmém k rovině náčrtku klouže po dvou vodivých kolejnicích přímý drát rychlostí v . Jaký proud protéká odporem R , je-li $v = 100$ cm/s, $l = 10$ cm, $B = 0,1$ T a $R = 10$ Ω (magnetické pole vytvářené proudem zanedbáme)? Jak se změní směr proudu, kdybychom nezanedbávali pole



vytvářené pohybujícím se vodičem? Změní se vaše odpověď, bude-li se magnet vytvářející pole B pohybovat rychlostí v týmž směrem jako vodič? Jak se bude v čase měnit vlastní indukčnost zobrazeného obvodu?

17.11 ■ Uvažujme dva vodivé závity poloměru a nacházející se ve vzájemné vzdálenosti $d > a$. Střed y závitů leží na přímce kolmé k rovině obou závitů (viz obrázek). Závitem A protéká časově proměnný proud $I = Kt^2$



směrem ukázaným na obrázku. Odpor závitu B je roven R .

- Jaký silový moment bude působit na závit B , zanedbáme-li vlastní indukčnost závitů?
- Ukažte, že při zanedbání vlastní indukčnosti bude síla působící na závit B rovna $\frac{24\pi^4 a^8 K^2 t^3}{(4\pi \epsilon_0 c^2) d^7 R}$. Jakým směrem bude tato síla mířit?
- Nebudeme-li zanedbávat vlastní indukčnost závitů, odhadněte kvalitativně, zda se vypočítaná síla a silový moment budou zvětšovat nebo zmenšovat.
- Jak se změní odpověď na otázky a) a b), otočíme-li závit B o 90° kolem osy kolmé ke společné ose závitů.

Maxwellovy rovnice

- 18.1 MAXWELLOVY ROVNICE
- 18.2 CO ZPŮSOBUJE NOVÝ ČLEN
- 18.3 VŠE Z KLASICKÉ FYZIKY
- 18.4 PUTUJÍCÍ POLE
- 18.5 RYCHLOST SVĚTLA
- 18.6 ŘEŠENÍ MAXWELLOVÝCH ROVNIC.
POTENCIÁLY A VLNOVÁ ROVNICE

18.1 MAXWELLOVY ROVNICE

V této kapitole se vrátíme k úplnému systému čtyř Maxwellových rovnic, které pro nás byly výchozím bodem v 1. kapitole. Dosud jsme studovali Maxwellovy rovnice po troškách a osamocně; dozrál čas, abychom přidali poslední kousek a pak to všechno spojili. Tak dostaneme úplný a pravdivý popis elektromagnetických polí, jež se mohou s časem libovolně měnit. Vše, co řekneme v této kapitole a bude v rozporu s něčím, co bylo řečeno dříve, je pravda. Rozpor vzniká proto, že to, co bylo řečeno dříve platilo pro takové speciální případy, jakými jsou např. ustálené proudy nebo nehybné náboje. Ačkoliv jsme při psaní každé rovnice velmi důsledně poukazovali na omezení, tyto podmínky se snadno zapomenou a potom se naučíte nesprávné rovnice. Nyní už jsme připraveni říci celou pravdu bez omezení (nebo téměř bez omezení).

Úplný systém Maxwellových rovnic je zapsán v *tab 18.1*, a to slovy i matematickými symboly. Skutečnost, že slova jsou ekvivalentní s rovnicemi by vám už měla být velmi dobře známa – už by vám neměl dělat problémy překlad z jedné řeči do druhé a naopak.

První rovnice – že divergence E je hustota náboje dělená ϵ_0 – platí obecně. Gaussův zákon platí vždy, v případech dynamických i statických polí. Tok E libovolnou uzavřenou plochou je úměrný náboji, který je uvnitř. Třetí rovnice je odpovídající obecný zákon pro magnetická pole.

Protože neexistují magnetické náboje, bude tok B libovolnou uzavřenou plochou vždy nulový. Druhá rovnice, podle níž je rotace E rovna $-\partial B/\partial t$, je Faradayův zákon a diskutovali jsme o ní v posledních dvou kapitolách. I tato rovnice má obecnou platnost. Poslední rovnice je něčím novým. Předtím jsme z ní poznali jen tu část, která platila pro stacionární proudy, a tvrdili jsme, že rotace B je rovna $j/\varepsilon_0 c^2$, ale správná obecná rovnice má i novou část, kterou objevil Maxwell.

Tabulka 18.1 Klasická fyzika

MAXWELLOVY ROVNICE

$$\text{I. } \nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{tok } E \text{ uzavřenou plochou}) = (\text{náboj uvnitř plochy})/\varepsilon_0$$

$$\text{II. } \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (\text{křivkový integrál } E \text{ podle smyčky}) = \frac{d}{dt} (\text{tok } B \text{ smyčkou})$$

$$\text{III. } \nabla \cdot B = 0 \quad (\text{tok } B \text{ uzavřenou plochou}) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{IV. } c^2 \nabla \times B &= \frac{j}{\varepsilon_0} + \frac{\partial E}{\partial t} \quad c^2 (\text{integrál } B \text{ smyčkou}) = \\ &= (\text{proud smyčkou})/\varepsilon_0 + \frac{d}{dt} (\text{tok } E \text{ smyčkou}) \end{aligned}$$

ZACHOVÁNÍ NÁBOJE

$$\left[\nabla \cdot j = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{tok náboje uzavřenou plochou}) = -\frac{d}{dt} (\text{náboj uvnitř}) \right]$$

ZÁKON SÍLY

$$F = q(E + v \times B)$$

POHYBOVÝ ZÁKON

$$\frac{d}{dt} (p) = F, \text{ přičemž } p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (\text{Newtonův zákon s Eisteinovou modifikací})$$

GRAVITACE

$$F = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} e_r$$

Zákony elektřiny a magnetizmu, známé před Maxwellovým objevem, byly předmětem našeho studia v kapitolách 3 až 17.

Rovnice pro magnetické pole stacionárních proudů byla známa pouze v podobě

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c^2}. \quad (18.1)$$

Maxwell začal s úvahami o těch zákonech, které – podobně, jak jsme to udělali i my – vyjádřil jako diferenciální rovnice. (Ačkoliv v té době ještě nebyl znám zápis pomocí ∇ , je zejména Maxwellovou zásluhou, že byl pochopen význam kombinací derivací, dnes známých jako rotace a divergence.) Tehdy si všimnul, že s rovnicí (18.1) není něco v pořádku. Vezmeme-li divergenci této rovnice, bude levá strana nulová, neboť divergence rotace je vždy nula. Tato rovnice tedy vyžaduje, aby nulová byla i divergence \mathbf{j} . Je-li však divergence \mathbf{j} nulová, je nulový i tok náboje libovolnou uzavřenou plochou.

Tok náboje uzavřenou plochou je roven úbytku náboje uvnitř plochy. Ten však obecně nemůže být nulový, neboť víme, že náboje se mohou přemísťovat z místa na místo. Rovnice

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (18.2)$$

byla téměř našf definicí \mathbf{j} a vyjadřuje základní zákon, že elektrický náboj se zachovává – jakýkoliv tok náboje musí pocházet z nějakého zdroje. Maxwell pochopil význam tohoto problému a ukázal, že ho lze odstranit přidáním členu $\partial \mathbf{E} / \partial t$ na pravou stranu rovnice (18.1). Tak dostal čtvrtou rovnici v *tab. 18.1*:

$$\text{IV.} \quad c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

V Maxwellově době nebylo běžné uvažovat v pojmech abstraktních polí. Maxwell používal v diskuzích o svých myšlenkách model, v němž bylo vakuum chápáno jako pružná pevná látka. I význam své nové rovnice se snažil vysvětlit na mechanickém modelu. Jeho teorie nebyla přijata s velkou ochotou, především pro použitý model, ale i proto, že nebyla zpočátku experimentálně ověřena. Dnes už chápeme, že cenné jsou samotné rovnice, a ne model, který byl použit k jejich získání. Nám už nezbyvá nic jiného, než se ptát, zda tyto rovnice jsou správné nebo nesprávné. Odpověď na tuto otázku je nesčetné množství experimentů, které potvrdily správnost Maxwellových rovnic. Odstraníme-li lešení použité na stavbě, zjistíme, že Maxwellova nádherná budova stojí na dobrých základech. Dal dohromady všechny zákony elektřiny a magnetizmu a vytvořil ucelenou a krásnou teorii.

Nyní ukážeme, že dodatečný člen je právě to, co je nutné k odstranění problému objeveného Maxwellem. Vezmeme-li divergenci jeho rovnice IV v *tab. 18.1*, musíme dostat, že divergence pravé strany je rovna nule:

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad (18.3)$$

V druhém členu lze pořadí derivací podle času a souřadnic zaměnit a rovnice získá tvar

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (18.4)$$

První z Maxwellových rovnic však říká, že divergence E je rovna ρ/ϵ_0 . Dosadíme-li tuto rovnost do (18.4), dostaneme se zpět k rovnici (18.2), o níž už víme, že je správná. Naopak přijmeme-li Maxwellovy rovnice, což odůvodníme tím, že zatím nebyl uskutečněn experiment, který by jim odporoval, vychází nám, že náboj je vždy zachován.

Fyzikální zákony nemají odpověď na otázku: „Co se stane, vznikne-li v určitém bodě najednou náboj – jaké elektromagnetické děje proběhnou?“ Na tuto otázku nemůžeme dát odpověď proto, že naše rovnice říkají, že něco takového se nestane. Kdyby se něco takového mělo stát, potřebovali bychom nové zákony, jenže nevíme, jaké zákony by to měly být. Neměli jsme totiž možnost pozorovat, jak se svět chová bez zákona zachování náboje. Podle našich rovnic, umístíte-li najednou do nějakého bodu náboj, museli jste jej odněkud přinést. V takovém případě už však umíme říct, co by se mělo stát.

Když jsme do rovnice pro rotaci E přidali nový člen, zjistili jsme, že tím je popsána celá nová třída jevů. Uvidíme, že i Maxwellův malý dodatek k rovnici pro $\nabla \times B$ má dalekosáhlé důsledky. V této kapitole se však zmíníme jen o některých z nich.

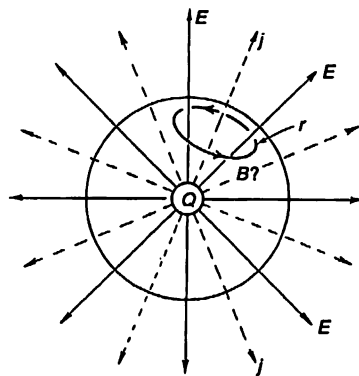
18.2 CO ZPŮSOBUJE NOVÝ ČLEN

Jako první příklad uvažujme, co se stane s kulově symetrickým radiálním rozdělením proudu. Představme si malou kouli pokrytou radioaktivní látkou. Ta vyzařuje nějaké nabitě částice. (Nebo si můžeme představit velký blok železa s malým otvorem uprostřed, do něžž byl stříkačkou vstříknut nějaký náboj a z něhož náboj pomalu vytéká.) V obou případech budeme mít proud, který je všude radiální a směřuje ven. Budeme předpokládat, že má v každém směru stejnou velikost.

Nechť je celkový náboj uvnitř koule s poloměrem r roven $Q(r)$. Je-li radiální proudová hustota v téže vzdálenosti od středu rovna $j(r)$, požaduje rovnice (18.2), aby Q klesalo rychlostí

$$\frac{\partial Q(r)}{\partial t} = -4\pi r^2 j(r). \quad (18.5)$$

Zajímá nás, jaké je v takovémto případě magnetické pole, vytvořené proudy. Představme si, že na kouli s poloměrem r je smyčka Γ (obr. 18.1). Touto smyčkou teče nějaký proud, a proto můžeme očekávat, že v uvedeném směru bude cirkulovat magnetické pole.



Obr. 18.1 Jaké magnetické pole má kulově symetrický proud?

Dostáváme se však do problémů. Jak může mít B nějaký určitý směr na kouli? Jiná volba Γ by nás přivedla k závěru, že má právě opačný směr. *Může tam tedy vůbec nějaká cirkulace B kolem proudů být?*

Zachrání nás Maxwellovy rovnice. Cirkulace B nezávisí jen na celkovém *proudu* tekoucím Γ , ale i na tom, jak rychle se s časem mění *elektrický tok* plochou smyčky Γ . Musí to být tak, že se tyto dva příspěvky vzájemně zruší. Podívejme se, zda tomu tak opravdu je.

Předpokládáme-li, že náboj je symetricky rozložen, bude elektrické pole ve vzdálenosti r rovno $Q(r)/4\pi\epsilon_0 r^2$. Je radiální a pro rychlost jeho změny platí

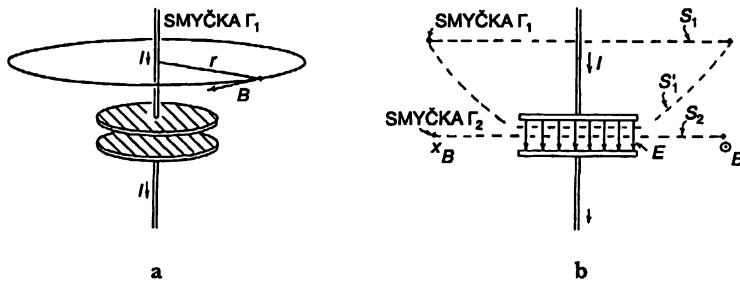
$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\partial Q}{\partial t}. \quad (18.6)$$

Porovnáme-li tento vztah se vztahem (18.5), zjistíme, že pro libovolný poloměr platí

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{j}{\epsilon_0}. \quad (18.7)$$

V rovnici IV se tyto dva zdrojové členy zruší a rotace B je vždy nulová. V našem příkladu tedy magnetické pole není.

Jako druhý příklad budeme uvažovat magnetické pole vodiče používaného k nabíjení deskového kondenzátoru (obr. 18.2).



Obr. 18.2 Magnetické pole v blízkosti nabíjecího se kondenzátoru

Mění-li se náboj Q na deskách s časem (ale ne příliš rychle), je proud ve vodiči roven dQ/dt . Mohli bychom čekat, že tento proud vytvoří magnetické pole, jehož siločáry obtočí vodič. Je jisté, že proud v této části vodiče, která je vzdálená od desek, vytvoří normální magnetické pole – nemůže záviset na tom, kam proud teče.

Předpokládejme, že máme smyčku Γ_1 , jíž je kružnice s poloměrem r znázorněná na obr. 18.2 a. Křivkový integrál magnetického pole by měl být roven proudu I dělenému $\epsilon_0 c^2$. Tak máme

$$2\pi rB = \frac{I}{\epsilon_0 c^2}. \quad (18.8)$$

Právě to bychom měli dostat v případě ustáleného proudu, ale souhlasí to i s Maxwellovým dodatkem, protože uvažujeme-li rovinnou plochu S vnitř kruhu, nebudou na ní elektrická pole (za předpokladu, že drát je velmi dobrým vodičem). Plošný integrál $\partial E/\partial t$ je nulový.

Předpokládejme však, že nyní křivku Γ posouváme pomalu dolů. Budeme mít vždy stejný výsledek, pokud se nedostaneme mezi desky kondenzátoru. Pak už bude proud I nulový. Zmizí tam magnetické pole? To by bylo dost podivné. Všimněme si, co říkají Maxwellovy rovnice o křivce Γ_2 , která je kružnicí s poloměrem r a jejíž rovina prochází mezi deskami kondenzátoru (obr. 18.2 b). Křivkový integrál B podél Γ_2 je roven $2\pi rB$. To musí být rovno časové derivaci toku E rovinou kružnice S_2 . Z Gaussova zákona už víme, že tento tok E musí být roven součinu $1/\epsilon_0$ a náboje Q na jedné z desek kondenzátoru. Máme tedy

$$c^2 2\pi rB = \frac{d}{dt} \left(\frac{Q}{\epsilon_0} \right). \quad (18.9)$$

To se nám velmi hodí. Je to tentýž výsledek, jaký představuje rovnice (18.8). Integrací přes proměnné elektrické pole dostaneme stejné magnetické pole, jako když integrujeme přes proud ve vodiči. To je, samozřejmě, právě to, co říkají Maxwellovy rovnice. Snadno zjistíme, že to tak musí být vždy. Stačí použít naše argumenty na dvě plochy S_1 a S'_1 , které jsou ohraničeny toutéž kružnicí Γ_1 (obr. 18.2 b). Plochou S_1 teče proud I , ale není tam tok elektrického pole. S'_1 neteče proud, ale elektrický tok se mění s rychlostí I/ϵ_0 . Totéž B dostaneme, použijeme-li rovnici IV s kteroukoliv z obou ploch.

Z naší dosavadní diskuze o novém Maxwellově členu můžete získat dojem, že toho mnoho nepřidává – že pouze upravuje rovnice, aby dosáhl souhlasu s tím, co už čekáme. Je pravda, že uvažujeme-li samotnou rovnici IV, skutečně nic nového nedostáváme. Slova „sama o sobě“ jsou však velmi důležitá. Maxwellova malá změna v rovnici IV po *zkombinování s ostatními rovnicemi* skutečně přináší něco nového a důležitého. Dřív než o tom ale budeme hovořit, probereme více *tab. 18.1*.

18.3 VŠE Z KLASICKÉ FYZIKY

V *tab. 18.1* máme vše, co bylo známo ze základní *klasické fyziky*, tj. fyziky, kterou lidstvo znalo roku 1905. Máme to tu vše v jedné tabulce. Pomocí těchto rovnic můžeme pochopit celou oblast klasické fyziky.

Nejdříve máme Maxwellovy rovnice zapsané v rozšířené i zkrácené matematické formě. Pak je tam zákon zachování náboje, který je dokonce uveden v závorkách, neboť máme-li úplný systém Maxwellových rovnic, můžeme z nich zákon zachování náboje odvodit. Tabulka je tedy trochu nadbytečná. Dále je tam zapsán zákon síly, neboť máme-li všechna elektrická a magnetická pole, neřekne nám to nic, pokud nevíme, jak na náboje působí. Známe-li E a B , můžeme najít sílu, která působí na objekt s nábojem q , pohybující se rychlostí v . Znalost síly nám však ještě nepoví nic, pokud nebudeme vědět, co se stane, když začne síla na něco působit; potřebujeme pohybový zákon, který říká, že síla je rovna rychlosti změny hybnosti. (Vzpomínáte si? Ten zákon jsme už měli v 1. díle.) V tabulce jsou zahrnuty i relativistické efekty tím, že hybnost píšeme ve tvaru $p = m_0 v / \sqrt{1 - v^2/c^2}$.

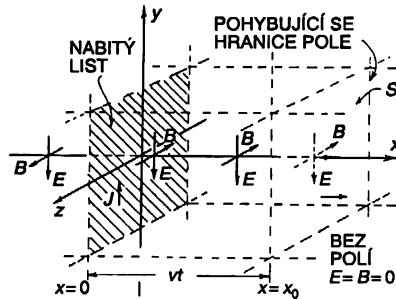
Chceme-li však opravdu dosáhnout úplnosti, musíme přidat ještě jeden zákon, Newtonův gravitační zákon, který jsme uvedli na konci tabulky.

Tak máme v jedné malé tabulce všechny základní zákony klasické fyziky – máme tam ještě místo na jejich slovní vyjádření a máme tam i cosi navíc. To je velká událost. Dostali jsme se velmi vysoko. Obrazně řečeno, jsme na štítu K2 a jsme už téměř připraveni zdolat Mont Everest, jfmž je kvantová mechanika. Vyšplhali jsme na štít „Velkého Předělu“ a nyní můžeme sestoupit na druhou stranu.

Zejména jsme se snažili naučit, jak je třeba chápat tyto rovnice. Nyní, když už máme všechno pohromadě, budeme zkoumat, co tyto rovnice znamenají, co nového říkají o tom, co ještě neznáme. Museli jsme vynaložit velké úsilí, abychom se dostali až sem. Stálo nás to mnoho námahy, ale teď už nás čeká příjemný sestup – nyní už budeme vidět důsledky našeho úsilí.

18.4 PUTUJÍCÍ POLE

Nejdříve k novým důsledkům. Dospějeme k nim, dáme-li dohromady všechny Maxwellovy rovnice. Nejdříve zjistíme, co by se mělo stát ve speciálně vybraných velmi jednoduchých podmínkách. Budeme-li předpokládat, že se všechny veličiny mění pouze v jedné souřadnici, dostaneme jednorozměrný problém. Situaci znázorňuje *obr. 18.3*. Máme nabitý list lokalizovaný v rovině yz . Nejdříve je list v klidu a pak náhle získá rychlost u ve směru osy y a pohybuje se dál stále stejnou rychlostí. Asi vás také trápí „nekonečné“ zrychlení, ale na tom ani nezáleží; stačí když si představíme, že rychlost u byla dosažena velmi rychle.



Obr. 18.3 Nekonečný nabitý list je náhle uveden do pohybu rovnoběžného s vlastní rovinou. Z listu se konstantní rychlostí šíří magnetické a elektrické pole

Tak se nám najednou objevil plošný proud J (J je proud na jednotku šířky ve směru osy z). Aby náš problém zůstal jednoduchý, budeme předpokládat, že na rovinu yz je superponován i stacionární list plošného náboje opačného znaménka, takže nemáme elektrostatické efekty. Ačkoli obrázek znázorňuje pouze to, co se děje v konečné oblasti, umíme si představit, jak list prochází do nekonečna $\pm y$ a $\pm z$. Jinak řečeno: máme situaci, v níž nejprve necteče žádný proud, a pak najednou máme celý list konstantního proudu. Co se stane?

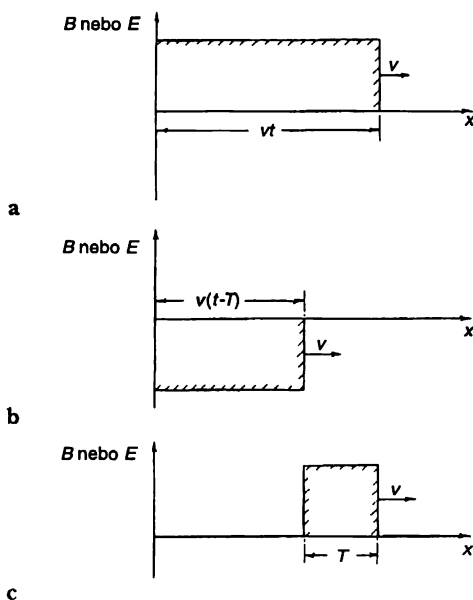
Tam, kde je list s proudem v kladném směru osy y , bude, jak už víme, generováno magnetické pole, které bude v záporném směru osy z pro $x > 0$ a v opačném směru pro $x < 0$. Velikost B můžeme najít, využijeme-li skutečnosti, že křivkový integrál magnetického pole bude roven proudu dělenému $\epsilon_0 c^2$. Tak bychom dostali, že $B = J/2 \epsilon_0 c^2$ (neboť proud I v pásu šířky w je roven Jw a křivkový integrál B je $2Bw$).

Tak dostáváme pole v blízkosti listu, pro malé hodnoty x , jenže my předpokládáme nekonečný list, a proto bychom mohli čekat, že jej stejně získáme i ve velkých vzdálenostech při velkých hodnotách x . To by však znamenalo, že v okamžiku, kdy zapneme proud, se magnetické pole všude změní z nuly na konečnou hodnotu. Ale pozor! Změní-li se náhle magnetické pole, způsobí ohromné elektrické efekty. (Mění-li se *jakkoliv*, máme elektrické efekty.) Pohybem nabitého listu jsme tedy vytvořili proměnné magnetické pole, a proto musí vzniknout i elektrická pole. Vznikají-li

elektrická pole, musí začít od nuly a změnit se na nějakou jinou hodnotu. Tak se objeví $\partial E/\partial t$, které bude spolu s proudem J přispívat k tvorbě magnetického pole. Protože rovnice jsou navzájem propojeny, musíme se pokusit je vyřešit najednou pro všechna pole.

Při pohledu na samotné Maxwellovy rovnice není snadné přímo říci, jak je třeba hledat řešení. Nejdříve vám proto prozradíme řešení a na něm pak ukážeme, že opravdu vyhovuje rovnicím. Řešení se zakládá na tom, že pole B , které jsme vypočítali, je vlastně generováno těsně u listu s proudem (pro malé x). Musí to tak být, protože vytvoříme-li uzounkou smyčku kolem listu, nebude mít elektrický tok kudy projít. Pro větší hodnoty x je však pole B zpočátku nulové. Po nějakou dobu zůstává nulové a pak náhle roste. Stručně řečeno, jakmile zapneme proud, dosáhne magnetické pole v jeho těsné blízkosti určité hodnoty a pak se začne šířit z místa zdroje. Po určité době je všude až do určité vzdálenosti x konstantní magnetické pole a ve větších vzdálenostech je pole stále nulové. V důsledku symetrie se pole šíří v kladném i záporném směru osy x .

Pole E se chová stejně. Před časem $t=0$ (což je doba zapnutí proudu) bylo pole všude nulové. Pak jsou po čase t pole E i B konstantní až od vzdálenosti $x = vt$ a nulová za touto vzdáleností. Pole se pohybují vpřed jako přílivové vlny a konstantní rychlostí (ukáže se, že je to právě rychlost c , ale zatím ji označujeme pouze v). Graf závislosti velikostí E , resp. B na x , tak jak se jeví v čase t , znázorňuje obr. 18.4 a.

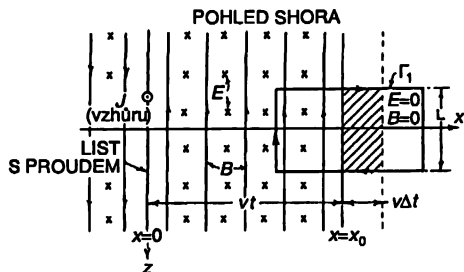


Obr. 18.4 a) Velikost B (nebo E) jako funkce x v čase t po uvedení listu do pohybu. b) Pole nabitého listu, který se začal pohybovat v čase $t = T$ směrem k záporným hodnotám y . c) Součet a) a b).

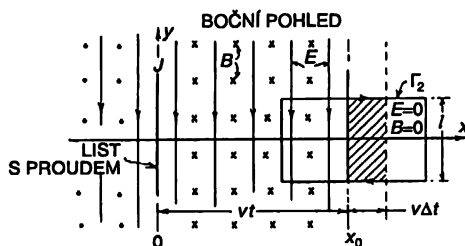
Podíváme-li se opět na obr. 18.3 v čase t , bude oblast mezi $x = \pm vt$ „vyplněná“ poli, ale dále už pole nezasahují. Opět zdůrazňujeme, že o nabitém listu, tedy i o polích E a B předpokládáme, že zasahují do nekonečné vzdálenosti ve směrech os y a z . (Protože neumíme nakreslit nekonečnou plochu, znázornili jsme pouze to, co se odehrává v konečné oblasti.)

Nyní budeme kvantitativně analyzovat to, co se děje. Proto si všimneme dvou pohledů, shora podél osy y , který je znázorněn na obr. 18.5 a bočního pohledu podél osy z , který je znázorněn na

obr. 18.6. Nejprve začneme s bočním pohledem. Nabitý list vidíme pohybovat se nahoru; magnetické pole směřuje do roviny papíru pro $+x$ a ven z roviny papíru pro $-x$. Elektrické pole až po $x = \pm vt$ směřuje všude dolů.



Obr. 18.5 Pohled shora k obr. 18.3



Obr. 18.6. Boční pohled k obr. 18.3

Podívejme se, zda jsou tato pole konzistentní s Maxwellovými rovnicemi. Nejdříve si nakreslíme jednu ze smyček, pomocí nichž jsme počítali křivkový integrál. Necht' je to pravouhlá smyčka Γ_2 znázorněná na obr. 18.6. Všimněte si, že jedna strana pravouhelníku je v oblasti, kde existují pole a druhá je v oblasti, které pole ještě nedosáhla. Touto smyčkou protéká jistý magnetický tok. Měnil-li se tento tok, vytvoří se podél smyčky emf. Pohybuje-li se čelo vlny, budeme mít proměnný magnetický tok, neboť plocha, v níž B existuje, se postupně zvětšuje rychlostí v . Tok uvnitř Γ_2 je roven součinu B a té části plochy uvnitř Γ_2 , v níž je magnetické pole. Protože velikost B je konstantní, bude rychlost změny toku rovna součinu velikosti pole a rychlosti změny plochy. Rychlost změny plochy se snadno určí. Je-li šířka pravouhelníku Γ_2 rovna l , pak plocha, v níž existuje B , se mění jako $lv\Delta t$ v čase Δt (obr. 18.6). Rychlost změny toku je proto rovna Blv . Podle Faradayova zákona to však musí být rovno křivkovému integrálu E podél Γ_2 a ten je roven právě El . Tak dostáváme rovnost

$$E = vB. \quad (18.10)$$

Je-li tedy poměr E k B roven v , budou zkoumaná pole vyhovovat Faradayově rovnici.

To však není jediná rovnice; máme ještě rovnici, která dává do souvislosti E a B :

$$c^2 \nabla \times B = \frac{j}{\epsilon_0} + \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (18.11)$$

Abychom využili této rovnice, všimneme si pohledu shora zobrazeného na obr. 18.5. Už jsme viděli, že tato rovnice nám dává hodnotu B v blízkosti nabitého listu. Také za čelem vlny pro každou smyčku nebudeme mít rotaci B ani j , ani měnící se pole E , a proto tam tato rovnice bude platit. Nyní se podíváme, co se vlastně stane v křivce Γ_1 , která protíná čelo vlny tak, jak je znázorněno na obr. 18.5. Nejsou zde proudy a proto je možné rovnici (18.11) vyjádřit v integrální formě

$$c^2 \oint_{\Gamma_1} B \cdot ds = \frac{d}{dt} \int_{\text{uvnitř } \Gamma_1} E \cdot n \, dS. \quad (18.12)$$

Křivkový integrál B je právě součin B a l . Rychlost změny toku E vzniká pouze díky postupujícímu čelu vlny. Oblast uvnitř Γ_1 , kde je E nenulové, vzrůstá rychlostí vl . Pravá strana rovnice (18.12)

je pak rovna vE . Rovnice tedy získá tvar

$$c^2 B = Ev. \quad (18.13)$$

Máme řešení, v němž jsou pole B a E za čelem vlny konstantní, obě jsou kolmá ke směru postupu vlny a současně jsou kolmá navzájem. Maxwellovy rovnice určují poměr E k B . Z rovnic (18.10) a (18.13) vyplývá

$$E = vb \quad \text{a} \quad E = \frac{c^2}{v} B.$$

Ale pozor! Pro poměr E/B jsme našli *dvě různé* podmínky. Může pole, které jsme popsali opravdu existovat? Existuje zřejmě jen jedna rychlost v , pro níž jsou obě tyto rovnice splněny, a pro tuto rychlost platí $v = c$. Čelo vlny musí postupovat rychlostí c . Máme příklad, v němž se elektrický vliv proudu šíří určitou konečnou rychlostí c .

Položme si nyní otázku, co se stane, zastavíme-li náhle pohyb nabitého listu, a to po jeho pohybu v krátkém čase T ? Co se stane, to se dovíme pomocí principu superpozice. Měli jsme nulový proud a najednou jsme proud zapnuli. V takovém případě známe řešení. Nyní jsme rozhodnutí přidat další systém polí. Vezmeme jiný nabitý list a náhle jej uvedeme do pohybu toutéž rychlostí v opačném směru, ale až po čase T od začátku pohybu prvního listu. Celkový proud pocházející od obou listů je zpočátku nulový, potom se zapíná po dobu T a potom se opět vypíná, neboť se oba proudy ruší. Tak máme pravoúhlý „impulz“ proudu.

Nový záporný proud vytváří stejná pole jako kladný proud, ale se všemi znaménky opačnými a s časovým zpožděním T . Čelo vlny opět postupuje rychlostí c . V čase t dosáhlo vzdálenosti $x = \pm c(t - T)$, jak je znázorněno na *obr. 18.4 b*. Máme tedy dva „bloky“ pole postupující rychlostí c , jak to znázorňuje *obr. 18.4 a, b*. Kombinovaná pole budou taková, jak je znázorňuje *obr. 18.4 c*. Pole jsou nulová pro $x > ct$, pak jsou konstantní mezi $x = c(t - T)$ a $x = ct$ (s hodnotami, které jsme už našli) a opět jsou nulová pro $x < c(t - T)$.

Krátce řečeno, máme malý kousek pole, blok se šířkou cT , který opustil proudový list a pohybuje se prostorem samostatně. Pole se „odtrhla“ a šíří se volně prostorem a už nejsou spojena se zdrojem, Housenka se proměnila v motýla!

Jak může tento svazek elektrického a magnetického pole udržet sám sebe? Odpověď zní: kombinací jevů pocházejících z Faradayova zákona $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ a nového Maxwellova členu $c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \partial \mathbf{E} / \partial t$. Pole nemají jinou možnost, než se vzájemně podporovat. Předpokládejme, že magnetické pole by mělo vymizet a začalo se zmenšovat. Pak by tu bylo proměnné magnetické pole, které by vytvářelo elektrické pole. Kdyby chytlo zmizet toto elektrické pole, proměnné elektrické pole by opět vytvořilo magnetické pole. Neustálým vzájemným působením – proměnou jednoho pole v druhé – musí obě existovat stále. Nemožou zmizet.²⁴⁾ Uchovávají se formou jakéhosi tance – jedno pole vytváří druhé a to druhé vytváří první – a tak se šíří prostorem.

²⁴⁾ Úplně to tak není. Mohou být „absorbována“, dostanou-li se do oblasti, v níž jsou náboje. Máme na mysli to, že kdesi mohou být vytvořena jiná pole, která se skládají s těmito poli a „zruší“ je v důsledku destruktivní interference (viz kapitola 31, 1. díl)

18.5 RYCHLOST SVĚTLA

Máme vlnu, která opouští látkový zdroj a pohybuje se rychlostí c , což je rychlost světla. Vraťme se však trochu nazpět. Historie je taková, že o koeficientu c v Maxwellových rovnicích nebylo známo, že je současně rychlostí šíření světla. Byla to prostě konstanta v rovnicích. My jsme ji označili c hned na začátku, neboť jsme věděli, co musíme dostat nakonec. Nemysleme si, že by bylo rozumné učit vás vztahy s různými konstantami a pak se vrátit a dosazovat c všude tam, kam patří. Z hlediska elektřiny a magnetizmu jsme však vycházeli ze dvou konstant ϵ_0 a c^2 , které se objevují v rovnicích elektrostatiky a magnetostatiky.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (18.14)$$

a

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (18.15)$$

Vezmeme-li *libovolnou* definici jednotkového náboje, můžeme experimentálně určit konstantu ϵ_0 vystupující v rovnici (18.14), např. měřením síly mezi dvěma jednotkovými náboji v klidu s použitím Coulombova zákona. Experimentálně musíme určit i konstantu $\epsilon_0 c^2$, která se objevuje v rovnici (18.15). Můžeme to udělat např. měřením síly působící mezi dvěma jednotkovými proudy. (Jednotkový proud znamená jednotku náboje za sekundu.) Poměr těchto dvou experimentálních konstant je roven c^2 , což je jiná elektromagnetická konstanta.

Všimněte si, že tato konstanta c^2 je vždy stejná bez ohledu na to, jakou jednotku náboje jsme zvolili. Zvolíme-li naší jednotkou náboje dvakrát větší náboj, např. dvakrát tolik protonových nábojů, ϵ_0 bude muset být čtyřikrát menší. Necháme-li téct takové dva jednotkové proudy dvěma vodiči, proteče v každém vodiči dvakrát tolik „nábojů“ za sekundu a síla mezi vodiči bude čtyřikrát větší. Konstanta $\epsilon_0 c^2$ se musí zmenšit čtyřikrát, poměr $\epsilon_0 c^2 / \epsilon_0$ se však nemění.

Proto můžeme jen pomocí experimentů s náboji a proudy najít číslo c^2 , o němž se zjistilo, že je druhou mocninou rychlosti šíření elektromagnetických působení. Ze statických měření (měřením sil mezi dvěma jednotkovými náboji a mezi dvěma jednotkovými proudy) bychom zjistili, že $c = 3,00 \cdot 10^8$ m/s. Když Maxwell poprvé uskutečnil tento výpočet se svými rovnicemi, mohl říci, že systém elektrického a magnetického pole se bude šířit touto rychlostí. Poukázal i na tajemnou shodu této konstanty s rychlostí světla. „Sotva můžeme vyloučit závěr“, řekl Maxwell, „že světlo je příčným vlněním téhož prostředí, které vyvolává elektrické a magnetické jevy.“

Maxwell uskutečnil jedno z velkých sjednocení fyziky. Před ním bylo světlo, jakož i elektřina a magnetismus. Elektřina a magnetismus byly sjednoceny experimentálními pracemi Faradaye, Oerstedta a Ampéra. Pak náhle přestalo být světlo „něčím jiným“ a stalo se pouze elektřinou a magnetizmem v nové formě – drobnými „kousky“ elektrického a magnetického pole šířícími se prostorem.

Soustředili jsme se na ty charakteristiky tohoto speciálního řešení, které se ukazují být platnými pro každou elektromagnetickou vlnu: že magnetické pole je kolmé ke směru pohybu čela vlny, elektrické pole je také kolmé ke směru pohybu čela vlny, a přitom jsou vektory \mathbf{E} a \mathbf{B} kolmé navzájem. Dále, že velikost elektrického pole E je rovna c -násobku velikosti magnetického pole B . Tyto tři skutečnosti – že obě pole jsou kolmá na směr šíření, že \mathbf{B} je kolmé k \mathbf{E} a že $E = cB$ – jsou obecně platné pro jakoukoliv elektromagnetickou vlnu. Náš speciální případ je tedy dobrým příkladem; ukazuje všechny hlavní vlastnosti elektromagnetických vln.

18.6 ŘEŠENÍ MAXWELLOVÝCH ROVNIC. POTENCIÁLY A VLNOVÁ ROVNICE

Zkusme nyní udělat něco matematického a zapišme Maxwellovy rovnice v jednodušší formě. Zpočátku se vám bude zdát, že je komplikujeme, ale budete-li trochu trpěliví, opravdu se dočkáte jejich zjednodušení. Ačkoliv jste si už zvykli na každou Maxwellovu rovnici, je to přece jen mnoho kousků a ty je třeba navzájem propojit. Právě to se chystáme udělat.

Začněme se vztahem $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, který představuje nejjednodušší z rovnic. Víme, že důsledkem této rovnice je skutečnost, že \mathbf{B} je rotací něčeho. Zapišeme-li tedy

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (18.16)$$

už jsme vyřešili jednu z Maxwellových rovnic. (Mimochodem, tento vztah zůstává v platnosti i když dosadíme jiný vektor \mathbf{A}' , pro který platí $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi$, kde ψ je libovolné skalární pole; prostě je to proto, že rotace $\nabla\psi$ je nula a \mathbf{B} se nezměnilo. O tom jsme však už hovořili.)

Jako další vezměme Faradayův zákon $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$, neboť ten neobsahuje žádné proudy nebo náboje. Vyjádříme-li \mathbf{B} ve tvaru $\nabla \times \mathbf{A}$ a derivujeme podle t , můžeme Faradayův zákon zapsat ve tvaru

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A}.$$

Protože sled derivací můžeme zaměnit, dá se tato rovnice vyjádřit ve tvaru

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (18.17)$$

Vidíme, že $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t$ je vektor jehož rotace je rovna nule. Proto je tento vektor gradientem něčeho. Když jsme se zabývali elektrostatikou, měli jsme $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ a zjistili jsme, že samotné \mathbf{E} je gradientem čehosi. Považovali jsme to za gradient $-\varphi$ (minus je jen věcí dohody). Udělejme nyní totéž s $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t$, a dostaneme

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi. \quad (18.18)$$

Používáme tentýž symbol φ , neboť v elektrostatickém případě, kdy se s časem nic nemění a člen $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ vymizí, bude \mathbf{E} naším starým $-\nabla \varphi$. Faradayovu rovnici tedy můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (18.19)$$

Už jsme vyřešili dvě Maxwellovy rovnice a zjistili jsme, že k popisu elektromagnetických polí \mathbf{E} a \mathbf{B} potřebujeme čtyři potenciálové funkce: skalární potenciál φ a vektorový potenciál \mathbf{A} , který představuje další tři funkce.

Protože \mathbf{A} určuje část vektoru \mathbf{E} a také vektoru \mathbf{B} , zajímá nás, co se stane, změníme-li \mathbf{A} na $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi$? Obecně se \mathbf{E} změní, pokud neuděláme nějaké speciální opatření. Přece však můžeme uskutečnit takovou změnu aniž bychom ovlivnili pole \mathbf{E} a \mathbf{B} (tj. aniž bychom změnili

fyzikální podstatu), měníme-li A i φ *současně* podle pravidel

$$A' = A + \nabla\psi, \quad \varphi' = \varphi - \frac{\partial\psi}{\partial t}. \quad (18.20)$$

Pak se ani E , ani B získané z rovnice (18.19) nezmění.

Předtím jsme volili $\nabla \cdot A = 0$, abychom zjednodušili rovnice statického případu. Nyní už to tak dělat nebudeme a volbu provedeme jinak. Hned vám však neprozradím, jaká to bude volba, neboť později se stane zřejmým, *proč* jsme museli udělat právě takový výběr.

Vraťme se nyní k posledním dvěma Maxwellovým rovnicím, které nám poskytnou vztahy mezi potenciály a zdroji ρ a j . Budeme-li moci určit A a φ z proudů a nábojů, dostaneme E a B z rovnic (18.16) a (18.19), takže budeme mít jinou formu Maxwellových rovnic.

Začneme tím, že vztah (18.19) dosadíme do $\nabla \cdot E = \rho/\epsilon_0$, a tak dostaneme

$$\nabla \cdot \left(-\nabla\varphi - \frac{\partial A}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Tento vztah můžeme psát i ve tvaru

$$-\nabla^2\varphi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot A = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (18.21)$$

kteřý představuje jednu z rovnic dávajících φ a A do souvislosti se zdroji.

Naše závěrečná rovnice bude nejsložitější. Začneme přepsáním čtvrté Maxwellovy rovnice do tvaru

$$c^2 \nabla \times B - \frac{\partial E}{\partial t} = \mathbf{j}$$

a vyjádřením B a E pomocí potenciálů. Použijeme k tomu rovnice (18.16) a (18.19) a dostaneme

$$c^2 \nabla \times (\nabla \times A) - \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla\varphi - \frac{\partial A}{\partial t} \right) = \mathbf{j}.$$

První člen můžeme upravit použitím algebraické identity: $\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$. Tak dostaneme

$$-c^2 \nabla^2 A + c^2 \nabla(\nabla \cdot A) + \frac{\partial}{\partial t} \nabla\varphi + \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \mathbf{j}, \quad (18.22)$$

což není příliš jednoduché.

Nyní však naštěstí můžeme využít možnosti libovolné volby divergence A . To, co se chystáme udělat, je vlastně taková volba, při které separujeme rovnice pro A a pro φ a dáme jim stejnou formu. Můžeme to udělat tak, že vezmeme²⁵⁾

$$\nabla \cdot A = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (18.23)$$

²⁵⁾

Volba $\nabla \cdot A$ se nazývá kalibrace. Změna A přidáním $\nabla\psi$ se nazývá kalibrační transformace. Rovnice (18.23) se nazývá Lorentzova kalibrační podmínka.

Když to uděláme, dva prostřední členy A a φ v rovnici (18.22) se zruší a rovnice se velmi zjednoduší:

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{j}{\epsilon_0 c^2}. \quad (18.24)$$

Naše rovnice pro φ (tj. rovnice (18.21) získá stejný tvar

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (18.25)$$

Jaká krásná soustava rovnic! Jejich krása spočívá především v tom, že jsou pěkně odděleny – s hustotou náboje se spojuje φ , s proudem zase A . Ačkoliv levá strana vypadá trochu legračně (obsahuje operátor ∇^2 a $\left(\frac{\partial}{\partial t^2}\right)$), situace se změní, když ji rozepíšeme:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (18.26)$$

Teď už má rovnice pěknou symetrii v x , y , z , t ; faktor $-1/c^2$ je nevyhnutelný, neboť čas a prostor *se liší* – mají různé jednotky.

Maxwellovy rovnice nás přivedly k novému druhu rovnic pro potenciály φ a A , ale ke stejnému matematickému tvaru pro všechny naše čtyři funkce φ , A_x , A_y , A_z . Když se tyto rovnice naučíme řešit, dostaneme B a E z $\nabla \times A$ a $-\nabla \varphi - \partial A / \partial t$. Máme jinou formu elektromagnetických zákonů – jsou úplně rovnocenné s Maxwellovými rovnicemi, avšak v mnoha případech se s nimi pracuje snáze než s Maxwellovými rovnicemi.

My už jsme vlastně vyřešili rovnici, která byla velmi podobná rovnici (18.26). Když jsme však zkoumali zvuk v části 47. kapitole 1. dílu, měli jsme rovnici

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

a viděli jsme, že popisuje šíření vln rychlostí c ve směru osy x . Rovnice (18.26) je odpovídající vlnovou rovnicí v trojrozměrném případě. Můžeme proto říci, že v oblastech, v nichž už nejsou náboje ani proudy, není řešením těchto rovnic *nevyhnutelně* nulové φ a A . (Ačkoli nulové φ a A je jedním z možných řešení.) Existují řešení, v nichž se určitý soubor φ a A mění s časem, ale vždy se pohybuje dál rychlostí c . Pole putují volným prostorem tak, jak to bylo v případě, který jsme uvedli na začátku této kapitoly.

S novým Maxwellovým členem v rovnici IV se nám podařilo napsat rovnice pole pomocí A a φ v podobě, která je jednoduchá a ze které je hned zřejmé, že jde o elektromagnetické vlny. V některých případech je však praktičtější zůstat u původních rovnic, v nichž vystupují E a B . My však nyní tyto rovnice opustíme, neboť při našem výstupu za poznáním jsme se dostali na vrcholy štítů a otevírá se nám pohled na druhou stranu, do jiných údolí. Nyní uvidíme věci jinak a už se můžeme těšit na nové a úchvatné pohledy.

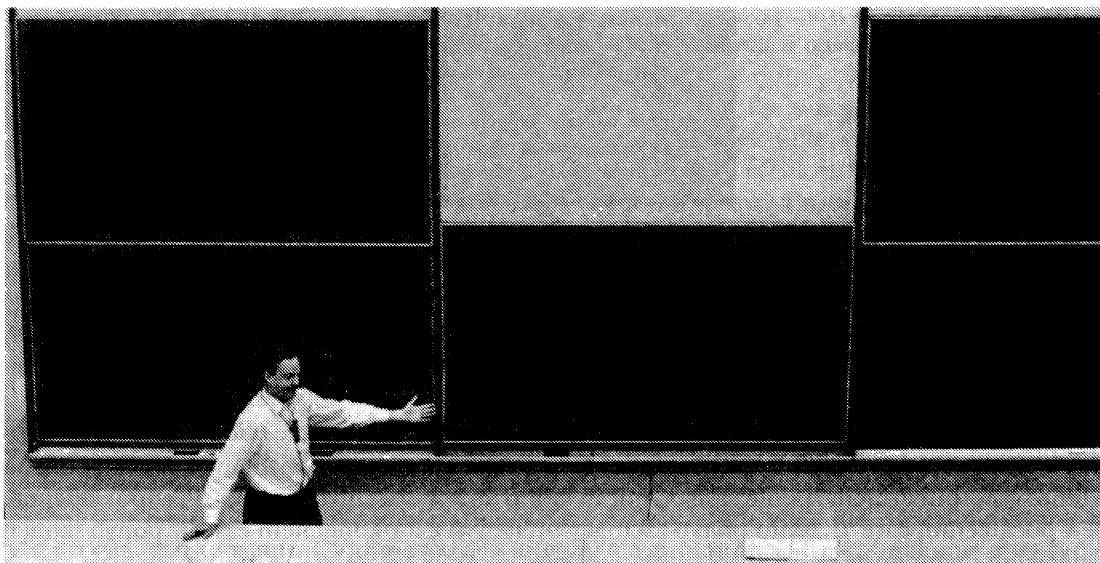
19

P

řincip

nejmenší akce

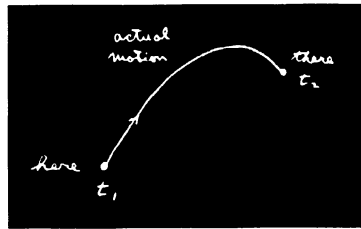
SPECIÁLNÍ PŘEDNÁŠKA – TĚMĚŘ DOSLOVNÁ S FEYNMANOVÝMI NÁČRTKY NA TABULI²⁶⁾



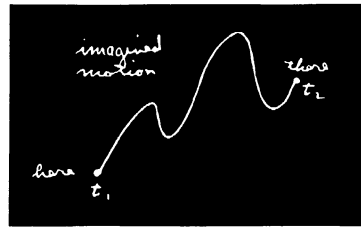
Na střední škole si mě jednou po hodině fyziky zavolal můj učitel, jmenoval se Bader a řekl mi: „Vypadáš znuděně, a proto jsem ti chtěl říci něco zajímavého.“ Pak mi řekl něco, co mě úplně uchvátilo a co mě dodnes fascinuje. Vždy, když se s tímto předmětem setkám, zabývám se jím. I teď, když jsem si začal připravovat přednášku, jsem zjistil, že jsem se do rozboru tohoto problému pustil víc než jindy. Místo přípravy přednášky jsem se ponořil do nového problému. Předmět, o němž mluvím, je princip nejmenší akce.

Můj učitel fyziky mi řekl toto: „Dejme tomu, že máš nějakou částici třeba v gravitačním poli, která se začne odněkud pohybovat a volně se blíží k nějakému jinému bodu. Můžeš ji třeba hodit, takže bude stoupat a potom zase klesat.“

²⁶⁾ Další kapitoly jsou na této speciální přednášce nezávislé, je určena tak trochu pro „pobavení“.

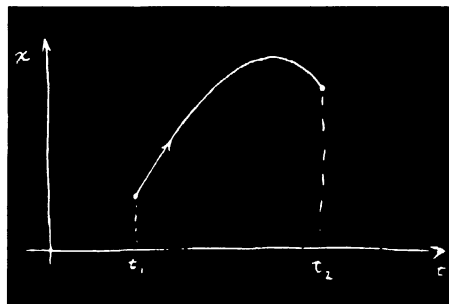


Bude se pohybovat z původního místa ke konečnému místu a tento pohyb trvá určitou dobu. Nyní si myslí nějaký jiný pohyb. Nechť se částice na své dráze pohybuje tak, jak je znázorněno na druhém obrázku, ale doba trvání pohybu je stejná jako v prvním případě.“ A pak můj učitel dodal: „Vypočítáš-li jakou má částice v každém okamžiku na své dráze kinetickou energii, odečteš-li od ní potenciální energii a integruješ podle času přes časový interval potřebný k průchodu celé dráhy, dostaneš číslo, které je *větší* než číslo odpovídající skutečnému pohybu.



Jinak řečeno: Newtonovy zákony mohou být formulovány ne ve tvaru $F = ma$, ale ve tvaru, který odráží skutečnost, že střední kinetická energie minus střední potenciální energie má nejmenší hodnotu na té dráze, po které se předmět ve skutečnosti pohybuje od jednoho místa k druhému.“

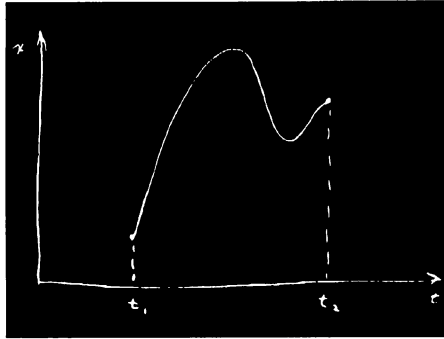
Vysvětlíme si blíže, co to vlastně znamená. Budeme-li se zajímat o pohyb v gravitačním poli, pak při pohybu částice po dráze $x(t)$ (nejdříve budeme uvažovat jednorozměrný problém a budeme předpokládat, že částice se pohybuje jen nahoru a dolů, a ne do strany), kde x je výška nad zemí, bude kinetická energie rovna $1/2 m(dx/dt)^2$ a potenciální energie bude v každém okamžiku rovna mgx . Nyní vezmeme rozdíl kinetické a potenciální energie v každém okamžiku pohybu a tento výraz integrujeme podle času od počátečního do konečného okamžiku. Předpokládejme, že v počátečním čase t_1 , tento pohyb začal v určité výšce a v konečném čase t_2 pohyb skončil v nějakém jiném místě.



Pak máme integrál

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - mgx \right] dt.$$

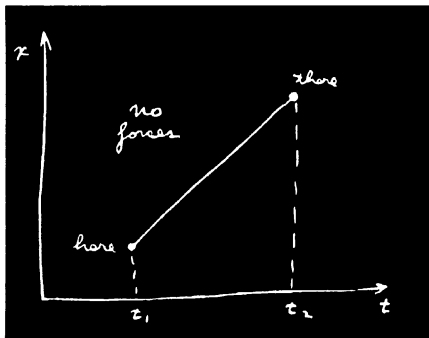
Skutečný pohyb se děje po určité křivce (vyjadřujeme-li závislost na čase, jde o parabolu) a pro ni dostáváme určitou hodnotu uvedeného integrálu. Můžeme si však představit nějaký jiný pohyb, kdy by se částice pohybovala nahoru a dolů nějakým neobyčejným způsobem.



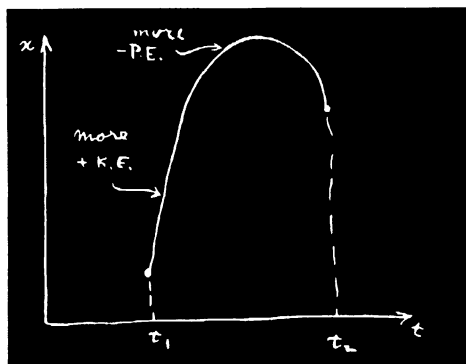
Pro takový pohyb pak můžeme vypočítat rozdíl kinetické a potenciální energie a tento rozdíl integrovat po záznamné křivce... nebo po jakékoliv jiné křivce. Podstatné je, že tou pravou křivkou je ta, pro níž má tento integrál nejmenší hodnotu.

Vyzkoušejme to. Nejdříve si všimněme pohybu volné částice, která nemá žádnou potenciální energii. Pravidlo pak říká, že při pohybu z jednoho místa na druhé v dané době musí být integrál kinetické energie nejmenší, takže pohyb se musí dít konstantní rychlostí. (My už víme, že správnou odpověď je pohyb konstantní rychlostí.) Proč je tomu tak? Proto, že při jiném pohybu částice by byly rychlosti někdy větší a někdy menší než průměr. Jenže průměrná rychlost je vždy stejná, neboť všechny pohyby z jednoho místa na druhé se uskutečňují ve stejném čase.

Jako příklad vám poslouží situace, kdy máte jet z domova do školy autem a cesta vám má trvat určitou dobu. Cestu můžete uskutečnit různými způsoby. Na začátku můžete divoce zrychlovat a před koncem silně brzdit, nebo můžete jet konstantní rychlostí, nebo můžete jet chvíli zpátečkou a potom opět dopředu, nebo si můžete zvolit ještě jiné způsoby. Je důležité, že průměrná rychlost je podíl projaté vzdálenosti a času potřebného na cestu. Kromě případu konstantní rychlosti pojedete vždy tak, že někdy pojedete příliš rychle a někdy pojedete příliš pomalu. Ale střední hodnota *druhých mocnin* hodnot, které se liší od průměru, je, jak víte vždy větší než druhá mocnina střední hodnoty, a proto bude integrál kinetické energie vždy větší při kolísání rychlosti než při rychlosti konstantní. Vidíme tedy, že integrál má minimum, je-li rychlost konstantní (když není žádné silové působení). Správná křivka pak vypadá takto:



Předmět vržený vzhůru v gravitačním poli se pohybuje nejdříve rychle, ale potom stále pomaleji. Je to proto, že má i potenciální energii a nejmenší musí být *rozdíl* kinetické a potenciální energie. Protože potenciální energie roste s výškou, bude *rozdíl* co nejmenší, když se co nejrychleji dostaneme nahoru, kde je velká potenciální energie. Potom odečteme-li potenciální energii od kinetické, dostaneme menší střední hodnotu. Výhodnější je taková křivka, která rychle stoupá a při níž se odečítá mnoho potenciální energie.



Nemůžete však stoupat příliš rychle nebo příliš vysoko, neboť pak by byla velká i kinetická energie. Přitom je třeba stoupat dost rychle, aby bylo možné vrátit se v určeném čase. Nechceme tedy příliš vysoko, ale kamsi přece jen vystoupit chceme. Řešením je tedy určitá rovnováha mezi snahou o získání co největší potenciální energie při co nejmenším nárůstu kinetické energie. Jde o to, aby rozdíl kinetické a potenciální energie byl co nejmenší.

To je vše, co mi řekl můj učitel. Víc mi neřekl, neboť to byl dobrý učitel a věděl kdy je třeba přestat ve výkladu, Tato vlastnost mi však chybí, a tak vás místo toho, abych zůstal u zajímavého náznaku, vyděším a znechutím tím, že se pokusím dokázat správnost tohoto tvrzení. Matematický problém, který budeme řešit, je obtížný a nezvyklý. Budeme se zabývat určitou veličinou nazývanou *akce* (účinek) S . Je to rozdíl kinetické a potenciální energie integrovaný podle času

$$\text{akce} = S = \int_{t_1}^{t_2} (KE - PE) dt.$$

Musíte si uvědomit, že PE a KE jsou funkce. Pro různé možné křivky bude akce nabývat různých hodnot. Naší matematickou úlohou je najít, pro kterou křivku je toto číslo nejmenší.

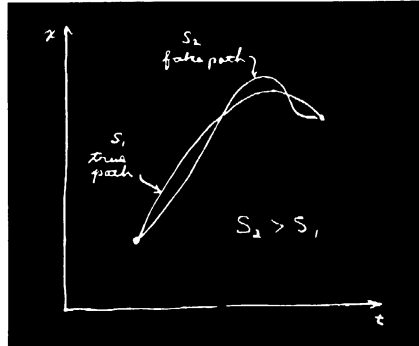
Možná že si řeknete: „Je to obyčejný výpočet maxima a minima. Je třeba vypočítat akci a derivováním najít minimum.“

Ale pozor! Obvykle máte funkci nějaké *proměnné* a hledáte hodnotu proměnné, při které je funkce menší nebo větší. Můžete mít například tyč, která byla zahřáta uprostřed a odtud se teplo šíří dále. Každý bod tyče bude mít určitou teplotu a máte najít bod, v němž je teplota největší. My však máme pro *každou křivku v prostoru* určité číslo (tedy něco docela jiného) a hledáme takovou křivku, pro níž je toto číslo nejmenší. Taková úloha patří do docela jiné oblasti matematiky. To už není obyčejný integrální a diferenciální počet. Podobné výpočty patří do *variálního počtu*.

Problémů tohoto typu je v matematice mnoho. Například kružnice je obvykle definována jako geometrické místo bodů v rovině, které jsou stejně vzdáleny od nějakého bodu. Existuje však i jiná definice kružnice. Kružnice je taková křivka dané délky, která obepíná největší plochu. Každá jiná uzavřená křivka se stejným obvodem obepíná menší plochu než kružnice. Stanovíme-li tedy

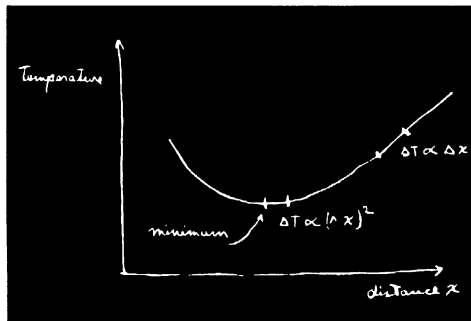
problém najít křivku, která při daném obvodu obepíná největší plochu, dostaneme úlohu variačního počtu, což je něco docela jiného než úlohy, na které jsme byli zvyklí.

Budeme tedy počítat křivku, podle níž se těleso bude pohybovat. Uděláme to následujícím způsobem. Představíme si, že existuje ta pravá křivka a všechny ostatní křivky jsou nepravé. Budeme-li počítat akci pro nepravou křivku, dostaneme větší hodnotu než při výpočtu akce pro pravou křivku.



Naší úlohou je najít pravou křivku. Kde taková křivka leží? Jeden ze způsobů určení spočívá v tom, že budeme počítat akci pro milióny a milióny křivek a budeme zkoumat, pro kterou křivku je akce nejmenší. Když to zjistíme, najdeme tu pravou křivku.

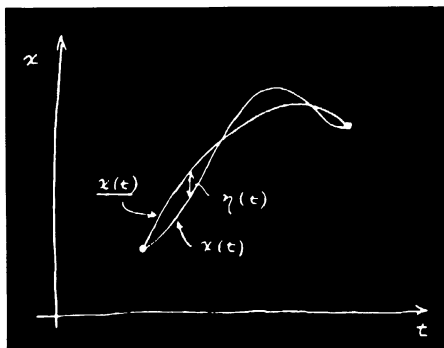
Tak bychom mohli opravdu postupovat. Můžeme to však udělat o něco lépe. Jde-li o obyčejnou funkci, která má minimum (např. o teplotu), můžeme využít té vlastnosti minima, že při vzdalování od minima na vzdálenost *prvního* řádu, se změní hodnota funkce pouze o veličinu, která je *druhého* řádu. V jakémkoliv jiném bodě křivky se při malé změně proměnné změní hodnota funkce o veličinu, která je i prvního řádu. Ale v minimum nezpůsobuje posun o malou vzdálenost v prvním přiblížení žádné změny funkce.



Toho využijeme při výpočtu naší křivky. Je-li křivka pravá, nebude mít křivka, která se od ní pouze nepatrně liší, v prvním přiblížení jinou akční funkci. Jde-li opravdu o minimum, objeví se rozdíl až ve druhém přiblížení.

Lze to snadno dokázat. Změníme-li nějakým způsobem křivku tak, aby změna byla prvního řádu, změní se úměrně tomu i akce. Při této změně se akce stává podle předpokladu větší, neboť jinak by nešlo o minimum. Je-li však změna úměrná odchylce, při změně znaménka by se vlastně akce zmenšovala. Dostali bychom situaci, kdy akce roste při odchýlení na jednu stranu a klesá při odchýlení na stranu opačnou. Je jen jedna možnost, abychom dostali minimum, a to ta, že

v prvním přiblížení nedochází ke změnám a změny jsou úměrné druhé mocnině odchylky od pravé křivky. Budeme proto postupovat takto. Symbolem $\underline{x(t)}$ (s čarou dole) označíme pravou křivku, tu, kterou se snažíme najít. Vezmeme nějakou zkušební křivku $x(t)$, která se od té pravé liší o malou hodnotu, a tu označíme $\eta(t)$.



Základní myšlenka spočívá v tom, že rozdíl mezi akcí S podél křivky $x(t)$ a akcí \underline{S} podél pravé křivky $\underline{x(t)}$ musí být v prvním přiblížení malého $\eta(t)$ nulový. Tyto veličiny se mohou lišit ve druhém řádu, ale v prvním řádu musí jejich rozdíl být nulový.

A přitom musí platit pro všechna η . Ačkoliv to není docela pravda, neboť metoda ztrácí smysl pro jiné křivky než ty, které začínají a končí v týchž bodech. Každá křivka začíná v určitém bodě v čase t_1 a končí v jiném bodě v čase t_2 , přičemž tyto body a časy jsou pevně dány. Naše funkce η tedy musí být nulová na obou koncích, takže $\eta(t_1) = 0$ a $\eta(t_2) = 0$. Touto podmínkou je náš matematický problém už úplně určen.

Kdybyste neznali diferenciální počet, mohli byste uvedený způsob použít k určení minima obyčejné funkce $f(x)$. Mohli byste uvážit, co se stane, vezmete-li $f(x)$ a přidáte malou veličinu h k x , a mohli byste dokázat, že korekce k $f(x)$ podle h musí být v prvním řádu nulová. Místo x byste dosadili $x + h$ a rozvinuli do prvního řádu v h ... právě tak, jak se to chystáme udělat pro η .

Podstata našeho postupu bude spočívat v tom, že do výrazu pro akci

$$S = \int \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \right] dt,$$

v němž $V(x)$ představuje potenciální energii, zavedeme substituci $\underline{x(t)} = \underline{x(t)} + \eta(t)$. Derivace dx/dt je, samozřejmě, derivace $\underline{x(t)}$ plus derivace $\eta(t)$, takže pro akci dostaneme vyjádření

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{d\underline{x}}{dt} + \frac{d\eta}{dt} \right)^2 - V(\underline{x} + \eta) \right] dt.$$

Nyní tento výraz rozepíšeme podrobněji. Pro člen s druhou mocninou dostaneme

$$\left(\frac{d\underline{x}}{dt} \right)^2 + 2 \frac{d\underline{x}}{dt} \frac{d\eta}{dt} + \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2.$$

Ale pozor! Nás nezajímají členy, které jsou vyššího řádu než prvního, a proto členy obsahující η^2 a vyšší mocniny zasuneme do škatulky zvané „druhý řád a řády vyšší“. Z tohoto výrazu se nám sem dostane pouze druhá mocnina, ale z jiných výrazů se sem mohou dostat i vyšší mocniny. Část odpovídající kinetické energii pak vypadá takto:

$$\frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2 + m \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{d\eta}{dt} + (\text{druhý řád a vyšší řády}).$$

Nyní potřebujeme znát potenciál V v $\mathbf{x} + \eta$. Protože η považujeme za malé, můžeme $V(\mathbf{x})$ rozložit do Taylorovy řady. Přibližně to bude $V(\mathbf{x})$; v další aproximaci (protože jde o obyčejné derivace) bude oprava rovna η násobenému rychlostí změny V vzhledem k x atd.:

$$V(\mathbf{x} + \eta) = V(\mathbf{x}) + \eta V'(\mathbf{x}) + \frac{\eta^2}{2} V''(\mathbf{x}) + \dots$$

Pro stručnost jsme psali V' namísto derivace V podle x . Člen s η^2 a vyšší členy spadnou do škatulky „druhý a vyšší řády“ a s těmi si nemusíme dělat starosti. Dáme-li nyní všechno dohromady, dostaneme

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2 - V(\mathbf{x}) + m \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{d\eta}{dt} - \eta V'(\mathbf{x}) + (\text{druhý řád a vyšší řády}) \right] dt.$$

Když si to pozorně prohlédneme, zjistíme, že první dva členy odpovídají akci \underline{S} , kterou bychom dostali v případě první křivky \underline{x} . To, na co se soustředíme, je změna S (tj. rozdíl mezi S a \underline{S} , kterou bychom dostali v případě pravé křivky). Tento rozdíl označíme jako δS a nazveme jej variací podle S . Vynecháme-li členy odpovídající druhému řádu a vyšším řádům, dostaneme

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[m \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{d\eta}{dt} - \eta V'(\mathbf{x}) \right] dt.$$

Nyní si povězte, jakou máme vlastně úlohu. Máme určitý integrál. Zatím nevíme, jaké je \mathbf{x} , ale víme, že bez ohledu na to, jaké je η , musí být tento integrál nulový. Řeknete si, že jediný způsob, kterým se to může stát, je ten, kdy je činitel u η nulový. Co se však má stát s prvním členem, v němž je $d\eta/dt$? Konec konců, může-li být η jakékoliv, mohla by být jakákoliv i jeho derivace, a tak by měl být i koeficient u $d\eta/dt$ nulový. Jenže to už není docela pravda, a to proto, že mezi η a jeho derivací existuje závislost. Tyto členy nejsou zcela nezávislé, neboť $\eta(t)$ musí být nulové jak v t_1 tak i t_2 .

Při řešení všech úloh variačního počtu se využívá téhož obecného principu. To, co chcete variovat, posunete (tak, jak jsme to provedli přidáním η), podíváte se na členy prvního řádu a potom to zařídíte tak, abyste dostali integrál následujícího tvaru: něco krát posun (η), ale bez derivací (už tam nebude $d\eta/dt$). Musíme to vždy přeskupit tak, abychom dostali „něco“ krát η . Za chvíli doceníte význam tohoto postupu. (Existují vzorce, které vám napovědí, jak to v některých případech lze udělat bez skutečného výpočtu, jenže tyto vzorce nejsou dost obecné a proto nemá cenu se jimi zabývat; nejlepší je počítat to tak, jak to budeme dělat.)

Jak se nám podaří upravit člen $d\eta/dt$ tak, aby v něm bylo η ? Můžeme to provést integrací per partes. Ukazuje se, že celý trik variačního počtu spočívá v zápisu variace S a potom v integraci per partes, aby vymizely derivace η . Je to vždy stejné v každém problému, v němž vystupují derivace.

Vzpomeňte si na obecný princip integrování per partes. Máte-li libovolnou funkci f násobenou $d\eta/dt$ a integrovanou podle t , napíšete derivaci součinu ηf :

$$\frac{d}{dt}(\eta f) = \eta \frac{df}{dt} + f \frac{d\eta}{dt}.$$

V integrálu, který máte počítat, vystupuje poslední člen, takže

$$\int f \frac{d\eta}{dt} dt = \eta f - \int \eta \frac{df}{dt} dt.$$

V našem vztahu pro δS představuje funkce f součin $m \cdot d\underline{x}/dt$, a proto můžeme psát

$$\delta S = m \frac{d\underline{x}}{dt} \eta(t) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(m \frac{d\underline{x}}{dt} \right) \eta(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} V'(\underline{x}) \eta(t) dt.$$

První člen musíme vypočítat pro dvě meze t_1 a t_2 . Pak tam máme integrál ze zbytku integrace per partes. Poslední člen tam vystupuje beze změny.

Nyní přichází něco, co se musí stát vždy – zintegrovaná část zmizí. (Kdyby nezmizela, museli bychom přeformulovat princip a přidat podmínku zabezpečující její vymizení!) Už jsme zmínili, že η musí být nulové na obou koncích křivky, neboť podle principu je akce nejmenší, ale za předpokladu pevných koncových bodů mění se křivky. To znamená, že musí platit $\eta(t_1) = 0$, jakož i $\eta(t_2) = 0$. Zintegrovaný člen je proto nulový. Spojíme-li zbývající členy, dostaneme

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[-m \frac{d^2 \underline{x}}{dt^2} - V'(\underline{x}) \right] \eta(t) dt.$$

Variace S má už nyní požadovaný tvar – máme něco v závorkách, řekněme F , vše je násobeno $\eta(t)$ a integrováno od t_1 a t_2 .

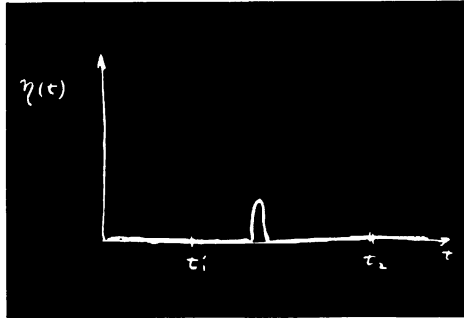
Vyšlo nám, že integrál z čehosi násobeného $\eta(t)$ je vždy nulový:

$$\int F(t) \eta(t) dt = 0.$$

Máme nějakou funkci t , násobíme ji $\eta(t)$ a integrujeme z jednoho konce na druhý. Bez ohledu na to, jaké je η , dostaneme nulu. To znamená, že funkce $F(t)$ je nulová. Ačkoliv je to zřejmé, přece jen uvedeme jeden druh důkazu.

Předpokládejme, že za $\eta(t)$ jsme vybrali něco, co je nulové všude kromě bezprostředního okolí jedné konkrétní hodnoty. Zůstává to nulové, pokud se nedostaneme ke zmíněné hodnotě t ; pak to na okamžik vyskočí a opět klesne zpět. Integrujeme-li toto η násobené libovolnou funkcí F , dostaneme něco nenulového jen tam, kde η skočilo, a tak dostaneme hodnotu F v tom místě násobenou integrálem přes tento skok. Samotný integrál přes tento skok není nulový, ale násobeno

ben F musí být nulový, z čehož vyplývá, že funkce F musí být nulová v místě skoku. Ale skok může být tam, kde jen pomyslíme, a proto musí být F nulová všude.



Je-li náš integrál nulový pro libovolné η , koeficient u η musí být nulový. Akční integrál bude nejmenší pro křivku, která vyhovuje této složité diferenciální rovnici.

$$\left[-m \frac{d^2 \underline{x}}{dt^2} - V'(\underline{x}) \right] = 0.$$

Ve skutečnosti to však není tak složitá rovnice a určitě jste se s ní již setkali. Je to prostě $F = ma$. První člen je součinem hmotnosti a zrychlení a druhý je derivací potenciální energie, což je vlastně síla.

Tak jsme alespoň pro konzervativní systém ukázali, že princip nejmenší akce dává správnou odpověď; říká, že křivka s nejmenším účinkem vyhovuje Newtonovu zákonu.

Je třeba poznamenat, že jsme vlastně nedokázali, že jde o *minimum*; docela dobře by to mohlo být i maximum. Ve skutečnosti to ani minimum být nemusí. Je to obdoba toho, co jsme se už dověděli o „principu nejkratšího času“ v optice. Tam jsme také hovořili o „nejkratším“ čase. Ukázalo se však, že v některých situacích to nebyl *nejkratší* čas. Základní princip spočívá v tom, že pro *libovolné odchytky prvního řádu* od optické dráhy je časová změna nulová; je to tedy stejná historie. „Nejmenším“ vlastně rozumíme to, že v prvním řádu je při změně křivky změna veličiny S nulová. Nemusí to však být nevyhnutelně „minimum“.

Dále bych chtěl zmínit některá zobecnění. Především to, že by se to dalo dělat i v trojrozměrném případě. Místo x bychom měli x, y, z jako funkce t ; akce by však byla složitější. Při trojrozměrném pohybu musíte vzít úplnou kinetickou energii: $(m/2)$ násobené druhou mocninou celkové rychlosti, tj.

$$KE = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right].$$

I potenciální energie je funkcí x, y, z . Jak vypadá naše křivka? Je to nějaká obecná křivka v prostoru, kterou nebude snadné nakreslit, ale myšlenka zůstává stejná. Co lze říci o η ? η má tři složky. Křivky lze posunout ve směru x nebo y nebo z , nebo je lze posunout současně ve všech třech směrech. Proto je η vektor. Ale to situaci příliš nezkomplikuje. Protože pouze variace *prvního řádu* musí být vždy nulové, můžeme výpočet uskutečnit postupně se třemi posunutími. Nejdříve můžeme posunout η pouze ve směru x a požadovat, aby koeficient byl nulový. Tak

dostaneme jednu rovnici. Potom η posuneme ve směru y a dostaneme druhou rovnici, pak ve směru z a dostaneme třetí rovnici. Pořadí můžeme i zaměnit. Vždy ale dostaneme tři rovnice. A ovšem i Newtonův zákon je vyjádřen třemi rovnicemi ve třech směrech – pro každou složku jednou. Myslím, že chápete, jak je tomu v trojrozměrném případě, ale samotný důkaz vám přenechám. Můžete třeba použít jakoukoliv souřadnicovou soustavu: polární nebo nějakou jinou, a tak dostanete Newtonovy zákony odpovídající přímo té soustavě, prozkoumáte-li, co se stane, nastane-li posun η podél poloměru nebo v úhlu atd.

Tuto metodu lze zobecnit na libovolný počet částic. Máte-li např. dvě částice, mezi nimiž působí síla, takže existuje vzájemná potenciální energie, prostě sečtete jejich kinetické energie a od tohoto součtu odečtete potenciální energii vzájemného působení. A co je třeba variovat? Křivky *obou* částic.

Řekl jsem, že dostanete Newtonův zákon. To však není docela pravda, neboť Newtonův zákon zahrnuje i nekonzervativní síly, takové, jako je tření. Newton tvrdil, že *ma* je prostě rovno síle, až už je jakákoliv. Ale princip nejmenší akce je správný jen pro *konzervativní* systémy, v nichž lze všechny síly vyjádřit pomocí potenciální energie. Jistě víte, že na mikroskopické úrovni, tj. na té nejhlubší fyzikální úrovni, nekonzervativní síly neexistují. Nekonzervativní síly, jako např. tření, se objevují jen proto, že zanedbáváme mikroskopické komplikace. Bylo by totiž třeba analyzovat příliš mnoho částic. *Základní* zákony však lze vyjádřit pomocí principu nejmenší akce.

Dovolím si ještě další zobecnění. Určitě vás zajímá, co se bude dít s částicí pohybující se relativisticky. Zatím neznáme správnou relativistickou pohybovou rovnici; $F = ma$ platí jen v nerelativistickém případě. Ptáme se: „Existuje odpovídající princip nejmenší akce i v relativistickém případě?“ Existuje! V relativistickém případě platí takovýto vztah:

$$S = -m_0 c^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt - q \int_{t_1}^{t_2} [\varphi(x, y, z, t) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(x, y, z, t)] dt.$$

První část akčního integrálu je *součin klidové hmotnosti m_0 , druhé mocniny rychlosti světla c^2 a integrálu funkce rychlosti $\sqrt{1 - v^2/c^2}$* . Pak máme místo potenciální energie integrál skalárního potenciálu φ a součinu \mathbf{v} a vektorového potenciálu \mathbf{A} . Taková akční funkce dává úplnou teorii relativistického pohybu jedné částice v elektromagnetickém poli.

Všude tam, kde bylo napsáno v , musíte samozřejmě, dosadit dx/dt místo v_x a podobně i pro ostatní složky dříve, než se pustíte do počítání. Kromě toho, tam, kde bylo prostě x, y, z si musíte představit body trajektorie v čase t , tj. $x(t), y(t), z(t)$. Jen po těchto dosazeních dostaneme vlastně vyjádření akce relativistické částice. Důkaz toho, že takto vyjádřená akce opravdu dává správné pohybové rovnice teorie relativity, přenecháme těm nejšíkovnějším z vás. Chtěl bych vám však poradit, abyste nejdříve ignorovali \mathbf{A} , tj. uvažovali případ bez magnetického pole. Pak musíte dostat složky pohybové rovnice $d\mathbf{p}/dt = -q\nabla\varphi$, v níž, jak jistě víte, platí $\mathbf{p} = m\mathbf{v}/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Mnohem hůře se řeší problém, v němž vystupuje i vektorový potenciál. Variace jsou mnohem složitější. Nakonec však dostanete takové vyjádření síly, jaké má být, tj. $q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. S tím si však už musíte pohrát sami.

Chtěl bych vás upozornit na to, že v obecném případě (např. relativistickém vztahu) už akční integrál neobsahuje rozdíl kinetické a potenciální energie. To platilo jen v nerelativistickém přiblížení. Například výraz $m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}$ už není tím, co nazýváme kinetickou energií. To, jak má vypadat akce v libovolném, ale konkrétním případě, musí být určeno vlastně zkusmo. Je to úloha takového typu jako určení pohybových rovnic. Musíte si prostě pohrát se známými rovnicemi a snažit se je vyjádřit prostřednictvím nejmenší akce.

Ještě jedna terminologická poznámka. Funkci, kterou integrujeme v čase, abychom dostali akci S , nazýváme Lagrangeova funkce nebo *lagranžián* L a ten závisí pouze na rychlostech a polohách částic. Princip nejmenší akce lze tedy zapsat i ve tvaru

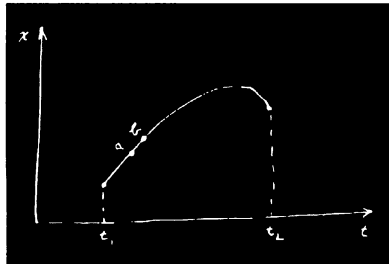
$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x, v) dt,$$

kde pod x_i a v_i rozumíme všechny složky poloh a rychlostí. Budete-li slyšet o lagranžiánu, už budete vědět, že jde o funkci, pomocí které se hledá akce. Při relativistickém pohybu v elektromagnetickém poli platí

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - q(\varphi + \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}).$$

Měl bych se zmínit o tom, že ti nejpeditičtější fyzici vlastně nenazývají veličinu S akcí. Nazývají ji „první hlavní Hamiltonova funkce“. Protiví se mi přednášet o „principu nejmenší první hlavní Hamiltonovy funkce“. Proto jsem ji nazval „akcí“. Mohu vám však prozradit, že je stále víc lidí, kteří ji také nazývají akcí. V historii fyziky sice bylo akcí nazváno něco jiného,²⁷⁾ jenže málo důležitého, a proto si myslím, že bude rozumnější změnit tuto definici. Nyní už i vy budete nazývat veličinu S akcí a nebude trvat dlouho a všichni budou tuto veličinu nazývat takovým jednoduchým jménem.

Nyní bych chtěl na toto téma říci něco podobného jako v případě principu nejkratšího času. Existuje rozdíl v samotné podstatě zákona, který říká, že určitý integrál brany z jednoho bodu do druhého má minimum (tj. říká něco o celé dráze), a zákona, který říká, že při pohybu existuje síla způsobující zrychlení. Druhý přístup hovoří o každém kroku na dráze, zatímco první přístup poskytuje integrální tvrzení o celé dráze. V případě světla jsme hovořili o spojení těchto dvou přístupů. Nyní bych vám chtěl vysvětlit, proč musí existovat diferenciální zákony, platí-li princip nejmenší akce. Příčina je v následujícím. Uvažujeme skutečně prošlou dráhu v prostoru a čase. Tak jako předtím budeme uvažovat jen jeden rozměr, a proto můžeme nakreslit graf závislosti x na t . Při skutečném pohybu má S minimum. Předpokládejme, že máme pravou křivku, která prochází bodem \underline{a} v prostoru a čase, jakož i blízkým bodem \underline{b} .



Je-li celý integrál od t_1 do t_2 minimální, pak musí být minimální i integrál na krátkém úseku z a do b . Nemůže se stát, že by integrál na úseku mezi a a b nebyl minimální. Kdyby se to totiž mělo stát, stačilo by, abyste vhodně pozměnili dráhu na tomto malém intervalu, a tím byste vlastně trochu zmenšili celý integrál.

²⁷⁾ Jako akce (nebo spíše „účinek“) se nazývala veličina s fyzikálním rozměrem energie krát čas, tedy stejným jako má námi zavedená akce S . Planckově konstantě h se proto říkalo „účinkové kvantum“. (Pozn. red.)

Každá část křivky musí tedy také představovat minimum. To musí platit pro libovolně malý úsek křivky. Proto princip říkájící, že celá křivka dává minimum, lze formulovat i tak, že infinitezimální úsek křivky také představuje křivku, na níž je akce minimální. Vybereme-li dostatečně krátký úsek křivky (mezi dvěma body a a b , které jsou velmi blízko), nezáleží už na tom, jak se mění potenciál od jednoho bodu k vzdálenějšímu bodu, neboť při průchodu po takovém krátkém úseku zůstáváte téměř na místě. Jediné, co musíte uvažovat, je změna potenciálu, která je prvního řádu malosti. Odpověď může záviset jen na derivaci potenciálu a ne na tom, jaký je potenciál v jiných místech. Proto je vlastně tvrzení o integrální vlastnosti celé křivky tvrzením o tom, co se odehrává na maličkém úseku křivky – je to tedy diferenciální výrok. A tento diferenciální výrok zahrnuje pouze derivace potenciálu, tudíž sílu v daném bodě. Takové je kvalitativní vysvětlení souvislosti mezi integrálním zákonem a diferenciálním zákonem.

V případě světla jsme si také položili otázku: „Jak částice najde správnou dráhu?“ Z diferenciálního hlediska je snadné to pochopit. V každém okamžiku získává zrychlení a ví pouze to, co má udělat právě v tom okamžiku. Váš instinkt pro příčinu a následek však bude těžko snášet tvrzení, že částice si předem zvolí právě tu křivku, která bude mít nejmenší akci. Cožpak je schopna „vycítit“, jestli sousední křivky dají či nedají větší akci? V případě světla, když jsme mu kladli do cesty překážku, aby fotony nemohly prozkoumat všechny dráhy, jsme zjistili, že fotony se nemohly rozhodnout, kterou cestou jít, a dostali jsme jev difrakce.

Platí totéž i v mechanice? Je pravda, že částice prostě nevyrazí po správné křivce, ale prohledá všechny ostatní možné trajektorie? A dostaneme analog difrakce, postavíme-li jí překážku a znemožníme jí takové prohledání? Nejpodivuhodnější na tom je právě to, že se to skutečně děje. Říkájí to zákony kvantové mechaniky. Náš princip nejmenší akce je tedy neúplně formulován. Nespočívá v tom, že se částice pohybuje po křivce s nejmenší akcí, ale v tom, že „očíhá“ všechny křivky v sousedství a vybere si tu, která má nejmenší akci, a to podobným způsobem, jak si světlo vybíralo nejkratší čas. Vzpomeňte si, jakým způsobem se to dělo: Kdyby postupovalo po trajektorii, která vyžaduje jiný čas, došlo by s jinou fází. Výsledná amplituda v nějakém bodě je součtem příspěvků amplitud všech různých cest, kterými světlo může do tohoto bodu přijít. Všechny cesty, které dávají rozdílné fáze, nedají po sčítání nic. Kdybyste však mohli najít celou posloupnost cest, které mají téměř stejné fáze, malé příspěvky by se sčítaly a dostali byste značnou hodnotu celkové amplitudy pro příchod částice do daného bodu. Důležitou cestou se stane ta, pro kterou existuje mnoho sousedních cest dávajících tutéž fázi.

Právě to se stává v kvantové mechanice. Úplná kvantová mechanika (nerelativistická a zanedbávající spin) pracuje takto: Pravděpodobnost, že částice vycházející z bodu 1 v čase t_1 dojde do bodu 2 v čase t_2 , je rovna druhé mocnině amplitudy pravděpodobnosti. Celkovou amplitudu lze vyjádřit jako součet amplitud všech možných cest – pro každý způsob příchodu. Pro každé $x(t)$, které bychom mohli mít (pro každou myslitelnou trajektorii), musíme vypočítat amplitudu. Pak všechny sečteme. Co máme považovat za amplitudu pravděpodobnosti nějaké trajektorie? Náš akční integrál nám řekne, jaká má být amplituda jednotlivé trajektorie. Amplituda je úměrná součinu nějaké konstanty a výrazu $e^{iS/\hbar}$, kde S je akce trajektorie. Vyjádříme-li tedy fázi amplitudy ve tvaru komplexního čísla, bude fázový úhel S/\hbar . Akce S má rozměr energie krát čas a Planckova konstanta \hbar má tentýž rozměr. Je to konstanta, která určuje, kdy musíme přejít ke kvantové mechanice.

Provádí se to následujícím způsobem. Předpokládejme, že pro všechny křivky je S velmi velké ve srovnání s \hbar . Jedna křivka přispívá určitou amplitudou. Fáze blízko položené křivky je docela jiná; pro velmi velké S znamená i malá změna S úplně jinou fázi, neboť \hbar je nesmírně malé. Při sčítání se proto obvykle vyruší příspěvky blízko ležících křivek – kromě jediné oblasti, a to té, jejíž

sousední křivky dávají v první aproximaci stejné fáze (přesněji řečeno stejné akce v rozmezí \hbar). Jen takové křivky budou důležité. Potom v limitním případě, kdy se Planckova konstanta \hbar blíží nule, lze správné kvantověmechanické zákony shrnout do jednoduchého tvrzení: „Zapomeňte na všechny amplitudy pravděpodobnosti. Částice se bude pohybovat po speciální trajektorii – po takové, na níž se v první přiblížení nebude měnit S .“ Tak souvisí princip nejmenší akce s kvantovou mechanikou. Skutečnost, že kvantovou mechaniku lze formulovat takovým způsobem, objevil roku 1942 jeden student téhož učitele Badera, o němž jsem už hovořil. [Kvantová mechanika byla původně formulována zadáním diferenciální rovnice pro amplitudu (Schrödinger) a také pomocí maticové matematiky (Heisenberg).]

Nyní bych vám chtěl říci něco o jiných minimálních principech ve fyzice. Existuje mnoho zajímavých principů tohoto druhu. Nebudu je nyní všechny vyjmenovávat, ale popíšu jen jeden z nich. Později, až se dostaneme k nějakému fyzikálnímu jevu, který souvisí s pěkným principem minima, upozorním vás na to. Chtěl bych ukázat, že elektrostatiku lze popsat ne zadáním diferenciální rovnice pro pole, ale požadováním maxima nebo minima určitého integrálu. Nejdříve budeme uvažovat případ, kdy známe všude hustotu náboje a chceme najít potenciál φ v libovolném místě prostoru. Už víte, že odpověď na tuto otázku dostaneme řešením rovnice

$$\nabla^2 \varphi = -\rho / \epsilon_0.$$

Totéž však lze vyjádřit i jiným způsobem: Je třeba vypočítat integrál W^* , který má tvar

$$W^* = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla \varphi)^2 dV - \int \varphi \rho dV$$

a který představuje objemový integrál přes celý prostor. Tento výraz je minimální při správném rozložení potenciálu $\varphi(x, y, z)$.

Je možné ukázat, že tato dvě tvrzení o elektrostatice jsou ekvivalentní. Předpokládejme, že jsme vybrali nějakou funkci φ . Chceme ukázat, že když za φ vezmeme pravý potenciál $\underline{\varphi}$ a přidáme malou odchylku f , bude v prvním přiblížení změna W^* nulová. Vyjádříme tedy φ ve tvaru

$$\varphi = \underline{\varphi} + f.$$

Veličinu $\underline{\varphi}$ vlastně hledáme, ale variujeme ji, abychom zjistili, jaká má tato veličina být, aby variace W^* byla v prvním přiblížení nulová. V prvním členu W^* potřebujeme znát výraz

$$(\nabla \varphi)^2 = (\nabla \underline{\varphi})^2 + 2 \nabla \underline{\varphi} \cdot \nabla f + (\nabla f)^2.$$

Jediným členem prvního řádu, který se bude měnit, je člen

$$2 \nabla \underline{\varphi} \cdot \nabla f.$$

V druhém členu veličiny W^* má podintegrální výraz tvar

$$\varphi \rho = \underline{\varphi} \rho + \rho f$$

a jeho proměnnou částí je ϱf . Ponecháme-li jen proměnné části, budeme mít integrál

$$\Delta W^* = \int (\varepsilon_0 \nabla \varphi \cdot \nabla f - \varrho f) dV.$$

Dále podle starého obecného pravidla musíme zbavit tu zapeklitou věc všech derivací f . Podívejme se, jaké jsou to derivace. Skalární součin je roven

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z}$$

a musíme jej integrovat podle x, y, z . A nyní přijde ten trik: abychom se zbavili $\partial f / \partial x$, budeme integrovat per partes podle x . To povede k přenesení derivace na φ . Je to tatáž myšlenka, jaké jsme využívali, když jsme se chtěli zbavit derivací podle t . Využijeme rovnosti

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} dx = f \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \int f \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx.$$

Integrovaný člen bude nulový, neboť v nekonečnu musí být f nulové. (To odpovídá nulovému η v t_1 a t_2 . Proto by měl být náš princip přesněji formulován takto: W^* je pro pravé φ menší než pro jakékoliv jiné $\varphi(x, y, z)$, které má v nekonečnu stejné hodnoty.) Potom uděláme totéž pro y a pro z . Náš integrál ΔW^* pak získá tvar

$$\Delta W^* = \int (-\varepsilon_0 \nabla^2 \varphi - \varrho) f dV.$$

Aby tato variace byla nulová při libovolném f , musí být nulový koeficient při f a tak dostaneme

$$\nabla^2 \varphi = -\varrho / \varepsilon_0.$$

Vrátili jsme se tedy k naší staré rovnici. Náš návrh „minima“ je proto správný.

Naše tvrzení můžeme zobecnit, pozměníme-li trochu tento princip. Vraťme se zpět a integrujme per partes, ale nerozepisujeme výsledek na složky. Začneme tím, že si napíšeme následující rovnost

$$\nabla \cdot (f \nabla \varphi) = \nabla f \cdot \nabla \varphi + f \nabla^2 \varphi.$$

Derivování levé strany snadno ukážeme, že levá strana je rovna pravé. Tuto rovnost můžeme použít k integraci per partes. V našem integrálu ΔW^* nahradíme $-\nabla \varphi \cdot \nabla f$ výrazem $f \nabla^2 \varphi - \nabla \cdot (f \nabla \varphi)$ a pak jej integrujeme přes objem. Člen obsahující divergenci lze po integraci přes objem nahradit plošným integrálem

$$\int \nabla \cdot (f \nabla \varphi) dV = \int f \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} dS.$$

Integrujeme-li přes celý prostor, bude povrch, po němž integrujeme, v nekonečnu. Tam je však f nulová, a proto dostaneme stejný výsledek jako předtím.

Nyní však už vidíme, jak řešit tento problém, když *nevíme*, kde jsou všechny náboje. Předpokládejme, že náboje jsou nějakým způsobem rozloženy na vodičích. I v tomto případě můžeme použít náš princip minima, jsou-li potenciály vodičů pevně dány. Integrál W^* bereme v prostoru mimo vodiče. Protože na vodičích nemůžeme měnit $\underline{\varphi}$, bude na jejich povrchu $f=0$ a plošný integrál

$$\int f \nabla \underline{\varphi} \cdot \underline{n} dS$$

bude opět nulový. Zbývající objemový integrál

$$\Delta W^* = \int (-\varepsilon_0 \nabla^2 \underline{\varphi} - \rho) f dV$$

je třeba počítat pouze v prostoru mezi vodiči. Tak, samozřejmě, opět dostaneme Poissonovu rovnici

$$\nabla^2 \underline{\varphi} = -\rho / \varepsilon_0.$$

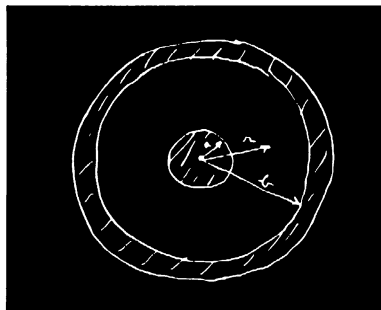
Dokázali jsme, že náš původní integrál W^* bude nulový i tehdy, když jej počítáme v prostoru mezi vodiči, které mají pevně dané potenciály (tj. každá zkušební funkce $\varphi(x, y, z)$ musí být rovna danému potenciálu vodiče, představuje-li x, y, z bod povrchu vodiče).

Existuje zajímavý případ, kdy náboje jsou rozloženy pouze na vodičích. Potom

$$\Delta W^* = \frac{\varepsilon_0}{2} \int (\nabla \varphi)^2 dV.$$

Náš princip minima říká, že pro vodiče s pevně danými potenciály se potenciál mezi nimi ustálí tak, aby integrál W^* byl minimální. Co představuje tento integrál? Protože výraz $\nabla \varphi$ představuje intenzitu elektrického pole, bude integrál vyjadřovat elektrostatickou energii. Pravým polem je to, které má ze všech polí vyjádřených jako gradient potenciálu nejmenší celkovou energii.

Abych vám ukázal, že jsou to docela praktické věci, použijeme tento výsledek k výpočtu speciální úlohy. Předpokládejme, že máme dva vodiče ve tvaru válcového kondenzátoru.



Vnitřní vodič má potenciál U a vnější má nulový potenciál. Nechť je poloměr vnitřního vodiče a a poloměr vnějšího vodiče b . Můžeme předpokládat *libovolné* rozložení potenciálu mezi vodiči. Použijeme-li *správné* φ a vypočteme $(\epsilon_0/2) \int (\nabla\varphi)^2 dV$, měli bychom dostat energii systému

$1/2 CU^2$. Tak můžeme pomocí našeho principu počítat i C . Zvolíme-li však špatné rozložení potenciálu a budeme počítat kapacitu C tímto způsobem, dostaneme příliš velkou kapacitu při daném U . Každý předpokládaný potenciál φ , který není správným potenciálem, dá falešnou hodnotu C , jež je větší než správná hodnota. I když falešné φ bude jen hrubým přiblížením, bude C dobrým přiblížením, neboť chyba v C je druhého řádu chyby ve φ .

Předpokládejme, že neznáme kapacitu válcového kondenzátoru. Pak můžeme využít tohoto principu k jejímu určení. Budeme zkoušet různé funkce φ v úloze potenciálu, dokud nedostaneme nejmenší hodnotu pro C . Předpokládejme, že zvolíme potenciál odpovídající konstantnímu poli. (Vy samozřejmě víte, že pole tu není konstantní, ale mění se jako $1/r$.) Konstantnímu poli odpovídá potenciál, jenž se mění se vzdáleností lineárně. Abychom vyhověli podmínkám, které vyžadují naše dva vodiče, musí platit

$$\varphi = U \left(1 - \frac{r-a}{b-a} \right).$$

Tato funkce obsahuje hodnotu U pro $r=a$, a hodnotu nula pro $r=b$ a mezi těmito body má konstantní sklon, který je roven $-U/(b-a)$. K tomu, abychom našli integrál W^* , stačí násobit druhou mocninou tohoto gradientu $\epsilon_0/2$ a integrovat přes celý objem. Tento výpočet provedeme pro válec jednotkové délky. Objemový element při poloměru r je roven $2\pi r dr$. Provedeme-li integraci, najdeme pro kapacitu v prvním odhadu tento výraz

$$\frac{1}{2} CU^2 \text{ (první odhad) } = \frac{\epsilon_0}{2} \int_a^b \frac{U^2}{(b-a)^2} 2\pi r dr.$$

Není těžké vypočítat tento integrál; je prostě roven

$$\pi U^2 \left(\frac{b+a}{b-a} \right).$$

Tak bychom dostali vyjádření kapacity, které sice není správné, ale je už určitým přiblížením:

$$\frac{C}{2\pi\epsilon_0} = \frac{b+a}{2(b-a)}.$$

Tento výraz se liší od správného výrazu $C=2\pi\epsilon_0/\ln(b/a)$, ale rozdíl není příliš velký. Porovnejme takto získané výpočty se správnými hodnotami pro několik hodnot poloměru b/a . Vypočtené hodnoty jsou sestaveny do tabulky:

$\frac{b}{a}$	$\frac{C(\text{správně})}{2\pi\epsilon_0}$	$\frac{C(\text{první aprox.})}{2\pi\epsilon_0}$
2	1,4423	1,500
4	0,721	0,833
10	0,434	0,612
100	0,267	0,51
1,5	2,4662	2,50
1,1	10,492070	10,500000

Dokonce i tehdy, kdy b/a je už tak velké, že dosahuje hodnoty 2 (a tehdy se už pole značně liší od lineárního se měnícího pole), dostáváme docela dobré přiblížení. Výsledkem je, samozřejmě, trochu vyšší hodnota, ale to jsme čekali. Situace se však podstatně zhorší, budeme-li mít tenký drát uvnitř velkého válce. Pak se bude pole silně měnit a při jeho nahrazení konstantním polem se dopouštíme velké chyby. Při $b/a = 100$ dostáváme téměř dvojnásobek správné hodnoty. Pro malé hodnoty poloměru b/a se situace výrazně zlepší. Vezmeme-li opačný extrém, kdy vodiče nejsou daleko od sebe, např. $b/a = 1,1$, je konstantní pole docela dobrým přiblížením a dostaneme hodnotu C , která se od správné hodnoty liší méně než o desetinu procenta.

Ted' bych vám chtěl říci, jak můžeme náš výpočet vylepšit. (Vy, samozřejmě, znáte řešení pro válec, ale stejnou metodu můžete použít i pro jiné nepravidelné tvary, kdy správnou odpověď neznáme.) Dalším krokem bude hledání lepšího přiblížení k neznámému správnému potenciálu φ . Můžeme např. zkusit součet konstanty a exponenciály φ atd. Jak ale poznáme, že máme lepší přiblížení, neznáme-li správné φ ? Odpověď je následující: Vypočtete C a nejmenší hodnota C je tou hodnotou, která je nejbližší k pravdě. Vyzkoušejme tuto myšlenku. Předpokládejme, že potenciál není lineární, ale kvadratický v r , tj. že elektrické pole není konstantní, ale lineární. *Nejobecnější* kvadratickou formou, která vyhovuje podmínkám $\varphi = 0$ pro $r = b$ a $\varphi = U$ pro $r = a$ je

$$\varphi = U \left[1 + \alpha \left(\frac{r-a}{b-a} \right) - (1 + \alpha) \left(\frac{r-a}{b-a} \right)^2 \right],$$

kde α je nějaká konstanta. Tento výraz je už trochu složitější. Kromě lineárního členu obsahuje i druhou mocninu. Z tohoto výrazu se však pole určí snadno. Dostáváme pro něj vyjádření

$$E = -\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{\alpha U}{b-a} + 2(1 + \alpha) \frac{(r-a) U}{(b-a)^2}.$$

Nyní to musíme umocnit a integrovat přes objem. Ale okamžik! Co je třeba brát jako α ? Za φ můžeme vzít parabolou; jenže jakou parabolou? A víte co uděláme? Vypočítáme kapacitu při *libovolném* α . Dostaneme

$$\frac{C}{2\pi\epsilon_0} = \frac{a}{b-a} \left[\frac{b}{a} \left(\frac{\alpha^2}{6} + \frac{2\alpha}{3} + 1 \right) + \frac{1}{6} \alpha^2 + \frac{1}{3} \right].$$

Vypadá to trochu složitě, ale to proto, že jsme integrovali druhou mocninu pole. Teď můžeme zvolit α . Víím, že pravá hodnota C se nachází někde pod kteroukoliv z vypočtených hodnot, a tak nechť za α dosadím cokoliv, vždy dostanu řešení, které bude příliš velké. Pohraji-li si s tím α , dostanu jednou nejmenší možnou hodnotu, tu, která je ze všech jiných hodnot nejbližší k pravdě. V dalším postupu tedy vyberu to α , které dává nejmenší hodnotu C . Použijeme-li obyčejný diferenciální počet, zjistíme, že minimum C se vyskytuje při $\alpha = -2b/(b+a)$. Po dosazení této hodnoty do odvozeného vztahu dostanu pro minimum kapacity výraz

$$\frac{C}{2\pi\epsilon_0} = \frac{b^2 + 4ab + a^2}{3(b^2 - a^2)}.$$

Vypočítal jsem, jaké hodnoty C tento výraz dává při různých hodnotách poměru b/a a sestavil jsem je do tabulky. Budu nazývat tyto hodnoty C (kvadratické). V tabulce jsou porovnány se správnými hodnotami C (správné):

$\frac{b}{a}$	$\frac{C(\text{správné})}{2\pi\epsilon_0}$	$\frac{C(\text{kvadratické})}{2\pi\epsilon_0}$
2	1,4423	1,444
4	0,721	0,733
10	0,434	0,475
100	0,267	0,346
1,5	2,4662	2,4667
1,1	10,492070	10,492065

Je-li poměr poloměrů např. 2 ku 1, máme 1,444, což je velmi dobré přiblížení ke správné hodnotě 1,4423. Dokonce i pro větší hodnoty b/a dostáváme docela dobrý výsledek – mnohem, mnohem lepší než v prvním přiblížení. I když je poměr b/a 10 ku 1, máme dost dobrý výsledek – od správné hodnoty se liší pouze o 10 procent. Dosáhne-li však poměr hodnoty 100 ku 1, začne se situace rychle zhoršovat. Pro C dostaneme hodnotu 0,346 místo správné hodnoty 0,267. Na druhé straně pro poměr poloměrů 1,5 dostaneme vynikající shodu a pro $b/a = 1,1$ dostáváme hodnotu 10,492065, přičemž přesná hodnota je 10,492070. Tam, kde lze očekávat dobrou shodu, je skutečně velmi, velmi dobrá.

Tyto příklady jsem uvedl především proto, abych poukázal na teoretický význam principu nejmenší akce a minimalizačních principů obecně. Příklady jsem však chtěl ukázat i praktickou užitečnost těchto principů, abyste viděli, že jsou vhodné nejen pro výpočet kapacity, kterou už vlastně známe. Pro libovolné tvary vodičů můžete odhadnout přibližné pole, vyjádřit jej pomocí několika neznámých parametrů podobných již zmíněnému α a pak je přizpůsobit tak, abyste dostali minimum. Tak získáte výborné numerické výsledky v úlohách, které jinak řešit nelze.

DODATEČNÁ POZNÁMKA

Ještě bych chtěl připomenout něco, nač mi už nezbyl čas na přednášce. (Vždy se mi stává, že jsem připraven přednášet víc, než mi čas dovolí.) Jak už jsem zmínil, po dobu přípravy na tuto přednášku jsem narazil na nový problém. Nyní vám povím, v čem tento problém spočívá. Ze všech minimalizačních problémů, na které si vzpomínám, většina tak či onak vychází z principu nejmenší akce mechaniky a elektrodynamiky. Existuje však i třída docela jiných principů. Jako příklad uvedu ten, který říká, že při prouděch tekoucích vodičem a vyhovujících Ohmovu zákonu se proudy rozloží ve vodiči tak, aby vznikalo co nejmenší teplo. Lze také říci (jde-li o izotermický proces), že rychlost uvolňování energie je minimální. Podle klasické teorie tento princip platí i při určování rozdělení elektronů podle rychlostí, jde-li o vodivostní elektrony kovu. Rozdělení elektronů není úplně rovnovážné. (viz rovnice (40.6), 1. díl), neboť elektrony jsou unášeny do stran. Nové rozdělení lze najít z principu, který říká, že při daném proudu je rozdělení takové, aby byla entropie vznikající v důsledku srážek za sekundu co nejmenší. Správný popis chování elektronů však musí být kvantově mechanický. Proto vzniká otázka: „Platí tento princip minimální generace entropie i v situaci, která vyžaduje kvantově mechanický popis?“ To se mi zatím nepodařilo zjistit.

Je to především akademická otázka. Takové principy fascinují a vždy stojí za to poznat, do jaké míry jsou obecné. Jenže já bych *chtěl* znát odpověď na tuto otázku i z mnohem praktičtějšího hlediska. Jednou jsme se spolupracovníky uveřejnili článek, v němž byl přibližný kvantověmechanický výpočet elektrického odporu, který pociťuje elektron pohybující se iontovým krystalem, jako je např. NaCl. (Feynman, Hellworth, Iddings a Platzman: Pohyblivost pomalých elektronů v polárním krystalu. *Phys. Rev.* 127, (1962)1004.) Kdyby však existoval princip minima, mohli bychom jej použít pro mnohem přesnější výpočet, právě tak jak nám princip minima dovolil v případě kapacity kondenzátoru dosáhnout vysoké přesnosti i při nedostatečné znalosti elektrického pole.

20 Řešení

Maxwellových rovnic ve volném prostoru

20.1 VLNY VE VOLNÉM PROSTORU. ROVINNÉ VLNY

20.2 TROJROZMĚRNÉ VLNY

20.3 VĚDECKÁ OBRAZOTVORNOST

20.4 KULOVÉ VLNY

20.1 VLNY VE VOLNÉM PROSTORU. ROVINNÉ VLNY

Přečtěte si znovu: kapitolu 47, díl 1., Zvuk. Vlnová rovnice
kapitolu 28, díl 1., Elektromagnetické záření

V kapitole 18 jsme se dostali k Maxwellovým rovnicím v úplném tvaru. Vše, co je možné se dozvědět o klasické teorii elektrických a magnetických polí, lze odvodit z těchto čtyř rovnic:

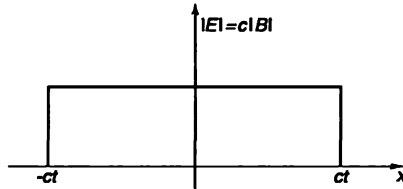
$$\begin{aligned} \text{I. } \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{II. } \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{III. } \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \text{IV. } c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (20.1)$$

Zkombinujeme-li všechny tyto rovnice, objeví se pozoruhodný jev: pole generovaná pohybujícími se náboji mohou opustit své zdroje a sama putovat prostorem. Uvažovali jsme speciální příklad, v němž náhle vznikl proud v nekonečném listu. Poté, co proud trval dobu t , bylo vytvořeno homogenní elektrické pole, stejně jako homogenní magnetické pole a obě se šířila do vzdálenosti ct od zdroje. Předpokládejme, že list s proudem leží v rovině yz vztažené soustavy a má plošnou proudovou hustotu \mathbf{j} ve směru kladné osy y . Elektrické pole pak bude mít pouze y -ovou složku a magnetické pole pouze z -ovou složku. Velikosti obou složek vyjadřuje tento vztah:

$$E_y = cB_z = -\frac{J}{2\epsilon_0 c} \quad (20.2)$$

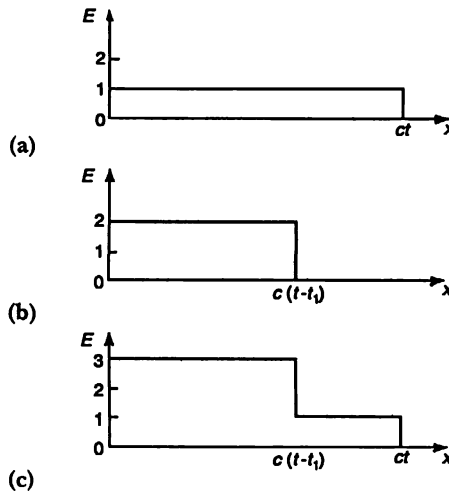
pro kladné hodnoty x menší než ct . Při větších x jsou pole rovna nule. Přirozeně, podobná pole se rozšířila do téže vzdálenosti od listu s proudem i ve směru záporné osy x . Na obr. 20.1 vidíme graf velikosti polí jako funkce x v okamžiku t . S postupem času se „čelo vlny“, které se v čase t nachází v polohách $x = ct$, pohybuje konstantní rychlostí c k větším absolutním hodnotám x .

Nyní uvažujme následující posloupnost událostí. Zapneme na chvíli proud jednotkové velikosti, pak velikost proudu náhle zvětšíme na tři jednotky a udržujeme ji stále na této hodnotě.



Obr. 20.1 Elektrické a magnetické pole jako funkce x v čase t po tom, když začal téci proud.

Jak budou vypadat pole v tomto případě? Můžeme to zjistit takto: Nejdříve si představíme jen proud o jednotkové velikosti, který byl spuštěn v čase $t = 0$ a dále byl ponechán beze změny. Pole pro kladné x jsou v tomto případě graficky znázorněna v části a) obrázku 20.2. Dále se ptáme, co se stane, zapneme-li v čase t_1 ještě stálý proud o velikosti dvě jednotky.

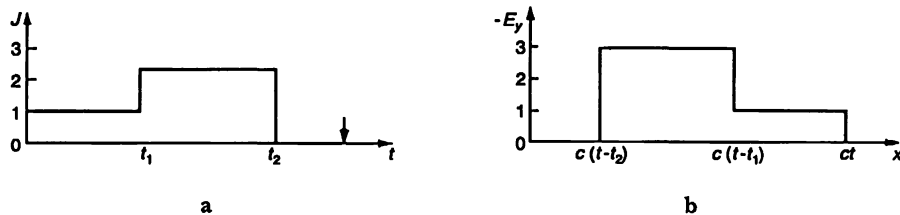


Obr. 20.2 Elektrické pole listu s proudem: a) proud velikosti jedné proudové jednotky byl spuštěn v okamžiku $t = 0$; b) proud velikosti dvou proudových jednotek byl spuštěn v okamžiku $t = t_1$; c) superpozice případů a) a b)

V tomto případě budou pole dvakrát větší než předtím, ale rozšíří se ve směru osy x pouze do vzdálenosti $c(t - t_1)$, což ukazuje část b) našeho obrázku. Když na základě principu superpozice tato dvě řešení sečteme, dostaneme výsledek, že součet obou zdrojů je roven proudu o jedné

jednotce v čase od $t=0$ do $t=t_1$ a proudů o velikosti tři jednotky pro čas t větší než čas t_1 . V okamžiku t se budou pole měnit s x tak, jak to ukazuje část c) obrázku 20.2.

Nyní si vezměme složitější úlohu. Zkoumejme proud, který měl chvíli velikost jedné jednotky, pak vzrostl na tři jednotky a později klesl na nulu. Jaká pole vytvoří takovýto proud? Řešení můžeme najít tímž způsobem – sečtením řešení tří oddělených úloh. Nejdříve najdeme pole stupňovitého proudu s jednotkovou velikostí. (Tuto úlohu jsme již vyřešili.) Dále najdeme pole vytvářená stupňovitým proudem s velikostí dvě jednotky. Poté řešíme pole stupňovitého proudu s intenzitou minus tři jednotky. Když tato tři řešení sečteme, dostaneme proud, jehož velikost je od $t=0$ do nějakého pozdějšího času, řekněme t_1 , rovna jedné jednotce, pak až do ještě pozdějšího okamžiku t_2 třem jednotkám a nakonec je proud vypnut, to znamená, že dále je roven nule. Graf proudu jako funkci času ukazuje obr. 20.3 a. Sečteme-li všechna tři řešení pro elektrické pole, zjistíme, že jeho závislost od x v nějakém daném okamžiku t je znázorněna grafem na obr. 20.3 b. Pole je přesným obrazem proudu. Rozdělení pole v prostoru je vlastně krásným grafem závislosti proudu na čase – pouze narysovaným odzadu. V čase se celý graf pohybuje rychlostí c . Vznikla jakási malá hrudka pole, pohybující se ve směru kladné osy x , která obsahuje úplně podrobnou informaci o historii všech proudových změn. Kdybychom stáli na místě daleko, mohli bychom ze změny elektrického nebo magnetického pole přesně rozpoznat, jak se proud ve zdroji měnil.



Obr. 20.3 Mění-li se intenzita proudu takovým způsobem, jaký udává graf a), průběh elektrického pole v závislosti na x v okamžiku t vyznačeném šipkou znázorňuje graf b).

Všimněte si také, že i když se celá činnost ve zdroji už dávno zastavila a všechny náboje a proudy jsou rovny nule, pokračuje blok pole nadále ve svém putování prostorem. Dostali jsme takové rozdělení elektrického a magnetického pole, které existuje nezávisle na jakýchkoliv nábojích nebo proudcích. To je nový jev, který vyplývá z úplné soustavy Maxwellových rovnic. Je-li třeba, můžeme právě provedený rozbor kompletně vyjádřit i matematicky: napíšeme, že elektrické pole v daném místě a daném čase je přímo úměrné proudu ve zdroji, avšak ne v témže čase t , ale v pozdějším čase $t - x/c$. Můžeme tedy napsat

$$E_y(t) = -\frac{J(t - x/c)}{2\epsilon_0 c}. \quad (20.3)$$

Stejný vztah jsme už odvodili, věřte tomu nebo ne, z jiného hlediska v 1. díle, když jsme se zabývali teorií indexu lomu. Tentokrát jsme zjišťovali, jaká pole vytváří tenká vrstva oscilujících dipólů nacházejících se v desce z dielektrické látky, uvádě-li dipóly do pohybu elektrické pole dopadající elektromagnetické vlny. Naš úlohou bylo vypočítat, jak vypadají složená pole původní vlny a vln oscilujících dipólů. Jak jsme však mohli počítat pole generovaná pohybujícími se náboji, když jsme

ještě neměli Maxwellovy rovnice? Tehdy jsme vzali jako východisko (bez jakéhokoliv odvozování) vzorec pro pole záření vytvářené ve velkých vzdálenostech od zrychleně se pohybujícího bodového náboje. Podíváte-li se do kapitoly 31 v I. dílu, přesvědčíte se, že vztah (31.17) je přesně tentýž jako vztah (20.3), který jsme právě napsali. Ačkoliv naše dřívější odvození platilo jen pro velké vzdálenosti od zdroje, nyní vidíme, že tentýž výsledek zůstává správný i v těsné blízkosti zdroje.

Nyní se chceme obecně podívat na vlastnosti elektrických a magnetických polí ve vakuu, a to v oblastech vzdálených od zdrojů, tj. od proudů i nábojů. Velmi blízko u zdrojů (tak blízko, aby po dobu zpoždění v přenosu neměl zdroj dost času na větší změnu) se pole velmi podobají těm, která jsme našli v elektromagnetických nebo magnetických případech. Vzdálíme-li se však dostatečně daleko, aby zpoždění byla významná, povaha polí se může od nalezených řešení radikálně lišit. V podstatě, když se pole vzdálila daleko od zdrojů, začínají získávat samostatný charakter. Proto jsme oprávněni začít hovořit o vlastnostech polí v oblasti, kde nejsou žádné proudy nebo náboje.

Ptáme se, jaká pole mohou existovat v oblastech, kde jak ρ , tak i \mathbf{j} jsou rovna nule. V kapitole 18 jsme viděli, že fyziku Maxwellových rovnic by bylo možné vyjádřit i pomocí diferenciálních rovnic pro skalární a vektorové potenciály:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (20.4)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (20.5)$$

Jsou-li ρ a \mathbf{j} rovna nule, získávají tyto rovnice jednodušší tvar:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (20.6)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (20.7)$$

Ve vakuu tedy skalární potenciál φ , jakož i každá složka vektorového potenciálu \mathbf{A} , vyhovují téže matematické rovnici. Budeme psát ψ (psi) místo kterékoliv z těchto čtyř veličin: φ , A_x , A_y , A_z . Potřebujeme tedy prozkoumat obecná řešení následující rovnice:

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (20.8)$$

Tato rovnice se nazývá trojrozměrná vlnová rovnice (trojrozměrná proto, že funkce ψ může obecně záviset na x , y a z a musíme se zabývat změnou každé z těchto souřadnic). Toto se ihned ozřejmí, vypíšeme-li explicitně všechny tři členy Laplaceova operátoru ∇^2 :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (20.9)$$

Ve vakuu splňují vlnovou rovnici i pole E a B . Například protože $B = \nabla \times A$, diferenciální rovnici pro B můžeme dostat použitím operátoru rotace na rovnici (20.7). Laplaceův operátor je skalárním operátorem, proto je možné vzájemně zaměnit pořadí Laplaceova operátoru a operátoru rotace:

$$\nabla \times (\nabla^2 A) = \nabla^2 (\nabla \times A) = \nabla^2 B.$$

Podobně lze zaměnit i pořadí operátorů rotace a časové derivace $\partial/\partial t$:

$$\nabla \times \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \times A) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}.$$

Použitím těchto výsledků dostaneme následující diferenciální rovnici pro B :

$$\nabla^2 B - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0. \quad (20.10)$$

Každá složka magnetického pole B tedy splňuje trojrozměrnou vlnovou rovnici. Podobně použitím vztahu $E = -\nabla\varphi - \partial A/\partial t$ vyplyne, že i elektrické pole E ve vakuu splňuje rovnici:

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \quad (20.11)$$

Všechna naše elektromagnetická pole vyhovují tedy téže jedné rovnici (20.8). Bylo by možné se zeptat: Co je nejobecnějším řešením této rovnice? Avšak místo toho, abychom se hned vydali hledat odpověď na tuto obtížnou otázku, se nejdříve podíváme, co lze obecně říci o těch řešeních, v nichž se podle y a z nic nemění. (Vždy se pusťte nejdříve do lehkého příkladu, abyste měli možnost pochopit, o co vůbec jde, a pak můžete přejít k případům složitějším.) Předpokládejme tedy, že velikosti polí závisí jen na x , tj. že s y a z se pole nemění. Uvažujme tedy opět rovinné vlny. Můžeme očekávat, že dostaneme nějaké podobné výsledky jako dříve. Opravdu, najdeme přesně tytéž výsledky. Můžete se ptát: „Proč se to tedy dělá všechno znovu?“ Udělat to znovu je důležité, za prvé proto, že jsme neukázali, že námi nalezené vlny představují nejobecnější řešení pro rovinné vlny a za druhé proto, že pole jsme našli pouze na základě velmi zvláštního druhu zdroje s proudem. Nyní bychom si rádi položili otázku: „Jak vypadá nejobecnější druh jednorozměrného vlnění, které může existovat ve vakuu?“ Nelze se to zjistit tak, že budeme zkoumat, co se děje v případě toho nebo onoho konkrétního zdroje, ale musíme pracovat obecněji. Kromě toho budeme tentokrát pracovat s diferenciálními rovnicemi místo integrálních tvarů. I když dostaneme stejné výsledky, jde o to, abychom se trochu procvičili a přesvědčili se, že nezáleží na tom, kterou cestou vlastně jdeme. Měli byste umět postupovat jakýmkoliv způsobem, neboť dostanete-li těžký problém, často zjistíte, že ho lze zvládnout pouze jedním z rozmanitých způsobů.

Mohli bychom zkoumat přímo řešení vlnové rovnice pro některou elektromagnetickou veličinu. Místo toho však chceme vyjít ze samotného začátku, tj. z Maxwellových rovnic pro vakuum, abyste měli možnost vidět jejich těsnou souvislost s elektromagnetickými vlnami. Začneme tedy s rovnicemi (20.1), v nichž položíme náboje a proudy rovny nule. Rovnice pak získají tento tvar:

$$\begin{aligned}
 \text{I.} \quad & \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\
 \text{II.} \quad & \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
 \text{III.} \quad & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\
 \text{IV.} \quad & c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.
 \end{aligned} \tag{20.12}$$

Vypíšeme první rovnici ve složkách:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \tag{20.13}$$

Předpokládáme, že podle y a z žádné změny nenastávají, takže poslední dva členy jsou rovny nule. Proto podle této rovnice

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0. \tag{20.14}$$

Jejm řešením je v prostoru konstantní E_x – složka elektrického pole ve směru osy x . Všimnete-li si rovnice IV v (20.12), přičemž předpokládáte, že podle y a podle z žádným změnám \mathbf{B} nedochází, vidíte, že E_x je konstantní i v čase. Takovým polem by mohlo být ustálené pole vytvářené elektrodami nějakého velmi vzdáleného nabitého kondenzátoru. Nyní se však o takové nezájímavé statické pole nestaráme; zajímají nás jen dynamicky proměnná pole. A v *dynamických* polích je $E_x = 0$.

Dostali jsme tak důležitý výsledek, že při šíření rovinných vln v libovolném směru *musí být elektrické pole kolmé na směr šíření*. Přitom se ovšem může ještě všelijak složitě měnit se souřadnicí x .

Příčné pole \mathbf{E} lze vždy rozložit na dvě složky, řekněme na y -ovou a na z -ovou. Proto probereme především případ, kdy má elektrické pole jen jednu příčnou složku. Budeme zkoumat nejdříve elektrické pole, které má vždy směr osy y , a tedy nulovou z -ovou složku. Zřejmě, rozšíříme-li tuto úlohu, můžeme vždy vyřešit i případ, kdy elektrické pole leží vždy ve směru osy z . Obecné řešení lze pak vyjádřit jako superpozice těchto dvou polí.

Jak jednoduché jsou nyní naše rovnice! Jedinou nenulovou složkou elektrického pole je E_y , a všechny derivace – s výjimkou těch, které jsou podle x – jsou rovny nule. Ostatní Maxwellovy rovnice se tím podstatně zjednodušují.

Všimněte si dále druhé z Maxwellových rovnic (II v (20.12)). Vypíšeme-li složky rot \mathbf{E} , dostaneme

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times \mathbf{E})_x &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \\
 (\nabla \times \mathbf{E})_y &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0 \\
 (\nabla \times \mathbf{E})_z &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}.
 \end{aligned}$$

x -ová složka vektoru $(\nabla \times \mathbf{E})$ je rovna nule, neboť jsou rovny nule derivace podle y i podle z . Složka y -ová je také rovna nule: první člen je roven nule, neboť derivace podle z je rovna nule, a druhý člen je roven nule, neboť E_z je rovno nule. Jedinou nenulovou složkou vektoru $\text{rot } \mathbf{E}$ je z -ová složka, která je rovna $\partial E_y / \partial x$. Položíme-li tyto tři složky $\nabla \times \mathbf{E}$ položíme rovny příslušným složkám vektoru $-\partial \mathbf{B} / \partial t$, můžeme udělat následující závěry:

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0 \quad (20.15)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}. \quad (20.16)$$

Protože x -ová, jakož i y -ová složka magnetického pole, mají nulové derivace podle času, představují obě tyto složky pouze konstantní pole a odpovídají magnetostatickým řešením, které jsme našli předtím. Někdo mohl zanechat nějaké permanentní magnety v blízkosti místa, jímž se šíří vlny. My tato konstantní pole budeme ignorovat a položíme B_x a B_y rovny nule.

Mimochodem k tomu, že x -ová složka pole \mathbf{B} musí být rovna nule jsme došli i jiným způsobem. Protože divergence \mathbf{B} je nulová (podle třetí Maxwellovy rovnice), stejnými úvahami, které jsme udělali pro elektrické pole, bychom usoudili, že podélná složka magnetického pole se nemůže měnit se souřadnicí x . Protože takové homogenní pole v našich vlnových řešeních ignorujeme, museli bychom položit rovno nule B_x . V případě rovinných elektromagnetických vln tedy musí pole \mathbf{B} , jakož i pole \mathbf{E} být kolmé na směr šíření vln.

Rovnice (20.16) nám poskytuje dodatečný argument pro závěr, že má-li elektrické pole jen složku y , bude mít magnetické pole jen složku z . Pole \mathbf{E} a \mathbf{B} jsou tedy navzájem kolmá. To je přesně to, co nastává v případě speciální vlny, kterou jsme již zkoumali.

Nyní jsme připraveni k použití poslední z Maxwellových rovnic pro vakuum [IV v (20.12)]. Jejím rozepsáním do složek dostaneme:

$$\begin{aligned} c^2 (\nabla \times \mathbf{B})_x &= c^2 \frac{\partial B_z}{\partial y} - c^2 \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{\partial E_x}{\partial t}, \\ c^2 (\nabla \times \mathbf{B})_y &= c^2 \frac{\partial B_x}{\partial z} - c^2 \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial t}, \\ c^2 (\nabla \times \mathbf{B})_z &= c^2 \frac{\partial B_y}{\partial x} - c^2 \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial t}. \end{aligned} \quad (20.17)$$

Ze šesti derivací složek vektoru \mathbf{B} není rovna nule pouze $\partial B_z / \partial x$. Proto z těchto tří rovnic nakonec dostaneme pouze vztah:

$$-c^2 \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial t}. \quad (20.18)$$

Výsledek celé naší práce spočívá v závěru, že jen jedna složka elektrického a jen jedna složka magnetického pole není rovna nule a že tyto složky musí splňovat rovnice (20.16) a (20.18). Obě

tyto rovnice lze zkombinovat do jediné, zderivujeme-li první podle x a druhou podle t . Pak budou levé strany obou rovnic identické (až na součinitel c^2). Dostaneme tak, že E_y vyhovuje rovnici

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0, \quad (20.19)$$

kteřá už se nám vyskytla dříve, když jsme zkoumali šíření zvuku. Je to vlnová rovnice pro jedno-rozměrné vlny.

Všimněte si, že v procesu našeho odvozování jsme našli ještě něco víc, než obsahuje rovnice (20.11). Maxwellovy rovnice nám poskytly další informaci, která spočívá v tom, že v elektromagnetických vlnách mají pole nenulové složky jen ve směrech kolmých na směr postupu vlnění.

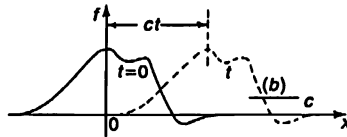
Shrňme si, co víme o řešeních jednorozměrné vlnové rovnice. Splňuje-li nějaká veličina ψ jednorozměrnou vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (20.20)$$

je jediným možným řešením funkce $\psi(x, t)$, která má tvar

$$\psi(x, t) = f(x - ct), \quad (20.21)$$

tj. funkce jediné proměnné $(x - ct)$. Funkce $f(x - ct)$ představuje nějaký „tuhý“ (v závislosti na x) útvar, který se pohybuje rychlostí c ve směru zvětšování kladných hodnot x (obr. 20.4). Například, má-li funkce f maximum tehdy, když je její argument roven nule, pro $t=0$ bude mít ψ maximum v $x=0$. V nějakém pozdějším čase, dejme tomu $t=10$, bude mít ψ maximum v $x=10c$. S postupem času se maximum pohybuje rychlostí c ve směru kladné osy x .



Obr. 20.4 Funkce $f(x - ct)$ představuje stálý „profil“, který se pohybuje rychlostí c ve směru nárůstu kladných hodnot x .

Někdy je vhodnější říkat, že řešení jednorozměrné vlnové rovnice je funkcí $(t - x/c)$. Toto vyjádření však znamená totéž, co předcházející, neboť každá funkce v argumentu $(t - x/c)$ je zároveň funkcí argumentu $(x - ct)$:

$$F(t - x/c) = F\left(-\frac{x - ct}{c}\right) = f(x - ct).$$

Dokážeme, že $f(x - ct)$ je opravdu řešením vlnové rovnice. Protože jde o funkci pouze jediné proměnné – proměnné $(x - ct)$ – budeme první derivaci f podle této proměnné označovat f' a druhou f'' . Derivováním vztahu (20.21) podle x dostaneme

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f'(x - ct),$$

neboť derivace $(x - ct)$ podle x je rovna 1. Je zřejmé, že druhá derivace ψ podle x bude

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = f''(x - ct).$$

Derivováním ψ podle t dostaneme

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = f'(x - ct) (-c)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = +c^2 f''(x - ct). \quad (20.23)$$

Vidíme, že ψ opravdu splňuje jednorozměrnou vlnovou rovnici.

Můžete namítnout: „Mám-li vlnovou rovnici, odkud vím, že mám vzít právě $f(x - ct)$ jako její řešení? Mně se tato zpětná metoda důkazu nelíbí. Neexistuje nějaký přímý způsob, jak dojít k řešení?“ V pořádku, jediným dobrým přímým způsobem je znát řešení. Je možné vymyslet nějaký zjevně přímý matematický postup, zvláště proto, že víme, jak má vlastně řešení vypadat, ale s rovnicí tak jednoduchou jako je tato, si nemusíme hrát na schovávanou. Téměř se dostanete do stavu, že když uvidíte rovnici (20.20), téměř současně se vám vybaví $\psi = f(x - ct)$ jako její řešení. (Právě tak jako teď, když vidíte integrál $x^2 dx$, ihned víte, že výsledek je $x^3/3$).

Ve skutečnosti byste měli vědět ještě trochu víc. Řešením je nejen každá funkce proměnné $(x - ct)$, ale i každá funkce proměnné $(x + ct)$. Protože vlnová rovnice obsahuje pouze c^2 , nehraje změna znaménka u c žádnou roli. Opravdu nejobecnějším řešením jednorozměrné vlnové rovnice je součet dvou libovolných funkcí, z toho jedné funkce proměnné $(x - ct)$ a druhé funkce proměnné $(x + ct)$:

$$\psi = f(x - ct) + g(x + ct). \quad (20.24)$$

První člen představuje nějakou vlnu postupující ve směru kladné osy x a druhý člen libovolnou vlnu postupující ve směru záporných hodnot x . Obecné řešení je superpozicí obou takových současně existujících vln.

Ponecháme na vás, abyste se zamysleli nad následujícím zábavným problémem. Vezměme funkci tvaru

$$\psi = \cos kx \cos kct.$$

Tato funkce nemá tvar funkce proměnné $(x - ct)$ nebo $(x + ct)$. Naproti tomu můžete jejím přímým dosazením do rovnice (20.20) snadno dokázat, že je řešením vlnové rovnice. Jak potom můžeme tvrdit, že obecné řešení má tvar vyjádřený vztahem (20.24)?

Aplikujeme-li naše závěry o řešení vlnové rovnice na y -ovou složku elektrického pole E_y , dojdeme k závěru, že E_y se může měnit s x jakýmkoliv způsobem. Avšak pole, která opravdu existují, lze vždy považovat za součet dvou útvarů. Jedna vlna putuje prostorem rychlostí c v jednom směru, přičemž s ní související magnetické pole je kolmé na elektrické pole; druhá vlna

postupuje toutéž rychlostí opačným směrem. Takové vlny odpovídají nám už známým elektromagnetickým vlněním – světlu, radiovým vlnám, infračervenému záření, ultrafialovému záření, rentgenovým paprskům atd. O vyzařování světla jsme už podrobně hovořili v 1. díle. Protože všechno, co jsme se tam dozvěděli, platí pro každé elektromagnetické vlnění, není třeba zde podrobněji zkoumat vlastnosti těchto vln.

Snad bychom měli udělat ještě několik poznámek o problému polarizace elektromagnetických vln. V našem řešení jsme se rozhodli zkoumat speciální případ, v němž má elektrické pole pouze složku y . Pro vlny postupující ve směru $+x$ nebo $-x$ zřejmě existuje i jiné řešení, a to takové, které má pouze složku z . Protože Maxwellovy rovnice jsou lineární, představuje obecné řešení v případě jednorozměrného vlnění postupujícího ve směru osy x součet vln E_y a vln E_z . Toto obecné řešení shrnují následující vztahy:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (0, E_y, E_z) \\ E_y &= f(x - ct) + g(x + ct) \\ E_z &= F(x - ct) + G(x + ct) \\ \mathbf{B} &= (0, B_y, B_z) \\ cB_z &= f(x - ct) + g(x + ct) \\ cB_y &= -F(x - ct) + G(x + ct). \end{aligned} \tag{20.25}$$

V takových elektromagnetických vlnách není směr vektoru \mathbf{E} konstantní, ale nějakým libovolným způsobem krouží v rovině yz . Magnetické pole v každém bodě je vždy kolmé na elektrické pole a na směr šíření vlnění.

Máme-li pouze vlny postupující jedním směrem, řekněme ve směru kladné osy x , existuje pro orientaci elektrického a magnetického pole jednoduché pravidlo. Podle něj vektorový součin $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ – což je ovšem vektor kolmý jak na \mathbf{E} tak i na \mathbf{B} – udává směr postupu vlnění. Ztotožní-li se tedy \mathbf{E} s \mathbf{B} pootočením doprava, tj. tak jako se zavrtává šroub s pravotočivým závitem, je směr posunu šroubu směrem rychlosti vlnění. (Později uvidíme, že vektor $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ má speciální fyzikální význam. Je to vektor, který popisuje tok energie v elektromagnetickém poli.)

20.2 TROJROZMĚRNÉ VLNY

Nyní se pustíme do problému trojrozměrných vln. Už jsme viděli, že vektor \mathbf{E} vyhovuje vlnové rovnici. K témuž závěru lze snadno dojít i úvahou vycházející přímo z Maxwellových rovnic. Vyjděme z rovnice

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

a na obě její strany aplikujeme operátor rotace:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}). \tag{20.26}$$

Jistě si vzpomínáte, že rotace každého vektoru lze psát jako součet dvou členů – jednoho obsahujícího divergenci a druhého obsahujícího Laplaceův operátor:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}.$$

Ve vakuu je však divergence \mathbf{E} rovna nule, takže zůstává laplaceovský člen. Kromě toho podle čtvrté z Maxwellových rovnic (20.12) je časová derivace $c^2(\nabla \times \mathbf{B})$ rovna druhé derivaci \mathbf{E} podle času t :

$$c^2 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Potom rovnice (20.26) získává tvar

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2},$$

který představuje trojrozměrnou vlnovou rovnici. Napsaná v celé své nádheře má tuto formu

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (20.27)$$

Jak najdeme obecné řešení této vlnové rovnice? Všechna řešení trojrozměrné vlnové rovnice lze vyjádřit jako superpozice námi už nalezených jednorozměrných řešení. Když jsme předpokládali, že pole nezávisí na y a na z , dostali jsme rovnici pro vlny postupující ve směru osy x . Zřejmě existují i jiná řešení, v nichž pole nezávisí na x a y a reprezentují vlny pohybující se ve směru osy z . Nebo obecně, protože jsme naše rovnice psali ve vektorovém tvaru, může mít trojrozměrná vlnová rovnice řešení, která znamenají rovinné vlny postupující v jakémkoliv směru. A opět, protože jde o lineární rovnice, můžeme mít současně rovinných vln, kolik jen chceme a šířit se mohou právě tolika směry. Nejobecnějším řešením trojrozměrné vlnové rovnice je tedy superpozice všech druhů rovinných vln pohybujících se všemi možnými směry.

Zkuste si představit, jak vypadají elektrická a magnetická pole právě teď v prostoru této posluchárny. Především je tu stále magnetické pole pocházející z elektrických proudů uvnitř Země, tj. stále zemské magnetické pole. Jsou tu i určitá nepravidelná, ale téměř statická elektrická pole, která vznikají třeba od elektrických nábojů generovaných třením, když se lidé vrtí na svých židlích, nebo třou rukávy svých kabátů o jejich opěradla. Existují tu i další magnetická pole vytvářená střídavými proudy v elektrickém vedení. Tato pole se mění s frekvencí 60 Hz²⁸⁾, synchronně s otáčením generátorů v elektrárně. Nejzajímavější jsou však ta elektrická a magnetická pole, která se mění s mnohem většími frekvencemi. Například když světlo prochází od okna na podlahu, od stěny ke stěně, vzniká drobné chvění elektrických a magnetických polí, které se šíří rychlostí 300 000 kilometrů za sekundu. Dále existují ještě infračervené vlny dopadající na chladnou tabuli od našich rozpálených čel. A to jsme ještě zapomněli na ultrafialové záření, rentgenové paprsky a radiové vlny pronikající místností.

Naši posluchárnu proletují elektromagnetické vlny přenášející hudbu džezové kapely. Existují zde vlny modulované sériemi impulzů, představující obrazy událostí, k nimž dochází v jiných částech světa nebo v nás samotných. Pro demonstraci reálnosti těchto vlnění je třeba pouze zapnout elektronické zařízení, které tyto vlny změní na obrazy a zvuky.

Půjdeme-li ještě do dalších podrobností a budeme analyzovat i nejmenší chvění, existují v této místnosti ještě velmi slabé elektromagnetické vlny, jež sem přišly z obrovských vzdáleností. Jsou

²⁸⁾ V Evropě používáme frekvenci 50 Hz (pozn. red.).

zde také drobné oscilace elektrického pole, jejichž amplitudy jsou vzdálené zhruba 30 cm. Přišly z míst vzdálených od nás miliony kilometrů a byly k Zemi vyslány kosmickou sondou Mariner 2, která právě proletěla kolem Venuše. Její signály nesou souhrn informací získaných sondou o této planetě (informaci jí dodaly elektromagnetické vlny, které sonda přijala od planety).

Existují zde i velmi slabé kmity elektrických a magnetických polí – vlny, které pocházejí z míst vzdálených od nás miliardy světelných let, od galaxií v nejvzdálenějších koutech vesmíru. Že je tomu opravdu tak, bylo zjištěno „zaplněním místností vodiči“, tj. vybudováním velkých antén, jako je tato místnost. Jimi se detekovaly radiové vlny, které pocházejí z míst, ležících ve vesmíru za hranicí viditelnosti i těch největších optických teleskopů. Ostatně i ty, optické teleskopy, jsou v podstatě jen sběrači elektromagnetických vln. To co nazýváme hvězdami, jsou jen závěry – závěry udělané na základě pouze jediné fyzikální reality, kterou jsme z nich až dosud dostali – na základě výzkumu nekonečně složitých vlnění elektrických a magnetických polí, které zasahují naši Zem.

Je toho ještě víc: pole vytvářená na míle vzdálenými blesky, pole nabitých částic v kosmickém záření, když sviští touto místností, a další a další. Vidíte, jakým složitým objektem je elektrické pole v prostoru kolem vás. Ale i tak vždy splňuje trojrozměrnou vlnovou rovnici.

20.3 VĚDECKÁ OBRAZOTVORNOST

Požádal jsem vás, abyste si tato elektrická a magnetická pole představili. Co přitom děláte? A víte jak to udělat? Jak si představuji elektrické a magnetické pole *já*? Co přitom opravdu vidím? Jaké jsou vůbec požadavky na vědeckou představivost? Liší se něčím od pokusu představit si, že tato místnost je plná neviditelných andělů? Ne, nepodobá se představování si neviditelných andělů. Pochopit elektromagnetické pole vyžaduje mnohem vyšší stupeň představivosti než pochopit neviditelné anděly. Proč? Protože vše, co musím udělat proto, abych učinil neviditelné anděly dostupné chápání, je pouze trochu změnit jejich vlastnosti – udělám je trochu viditelné a už mám možnost vidět obrysy jejich křídel, jejich těla, svatozáře. Jakmile se mi už podařilo představit si viditelného anděla, je abstrakce potřebná k tomu, abychom si z téměř neviditelných andělů vytvořili představu o docela neviditelných, poměrně snadná. Asi řeknete: „Profesore, dejte mi, prosím, přibližný popis elektromagnetických vln, třeba ne úplně přesný, abych je mohl vidět stejně tak, jako mohu vidět téměř neviditelné anděly. Pak si budu moci upravit obraz potřebnou abstrakcí.“

Lituji, ale to nemohu. Nevím, jak to mám udělat. Nemám žádný obraz tohoto elektromagnetického pole, který by byl v nějakém ohledu přesný. O elektromagnetickém poli vím už dávno – byl jsem ve stejné situaci, jako jste nyní vy, před dvaceti pěti lety a mám už za sebou 25 roků přemýšlení o těchto třepotajících se vlnách. Když jsem začal s popisem magnetického pole pohybujícího se prostorem, mluvil jsem o polích E a B a mával jsem při tom rukama a vy se snad domníváte, že jsem opravdu schopný je vidět. Povím vám co vidím. Vidím jakési nejasné, zastříbené, třepotající se čáry – tu a tam je na nich nějak napsané E a B , tu a tam jsou některé z těchto čar označeny šipkami – šipka mizí, když se na ni pozorněji podívám. Hovořím-li o polích, která se ženou prostorem, úžasně se pletou symboly, které používám k popisu objektů, s objekty samotnými. Ve skutečnosti si nedokážu vytvořit nějaký obraz, který se alespoň přibližně podobá reálným vlnám. Máte-li tedy i vy určité těžkosti s vytvořením takového obrazu, nemusíte se obávat, že vaše těžkosti jsou něco výjimečného.

Naše věda klade úžasně požadavky na představivost. Stupeň představivosti, jenž je vyžadován dnes, je mnohem větší než ten, který si nárokovali ze starodávných představ. Moderní pojmy se velmi těžko představují. Je pravda, že k tomu používáme mnohé prostředky. Používáme

matematické rovnice a pravidla a děláme mnoho obrázků. Teď si uvědomuji, že když hovořím o elektromagnetickém poli v prostoru, vidím nějakou superpozici všech grafů, které jsem kdy viděl o těchto polích nakreslené. Před mým zrakem nejsou svazky siločar táhnoucí se prostorem, neboť mě trápí, že kdybych se pohyboval jinou rychlostí, tyto svazky by zmizely. Ani vždy nevidím elektrická a magnetická pole, neboť se někdy domnívám, že bych si měl svou představu vytvořit raději pomocí vektorového a skalárního potenciálu, neboť ty snad byly fyzikálně významnějšími realitami, které oscillovaly.

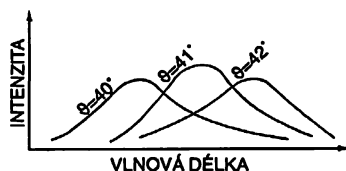
Můžete se domnívat, že asi jedinou nadějí je přijmout matematické hledisko. Jaké je tedy matematické hledisko? Z matematického hlediska existuje v každém bodě prostoru vektor elektrického pole, jakož i vektor magnetického pole; to však znamená, že s každým bodem je spojeno šest čísel. Dokážete si představit šest čísel spojených s každým bodem v prostoru? Velmi těžko. Dokážete si představit byť jen *jedno* číslo spojené s každým bodem? Já ne. Umím si představit takovou věc jakou je teplota v každém bodě v prostoru. To vypadá pochopitelně. Existuje teplo a chlad, které se mění od místa k místu. Ale upřímně řečeno, nechápu představu *čísla* v každém bodě.

Snad proto bychom si měli položit otázku: „Můžeme reprezentovat elektrické pole něčím, co se víc podobá teplotě, řekněme, jako přemísťování určitého množství jakéhosi žele?“ Dejme tomu, že bychom si měli začít představovat, že svět je zaplněn řídkým železem a že pole jsou jeho deformací – například roztáhnutím nebo zkroucením. Pak bychom dokázali pole zviditelnit. A pak, když „uvidíme“, jak vypadá, mohli bychom železo abstrahovat. Právě to se lidé snažili dělat po mnoho let. Maxwell, Ampér, Faraday a další se pokoušeli elektromagnetismus pochopit touto cestou. (Někdy toto řídké železo nazývali éter.) Ukázalo se však, že pokusy představovat si elektromagnetické pole tímto způsobem ve skutečnosti stojí v cestě pokroku. Bohužel, jsme odkázáni na abstrakce, na použití přístrojů k detekci pole, na použití matematických symbolů k jeho popisu atd. Ale bez ohledu na to, jsou pole v určitém smyslu reálná, neboť i poté, kdy jsme si přestali hrát s matematickými abstrakcemi – ať už pomocí obrázků, náčrtků a různých pokusů pole zviditelnit nebo bez nich – přece můžeme přístroji detekovat signály z Marineru 2, objevovat nové galaxie vzdálené od nás miliardy světelných let atd.

Lidé pracující v jiných oblastech často nechápu celý problém představivosti ve vědě. Pokoušejí se zkoušet naši představivost následujícím způsobem. Řeknou: „Je tu obraz několika lidí v nějaké situaci. Co si představujete, že se bude dít dál?“ Když řekneme: „Neumím si to představit“, asi se domnívají, že máme slabou představivost. Přehlíží však fakt, že cokoli, co je *přípustné* představit si ve vědě, musí být *v souladu se vším ostatním, co známe*. Že totiž elektrické pole a vlny, o nichž tu hovoříme, prostě nejsou nějaké šťastné myšlenky, které volně vytváříme, jak se nám líbí, ale jde o pojmy, které musí být v souladu se všemi známými zákony fyziky. Nemůžeme si dovolit představovat si vážně takové věci, které jsou zřejmě v rozporu se známými zákony přírody. A tak je náš druh představivosti docela nelehká hra. Je třeba mít schopnost vymyslet cosi, co nebylo nikdy předtím viděno a slyšeno. Zároveň jsou přitom naše myšlenky svázány do svěrací kazajky, tak říkajíc, ohraničené podmínkami, které vyplývají z našeho poznání způsobu existence přírody. Problém vytváření něčeho, co je nové, ale v souladu se vším, co bylo pozorováno dříve, je jedním z nejtěžších.

Když už jsem na toto téma narazil, chci říci něco i o tom, zda bude vůbec někdy možné představit si *krásu*, kterou nemůžeme vidět. Je to zajímavá otázka. Když se podíváme na duhu, připadá nám krásná. Každý řekne: „Ach, duha!“ (Vidíte, jak jsem vědecký. Ubránil jsem se říci, že je něco krásné, dokud nemám experimentální způsob, jak krásu určovat.) Ale jak bychom popsali duhu, kdybychom byli slepí? *Jsmo* slepí, když měříme koeficient odrazu chloridu sodného

v infračervené oblasti, nebo když mluvíme o frekvenci vlnění, které k nám přichází z nějaké neviditelné galaxie – sestavujeme diagram a kreslíme graf. Například, v případě duhy by takovým grafem bylo nakreslení závislosti intenzity záření na jeho vlnové délce měřené spektrofotometrem pro každý směr na obloze. Obecně by takové měření dalo křivku, která by byla dost plochá. Pak by jednoho dne kdosi objevil, že za určitých povětrnostních podmínek a v určitých směrech k obloze se bude spektrum intenzity záření na jeho vlnové délce chovat divně – bude se vyznačovat hrbolem. Když se úhel natočení přístroje jen trochu změní, posune se vrchol hrbole od jedné vlnové délky k jiné. Pak bude jednoho dne ve fyzikálním časopise pro slepce publikován článek s názvem: „Intenzita záření jako funkce úhlu při určitých povětrnostních podmínkách“. V tomto článku by se objevil nějaký takový graf, jako je na *obr. 20.5*. Autor by snad poznamenal, že při větších úhlech připadlo více záření na větší vlnové délky, zatímco při menších úhlech bylo maximum záření při kratších vlnových délkách. (Z našeho hlediska bychom řekli, že světlo je při 40° převážně zelené, zatímco při 42° je převážně červené.)



Obr. 20.5 Intenzita elektromagnetických vln jako funkce vlnové délky pro tři úhly (měřené z opačného směru, než je Slunce) pozorovaná pouze za určitých meteorologických podmínek

Avšak připadá vám graf na *obr. 20.5* krásný? Obsahuje mnohem více podrobností, než vnímáme, když se díváme na duhu, neboť naše oči nedokážou vidět přesné podrobnosti ve tvaru spektra. Oko však vnímá duhu jako krásnou. Máme dostatek představivosti k tomu, abychom ve spektrálních křivkách viděli stejnou krásu jako vidíme, když se díváme přímo na duhu? Nevím.

Ale představte si, že máme graf koeficientu odrazu krystalu chloridu sodného jako funkce vlnové délky v infračervené oblasti, a též i jako funkci úhlu. Dokázal bych si představit, jak by se to jevilo mým očím, kdyby mohly vidět v infračervené oblasti – snad nějaká jasná lesklá „zelená“, pomíchaná s odrazy od povrchu zbarvenými „kovově červeně“. To by byla překrásná věc, ale nevím, zda bych se mohl vůbec kdy podívat na graf koeficientu odrazu NaCl naměřeného pomocí nějakého přístroje a prohlásit, že obsahuje stejnou krásu.

Na druhé straně, i když nedokážeme vidět krásu v konkrétních naměřených výsledcích, můžeme vždy tvrdit, že vidíme určitou krásu v rovnicích popisujících obecné fyzikální zákony. Například, v případě rovnice (20.9) je cosi pěkného na té pravidelnosti, s jakou se v ní vyskytují x , y , z a t . A tato překrásná symetrie ve výskytu x , y , z a t dává tušit ještě větší krásu, která se týká čtyř rozměrů, možnosti, že prostor se vyznačuje čtyřrozměrnou souměrností, možnost tuto symetrii analyzovat a vypracovat přitom speciální teorii relativity. S rovnicemi je tedy spojeno dost intelektuální krásy.

20.4 KULOVÉ VLNY

Viděli jsme, že existují řešení vlnové rovnice, která přísluší rovinným vlnám a že každou elektromagnetickou vlnu lze popsat jako superpozici mnoha rovinných vln. V určitých speciálních případech je však pohodlnější popisovat vlnové pole v jiném matematickém tvaru. Nyní bychom

rádi probrali teorii kulových vln – vln odpovídajících kulovým plochám, které se rozsbhají z nějakého středu. Hodíte-li kámen do jezera, rozruch se šíří ve formě kruhových vln po hladině – jde o dvojrozměrné vlny. Kulová vlna je podobný útvar, jenže se šíří ve třech rozměrech.

Dříve, než začneme s popisem kulových vln, potřebujeme trochu matematiky. Mějme funkci, která závisí pouze na radiální vzdálenosti r od určitého počátku – jinými slovy, funkci, která je kulově symetrická. Označme ji $\psi(r)$, kde r znamená

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

tj. radiální vzdálenost od počátku soustavy souřadnic. Abychom zjistili, které funkce $\psi(r)$ splňují vlnovou rovnici, budeme potřebovat výraz pro Laplaceův operátor funkce ψ . Potřebujeme tedy najít součet druhých derivací ψ podle x , y a z . Budeme používat označení $\psi'(r)$ pro derivaci ψ podle r a $\psi''(r)$ pro druhou derivaci ψ podle r .

Nejdříve najdeme derivace podle x . První derivace je

$$\frac{\partial \psi(r)}{\partial x} = \psi'(r) \frac{\partial r}{\partial x}.$$

Druhá derivace ψ podle x je

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \psi'' \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \psi' \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}.$$

Parciální derivace ψ podle x lze vypočítat z těchto vztahů:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right).$$

Druhá derivace ψ podle x tedy bude

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2} \psi'' + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right) \psi' \quad (20.28)$$

a taktéž

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^2} \psi'' + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{y^2}{r^2} \right) \psi' \quad (20.29)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{z^2}{r^2} \psi'' + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{z^2}{r^2} \right) \psi'. \quad (20.30)$$

Laplaceův operátor představuje součet těchto tří derivací. S ohledem na to, že $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, dostáváme tento vztah:

$$\nabla^2 \psi(r) = \psi''(r) + \frac{2}{r} \psi'(r). \quad (20.31)$$

Často je vhodnější psát tento vztah v následujícím tvaru:

$$\nabla^2 \psi(r) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r\psi). \quad (20.32)$$

Provedete-li derivaci vyznačenou v (20.32), přesvědčíte se, že výrazy na pravých stranách vztahů (20.31) a (20.32) jsou stejné.

Chceme-li zkoumat kulově symetrická pole, která se mohou šířit ve formě kulových vln, musí veličina popisující pole být funkcí jak r tak i t . Ptejme se tedy, jaké funkce $\psi(r, t)$ jsou řešenými rovnicemi

$$\nabla^2 \psi(r, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(r, t) = 0. \quad (20.33)$$

Protože $\psi(r, t)$ závisí na prostorových souřadnicích pouze prostřednictvím r , můžeme pro Laplaceův operátor použít vztah (20.32), který jsme už odvodili. Abychom však byli přesní, měli bychom derivace podle r psát jako parciální, neboť ψ je i funkcí t . Vlnová rovnice pak získá tento tvar:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = 0.$$

Potřebujeme vyřešit tuto rovnici, která se zdá být mnohem složitější, než rovnice pro případ rovinných vln. Všimněme si však, že když ji vynásobíme r , dostaneme

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r\psi) = 0. \quad (20.34)$$

Podle této rovnice splňuje funkce $r\psi$ jednorozměrnou vlnovou rovnici s proměnnou r . Na základě obecného principu, který jsme tak často zdůrazňovali, že stejné rovnice mají stejná řešení, víme, že když je $r\psi$ funkcí pouze proměnné $(r - ct)$, bude řešením rovnice (20.34). Víme tedy, že kulové vlny musí mít tvar

$$r\psi(r, t) = f(r - ct).$$

Nebo, jak jsme viděli dřív, lze stejně dobře říci, že $r\psi$ má tvar

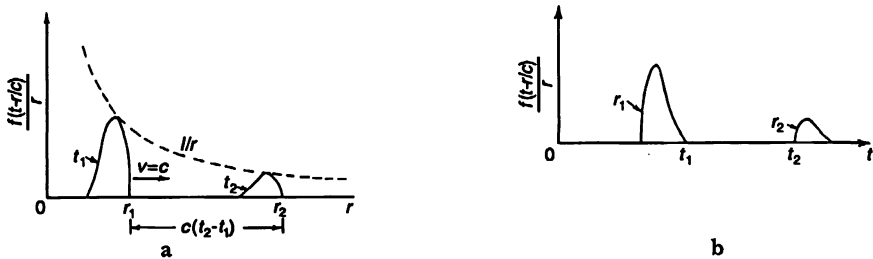
$$r\psi = f(t - r/c).$$

Po vydělení proměnnou r dostáváme výsledek, že veličina ψ popisující pole (ať už jakákoliv) má následující matematické vyjádření:

$$\psi = \frac{f(t - r/c)}{r}. \quad (20.35)$$

Tato funkce představuje obecnou kulovou vlnu šířící se rychlostí c z počátku souřadnicové soustavy všemi směry. Odhlédneme-li na okamžik od r ve jmenovateli, má amplituda vlny jako funkce vzdálenosti od počátku určitý tvar, který postupuje rychlostí c ven, r ve jmenovateli však

znamená, že amplituda vlny klesá s postupem vlny přímo úměrně $1/r$. Jinými slovy, na rozdíl od rovinné vlny, v níž zůstává amplituda při pohybu vlny konstantní, v kulové vlně se amplituda neustále zmenšuje (obr. 20.6). Tento jev lze snadno pochopit na základě jednoduchého fyzikálního důvodu.



Obr. 20.6 Kulová vlna $\psi = f(t - r/c)/r$. a) ψ jako funkce r při $t = t_1$ a tatáž vlna v pozdějším čase t_2 , b) ψ jako funkce t pro $r = r_1$ a tatáž vlna pozorovaná v poloze r_2

Víme, že hustota energie ve vlně závisí na druhé mocnině amplitudy vlny. Při postupu vlny se její energie rozptyluje na větší a větší plochu, která je přímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti od středu. Když se celková energie zachovává, musí se hustota energie zároveň zmenšovat jako $1/r^2$ a amplituda vlny tedy musí klesat jako $1/r$. Takže vztah (20.35) představuje „rozumný“ výraz pro kulovou vlnu.

Dosud jsme nevzali v úvahu druhé možné řešení vlnové rovnice:

$$r\psi = g(t + r/c)$$

resp.

$$\psi = \frac{g(t + r/c)}{r}.$$

Toto také představuje kulovou vlnu, ale takovou, která se pohybuje dovnitř, tj. od velkých vzdáleností r směrem k počátku souřadnicové soustavy.

Nyní zavedeme jeden speciální předpoklad. Tvrdíme bez jakéhokoliv důkazu, že vlnami generovanými zdrojem jsou pouze ty vlny, které se pohybují směrem *ven* ze zdroje. Protože víme, že vlny jsou způsobeny pohybem nábojů, musíme se domnívat, že vlny postupují od náboje pryč. Bylo by totiž dost divné předstávat si, že dříve, než se náboje uvedly do pohybu, vystartovala z nekonečna kulová vlna a k nábojům dorazila právě v čase, když se začaly pohybovat. Je to možné řešení, ale zkušenost ukazuje, že jsou-li náboje urychlovány, pohybují se vlny od nábojů pryč. Ačkoli Maxwellovy rovnice připouštějí obě možnosti, přibereme k nim jako *dodatečný fakt*, založený na zkušenosti, že fyzikální smysl mají pouze řešení představující rozbíhavé vlny.

Je však nutné poznamenat, že tento *dodatečný předpoklad* má zajímavý důsledek: jím jsme odstranili symetrii vzhledem k času, která existuje v Maxwellových rovnicích. Původní rovnice pro E a B a také vlnové rovnice, které jsme z nich odvodili, se vyznačují tím, že změníme-li znaménko t , rovnice se nezmění. Podle těchto rovnic pro každé řešení odpovídající vlně pohybující se v jednom směru existuje stejně platné řešení znamenající vlnu pohybující se ve směru opačném. Naše tvrzení, že budeme brát v úvahu pouze vycházející vlny, je důležitým *dodatečným předpokladem*. (Pečlivě byla prozkoumána i taková formulace elektrodynamiky, v níž se tento předpoklad nezavádí. Je udivující, že v mnoha situacích nevede k fyzikálně absurdním důsledkům, ale hovořit nyní o těchto ideách by nás odvedlo příliš daleko od naší cesty. Trochu víc o nich povíme v kapitole 28.)

Musíme se zmínit ještě o jedné důležité věci. V našem řešení (20.35) pro rozbíhavou vlnu je v počátku souřadnicové soustavy funkce ψ nekonečná. To je trochu neobvyklé. Raději bychom měli takové vlnové řešení, které by bylo hladké všude. Naše řešení musí fyzikálně představovat situaci, v níž se v počátku soustavy souřadnic nachází nějaký zdroj. Jinak řečeno, nedopatřením jsme se dopustili chyby. Rovnici volných vln (20.33) s nulou na pravé straně jsme nevyřešili *všude*, ale s výjimkou počátku souřadnicové soustavy. Chyba se nám vetřela proto, že některé kroky v našem odvození nejsou při $r=0$ „dovoleny“.

Ukážeme, jak snadno se v elektrostatické úloze taková chyba udělá. Představme si, že potřebujeme najít řešení rovnice pro elektrostatický potenciál $\nabla^2\varphi=0$. Laplaceův operátor funkce φ je roven nule, neboť jsme předpokládali, že nikde nejsou žádné náboje. Ale jak je to s kulově symetrickým řešením této rovnice, tj. když je nějaká funkce φ závislá jen na r ? Použijeme-li pro Laplaceův operátor vztah (20.32), dostaneme

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r\varphi) = 0.$$

Vynásobením této rovnice proměnnou r dostáváme rovnici, kterou lze bezprostředně integrovat:

$$\frac{d^2}{dr^2} (r\varphi) = 0.$$

Integrujeme-li jednou podle r , zjistíme, že první derivace funkce $r\varphi$ je rovna konstantě, kterou můžeme označit a :

$$\frac{d}{dr} (r\varphi) = a.$$

Opětovným integrováním dostaneme, že funkce $r\varphi$ má tento tvar:

$$r\varphi = ar + b,$$

kde b je další integrační konstanta. Následující φ jsme tedy našli jako řešení rovnice pro elektrostatický potenciál ve vakuu:

$$\varphi = a + \frac{b}{r}.$$

Něco je zde zřejmě chybné. Víme, jak vypadá řešení pro elektrostatický potenciál v oblasti, kde žádné elektrické náboje nejsou: potenciál je všude roven konstantě. Odpovídá to prvnímu sčítanci v našem řešení. Ale my máme i druhý člen, podle něhož existuje ještě příspěvek k potenciálu měnící se jako převrácená hodnota vzdálenosti od počátku souřadnicové soustavy. Víme však, že takový potenciál přísluší bodovému náboji nacházejícímu se v počátku soustavy. Ačkoliv se nám tedy zdálo, že hledáme řešení pro potenciál ve vakuu, nalezené řešení nám poskytuje i pole pro bodový náboj v počátku vztažné soustavy. Zjišťujete podobnost mezi tím, co se stalo nyní a co se stalo tehdy, když jsme hledali kulově symetrické řešení vlnové rovnice? Kdyby v počátku soustavy reálně neexistovaly žádné náboje nebo proudy, nebyly by ani kulové rozbíhavé vlny. Kulové vlny musí být vytvářeny zdroji nacházejícími se v počátku. V následující kapitole budeme zkoumat souvislost mezi rozbíhavými elektromagnetickými vlnami na jedné straně a proudy a napětími, které je vytváří, na straně druhé.

21 Řešení

Maxwellových rovnic s proudy a náboji

21.1 SVĚTLO A ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY

21.2 KULOVÉ VLNY Z BODOVÉHO ZDROJE

21.3 OBECNÉ ŘEŠENÍ MAXWELLOVÝCH ROVNIC

21.4 POLE OSCILUJÍCÍHO DIPÓLU

21.5 POTENCIÁLY POHYBUJÍCÍHO SE NÁBOJE.

LIÉNARDOVO A WIECHERTOVO OBECNÉ ŘEŠENÍ

21.6 POTENCIÁLY NÁBOJE POHYBUJÍCÍHO SE
ROVNOMĚRNĚ. LORENTZŮV VZOREC

21.1 SVĚTLO A ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY

Přečtěte si znovu: kapitolu 28, díl 1., Elektromagnetické záření
kapitolu 31, díl 1., Původ indexu lomu
kapitolu 34, díl 1., Relativistické jevy a záření

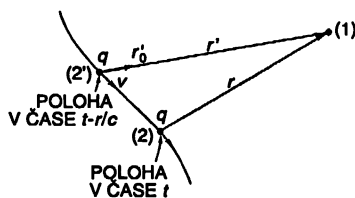
V předcházející kapitole jsme viděli, že mezi řešeními Maxwellových rovnic jsou i elektromagnetické vlny. V závislosti na vlnové délce odpovídají radiovým vlnám, světlu, rentgenovému záření atd. Světlo jsme studovali podrobně v 1. díle. V této kapitole chceme obě věci spojit – chceme ukázat, že Maxwellovy rovnice opravdu mohou představovat základnu našeho dřívějšího výkladu světelných jevů.

Zkoumání světla jsme začali tím, že jsme napsali rovnici pro elektrické pole, které vytváří náboj pohybující se libovolným způsobem. Byla to rovnice (28.3) v 1. díle:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{r}'_0}{r'^2} + \frac{r'}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}'_0}{r'^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}'_0 \right] \quad (21.1)$$

$$c\mathbf{B} = \mathbf{r}'_0 \times E.$$

Pohybuje-li se náboj libovolným způsobem, závisí elektrické pole, které bychom v daném okamžiku zjistili v nějakém bodě, pouze na poloze a pohybu náboje – ne však v tomto okamžiku, ale v čase předcházejícím – v okamžiku předcházejícím danému o čas, který potřebuje světlo postupující rychlostí c na to, aby překonalo vzdálenost r' mezi nábojem a bodem, kde pole zjišťujeme. Jinými slovy, potřebujeme-li najít elektrické pole v nějakém bodě (1) v čase t , musíme vypočítat polohu (2') náboje a jeho pohyb v čase $(t - r'/c)$, kde r' je vzdálenost bodu (1) od polohy (2') v čase $(t - r'/c)$. Čárka má připomínat, že r' je tzv. retardovaná vzdálenost bodu (2') od bodu (1) a ne aktuální vzdálenost mezi bodem (2) – polohou náboje v čase t – a bodem pole (1) (obr. 21.1). Všimněte si, že nyní používáme odlišnou konvenci pro směr jednotkového vektoru \mathbf{r}'_0 . V kapitolách 28 a 34 1. dílu bylo vhodné pokládat \mathbf{r} (a tedy i \mathbf{r}'_0) za vektor směřující *ke zdroji*. Teď se však přidržíme definice zavedené pro Coulombov zákon, podle níž \mathbf{r} směřuje *od náboje*, nacházejícího se v (2), k bodu (1), v němž pole určujeme. Jediný rozdíl je tedy v tom, že v porovnání se starými veličinami mají naše nová \mathbf{r} (jakož i \mathbf{r}'_0) opačná znaménka.



Obr. 21.1 Pole v bodě (1) v čase t závisí na poloze (2'), v níž se náboj nachází v čase $(t - r'/c)$

Také jsme se přesvědčili, že je-li rychlost v náboje mnohem menší než c a uvažujeme-li pouze body nacházející se v tak velkých vzdálenostech od náboje, že ve výrazu (21.1) je významný jen poslední člen, lze pole vyjádřit i takto:

$$E = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r'} \left[\text{průmět zrychlení náboje v čase } (t - r'/c) \text{ do směru } \mathbf{r}' \right] \quad (21.1')$$

a

$$c\mathbf{B} = \mathbf{r}'_0 \times E.$$

Podívejme se podrobněji, co vyplývá z úplné rovnice (21.1). \mathbf{r}'_0 je jednotkový vektor směřující od retardované polohy (2') k bodu (1). První člen proto udává to, co by se dalo očekávat pro Coulombovo pole náboje, nacházejícího se v jeho retardované poloze – můžeme to nazvat retardovaným Coulombovým polem. Toto elektrické pole závisí nepřímo úměrně na druhé mocnině vzdálenosti a směřuje pryč od retardované polohy náboje (tj. stejně jako \mathbf{r}'_0).

Ale to je pouze první člen. Ze zbývajících členů vyplývá, že podle zákonů elektřiny nejsou všechna pole stejná jako statická pouze s tím rozdílem, že jsou retardovaná (jak je to občas tvrzeno). Vždyť k „retardovanému Coulombovu poli“ musíme přidat ještě dva další členy. Druhý člen zna-

mená opravu k retardovanému Coulombovu poli, která je rovna součinu rychlosti změny retardovaného Coulombova pole a veličiny r'/c , tj. časového zpoždění. Tento člen má tak řečeno tendenci *kompenzovat* účinek zpoždění v prvním členu. První dva členy dohromady odpovídají výpočtu „retardovaného Coulombova pole“ a jeho následující extrapolaci do budoucnosti o časový úsek r'/c , tj. přesně do okamžiku t . Jde o lineární extrapolaci, jako kdybychom předpokládali, že „retardované Coulombovo pole“ se bude měnit stejnou rychlostí, jaká byla vypočtena v případě, že se náboj nacházel v bodě (2'). Mění-li se pole pomalu, účinek zpoždění se korekčním členem téměř úplně zruší a tyto dva členy spolu dají takové elektrické pole, jehož velmi dobrou aproximací je „okamžitě Coulombovo pole“, tj. Coulombovo pole náboje nacházejícího se v bodě (2).

Nakonec existuje ve výrazu (21.1) ještě třetí člen, který představuje druhou derivaci jednotkového vektoru r_0' . V našem zkoumání světelných jevů jsme využili skutečnosti, že daleko od náboje se první dva členy mění nepřímo úměrně druhé mocnině vzdálenosti a ve velkých vzdálenostech se stávají velmi malými v porovnání s posledním členem, která klesá jako $1/r$. Proto jsme se zcela soustředili na tento poslední člen a ukázali jsme, že je (opět pro velké vzdálenosti) přímo úměrný té složce zrychlení náboje, která je kolmá na spojnici náboje s místem, v němž se pole určuje. (Kromě toho jsme v 1. díle většinou uvažovali nerelativistický pohyb nábojů; relativistické efekty jsme zkoumali pouze v jediné kapitole – v kapitole 34).

Nyní je nutné uvést tyto dvě věci do souvislosti. Na jedné straně máme Maxwellovy rovnice a na druhé straně máme výraz (21.1) udávající pole bodového náboje. Určitě bychom se měli zeptat, zda jde o ekvivalentní vyjádření. Dokážeme-li odvodit výraz (21.1) z Maxwellových rovnic, skutečně pochopíme souvislost mezi světlem a elektromagnetizmem. Vybudování tohoto spojení je hlavním cílem této kapitoly.

Ukazuje se, že to nedokážeme udělat úplně – matematická stránka této úlohy je příliš komplikovaná na to, abychom mohli projít všemi jejími zákoutími. Podívejme se však na ni dostatečně z blízka, abyste snadno pochopili, jak by se toto spojení vytvořilo. To co vypustíme, budou pouze matematické detaily. Některým z vás se bude možná zdát matematika v této kapitole příliš složitá a nebudete možná ochotni sledovat náš postup příliš detailně. Zdá se nám však, že je důležité vybudovat spojení mezi tím, co jste se učili dříve, a tím, co se učíte nyní, nebo alespoň naznačit, jak lze takové spojení vytvořit. Podíváte-li se na předchozí kapitoly, zpozorujete, že kdykoliv jsme jako východisko výkladu vzali nějaký výrok, vždy jsme pečlivě vysvětlili, zda jde o nový „předpoklad“, který představuje nějaký „základní zákon“, nebo zda jej lze odvodit z nějakých jiných zákonů. V duchu těchto přednášek jsme povinni vám ukázat spojení mezi světlem a Maxwellovými rovnicemi. Bude-li to přitom tu a tam obtížné, co se dá dělat, takový už je život – jiná cesta není.

21.2 KULOVÉ VLNY BODOVÉHO ZDROJE

V kapitole 18 jsme zjistili, že Maxwellovy rovnice lze řešit pomocí těchto substitucí:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (21.2)$$

a

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (21.3)$$

kde φ a \mathbf{A} musí být řešením rovnic

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (21.4)$$

a

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{j}{\varepsilon_0 c^2} \quad (21.5)$$

a kromě toho musí splňovat podmínku

$$\nabla \cdot A = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (21.6)$$

Nyní najdeme řešení rovnic (21.4) a (21.5). Abychom to udělali, musíme najít řešení ψ rovnice

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -s, \quad (21.7)$$

kde člen s , který budeme nazývat zdrojem, je znám. Samozřejmě s odpovídá ρ/ε_0 a ψ se ztotožní s φ v případě rovnice (21.4), nebo s $j_x/\varepsilon_0 c^2$, je-li $\psi = A_x$ atd. Nyní však chceme řešit rovnici (21.7) jako matematickou úlohu bez ohledu na to, jaký fyzikální význam mají ψ a s .

V místech, kde jsou ρ a j rovna nule – taková místa jsme nazvali „vakuum“ – splňují potenciály φ a A jakož i pole E a B trojrozměrnou vlnovou rovnici neobsahující zdroje, která má tento matematický tvar:

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (21.8)$$

V kapitole 20 jsme viděli, že řešení této rovnice mohou představovat vlny různého druhu: rovinné vlny šířící se ve směru osy x : $\psi = f(t - x/c)$, rovinné vlny ve směru osy y nebo ve směru osy z nebo v jakémkoliv jiném směru nebo kulové vlny tvaru

$$\psi(x, y, z, t) = \frac{f(t - r/c)}{r}. \quad (21.9)$$

(Tato řešení lze zapsat ještě jinými způsoby, například jako vlny vystupující z osy.)

Kromě toho jsme poznamenali, že fyzikálně výraz (21.9) nepředstavuje vlnu ve vakuu – že totiž v počátku vztažené soustavy musí existovat náboje, které by vystupující vlnu vyzářily. Jinými slovy, funkce tvaru (21.9) je řešením rovnice (21.8) všude s výjimkou nejbližšího okolí bodu $r=0$, kde musí být úplným řešením rovnice (21.7), zahrnujícím nějaké zdroje. Podívejme se, oč vlastně jde. Jaký druh zdroje s v rovnici (21.7) by vyvolal takovou vlnu, jakou představuje funkce (21.9)?

Představte si, že máme kulovou vlnu tvaru (21.9) a podívejme se, k čemu dochází při velmi malých r ? V tom případě lze zpoždění $-r/c$ v $f(t-r/c)$ zanedbat – za předpokladu, že f je hladká funkce – a ψ nabývá tvaru

$$\psi = \frac{f(t)}{r} \quad (r \rightarrow 0). \quad (21.10)$$

ψ tedy vypadá přesně tak jako Coulombovo pole náboje, který se nachází v počátku souřadnicové soustavy a v čase se mění. Kdybychom měli náboj zabírající malý objem v blízkosti počátku souřadnicové soustavy s hustotou náboje ρ , víme, že

$$\varphi = \frac{Q/4\pi\epsilon_0}{r},$$

kde $Q = \int \rho dV$. Nyní víme i to, že takové φ vyhovuje rovnici

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Na základě stejných matematických úvah tvrdíme, že ψ , vyjádřené ve tvaru (21.10), splňuje vztah

$$\nabla^2 \psi = -s \quad (r > 0), \quad (21.11)$$

přičemž s souvisí s f vztahem

$$f = \frac{S}{4\pi},$$

kde

$$S = \int s dV.$$

Jediný rozdíl spočívá v tom, že v obecném případě s , a proto i S mohou být funkcemi času.

Je důležité, že vyhovuje-li ψ rovnici (21.11) pro malá r , vyhovuje i rovnici (21.7). Přibližujeme-li se velmi blízko k počátku souřadnicové soustavy, skutečnost, že ψ závisí na $1/r$, vede k velmi velkým hodnotám prostorových derivací, ale časové derivace si přitom udržují stejné hodnoty. Jde pouze o časové derivace funkce $f(t)$. Proto, když se r blíží nule, lze v rovnici (21.7) člen $s \partial^2 \psi / \partial t^2$ vzhledem ke členu $\nabla^2 \psi$ zanedbat a rovnice (21.7) se stává ekvivalentní rovnici (21.11).

Abychom to shrnuli, je-li zdrojová funkce $s(t)$, vystupující v rovnici (21.7), lokalizována v počátku souřadnicové soustavy a má celkovou velikost

$$S(t) = \int s(t) dV, \quad (21.12)$$

má řešení rovnice (21.7) tvar

$$\psi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{S(t - r/c)}{r}. \quad (21.13)$$

Jediným účinkem členu $s \partial^2 \psi / \partial t^2$ vystupujícího v rovnici (21.7) je zavedení zpoždění $(t - r/c)$ do coulombovského potenciálu.

21.3 OBECNÉ ŘEŠENÍ MAXWELLOVÝCH ROVNIC

Našli jsme řešení rovnice (21.7) pro „bodový“ zdroj. Následující otázka je: Jak vypadá řešení v případě rozloženého zdroje? To je snadná úloha. Na každý zdroj $s(x, y, z, t)$ se můžeme dívat jako na součet mnoha „bodových“ zdrojů, přičemž v každém elementárním objemu dV se nachází právě jeden z nich a jeho velikost je $s(x, y, z, t) dV$. Protože rovnice (21.7) je lineární, je výsledné pole superpozicí polí všech takových elementárních zdrojů.

Na základě výsledků předcházejícího článku (vztah 21.7) víme, že pole $d\psi$ v bodě (x_1, y_1, z_1) – nebo stručně v (1) – v čase t pocházející od elementárního zdroje $s dV$ nacházejícího se v bodě (x_2, y_2, z_2) – nebo stručně v (2) – dává výraz

$$d\psi(1, t) = \frac{s(2, t - r_{12}/c) dV_2}{4\pi r_{12}},$$

kde r_{12} je vzdálenost z (2) do (1). Sečíst příspěvky všech elementárních objemů uvažovaného zdroje, znamená vypočítat integrál přes všechny oblasti objemu, kde $s \neq 0$. Tak dostáváme

$$\psi(1, t) = \int \frac{s(2, t - r_{12}/c)}{4\pi r_{12}} dV_2. \quad (21.14)$$

To znamená, že pole v bodě (1) v čase t je rovno sumě všech kulových vln, které vycházejí z elementárních zdrojů nacházejících se v bodech (2) v časech $(t - r_{12}/c)$. Tak vypadá řešení naší vlnové rovnice pro libovolnou soustavu zdrojů.

Nyní vidíme, jak najít obecné řešení Maxwellových rovnic. Budeme-li pod ψ chápat skalární potenciál φ , bude zdrojová funkce s dána veličinou ρ/ϵ_0 . Nebo můžeme ψ pokládat za některou ze tří složek vektorového potenciálu A a s nahradit příslušnou složkou vektorové veličiny $\mathbf{j}/\epsilon_0 c^2$. Tímto způsobem můžeme ihned napsat řešení rovnic (21.4) a (21.5), známe-li všude hustotu náboje $\rho(x, y, z, t)$ a proudovou hustotu $\mathbf{j}(x, y, z, t)$. Mají tento tvar:

$$\varphi(1, t) = \int \frac{\rho(2, t - r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} dV_2 \quad (21.15)$$

$$A(1, t) = \int \frac{\mathbf{j}(2, t - r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_{12}} dV_2. \quad (21.16)$$

Pole E a B pak lze najít derivováním potenciálů φ a A podle vztahů (21.2) a (21.3). Mimochodem, lze dokázat, že φ a A vypočtené podle vztahů (21.15) a (21.16) opravdu splňují rovnost (21.6).

Vyřešili jsme Maxwellovy rovnice. Jsou-li v jakékoliv situaci dány proudy a náboje, můžeme z těchto integrálů bezprostředně najít potenciály, derivovat je a dostat pole. Tím jsme skončili s Maxwellovou teorií. A to nám umožňuje uzavřít kruh zpět k naší teorii světla, neboť abychom se napojili na náš dřívější výklad o světle, je už třeba pouze vypočítat elektrické pole pohybujícího se náboje. Jediné, co zbývá udělat, je vzít pohybující se náboj, z našich integrálů vypočítat poten-

ciály a potom derivováním najít E jako $-\nabla\varphi - \partial A/\partial t$. Měli bychom dostat výraz (21.1). Ukazuje se, že je to velmi mnoho práce, ale princip je takový.

Zde je tedy střed elektromagnetického „vesmíru“ – představuje úplnou teorii elektřiny a magnetizmu, jakož i světla, úplný popis polí vytvářených jakýmkoliv pohybujícím se nábojem a ještě všelicos dalšího. Je to stavba vybudovaná Maxwellem, kompletní ve své síle i kráse. Pravděpodobně jde o jedno z největších děl fyziky. Abychom vám připomněli jeho důležitost, sestavíme je celé do pěkného rámečku.

MAXWELLOVY ROVNICE:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

JEJICH ŘEŠENÍ:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\varphi(1, t) = \int \frac{\rho(2, t - r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} dV_2$$

$$\mathbf{A}(1, t) = \int \frac{\mathbf{j}(2, t - r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_{12}} dV_2$$

21.4 POLE OSCILUJÍCÍHO DIPÓLU

Ještě stále jsme nesplnili náš slib odvodit výraz (21.1) pro elektrické pole pohybujícího se bodového náboje. I s výsledky, které již máme, je to poměrně komplikovaná úloha. Najít vztah (21.1) se nám nepodařilo najít nikde v publikované literatuře, pouze v 1. dílu těchto přednášek.²⁹⁾ Podle toho vidíte, že opravdu není snadné jej odvodit. (Je pravda, že pro pole pohybujícího se náboje lze najít v literatuře mnohé jiné navzájem ekvivalentní výrazy.) Zde se budeme muset omezit jen na to, že na několika příkladech ukážeme, že vztahy (21.15) a (21.16) vedou ke stejným

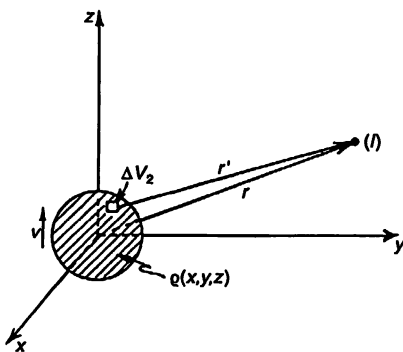
²⁹⁾ Vzorec byl zformulován R. P. Feynmanem kolem r. 1950 a uveden v jedné přednášce jako vhodný přístup k vysvětlení synchrotronového záření.

výsledkům jako výraz (21.1). Nejdříve ukážeme, že výraz (21.1) dává správné výsledky za jediné podmínky – totiž je-li pohyb nabitě částice nerelativistický. (Právě tento speciální případ pokryje 90 % nebo víc procent z toho, co jsme řekli o světle.)

Uvažujme takovou situaci, že náboj se nějak pohybuje v malé oblasti a najdeme, jaká jsou pole ve velké vzdálenosti odtud. Můžeme to zformulovat jinak: hledáme pole v libovolné vzdálenosti od bodového náboje, který velmi slabě kmitá sem a tam. Protože světlo obvykle vychází z neutrálních objektů, jakými jsou například atomy, budeme předpokládat, že náš oscilující náboj q se nachází v blízkosti nepohyblivého stejně velkého náboje s opačným znaménkem. Je-li vzájemná vzdálenost mezi středy těchto nábojů d , budou mít náboje dipólový moment $p = qd$, který pokládáme za funkci času. Lze očekávat, že když zkoumáme pole v těsné blízkosti nábojů, nemusíme se starat o zpoždění; elektrické pole bude přesně totéž jako to, které jsme vypočítali dříve pro elektrostatický dipól – jen když použijeme, přirozeně, okamžitý dipólový moment $p(t)$. Vzdálíme-li se však příliš daleko, měli bychom ve vyjádření pole najít člen, který klesá jako $1/r$ a závisí jen na zrychlení náboje ve směru kolmém na směr pozorování. Podívejme se, zda opravdu dostaneme takový výsledek.

Začneme výpočtem vektorového potenciálu A ze vztahu (21.16). Předpokládejme, že náš pohybující se náboj představuje malý útvar s hustotou náboje $\rho(x, y, z)$ a okamžitou rychlostí v . Proudová hustota $j(x, y, z)$ bude rovna $v\rho(x, y, z)$. Bude pohodlné zvolit souřadnicovou soustavu tak, aby její osa ležela ve směru v ; geometrii naší úlohy pak ukazuje obr. 21.2. Potřebujeme vypočítat integrál

$$\int \frac{j(2, t - r_{12}/c)}{r_{12}} dV_2. \quad (21.17)$$



Obr. 21.2 Potenciály v bodě (1) jsou určeny integrály hustoty náboje

Je-li velikost uvažovaného objemu náboje skutečně malá ve srovnání s r_{12} , můžeme ve jmenovateli položit r_{12} rovno vzdálenosti r od středu náboje a dát ho před integrál. Dále, i v čitateli hodláme nahradit $r_{12} = r$, ačkoliv to není docela správné. Není to správné proto, že bychom měli brát j řečneme v horní části objemu v trochu jiném čase, než jsme použili pro j v dolní části. Když v $j(t - r_{12}/c)$ klademe $r_{12} = r$, bereme proudovou hustotu pro celý objem v témže časovém okamžiku $(t - r/c)$. Je to aproximace, která bude dobrá pouze když je rychlost náboje mnohem menší než c . Proto nyní děláme nerelativistický výpočet. Po dosazení ρ za j získá integrál (21.17) tento tvar:

$$\frac{1}{r} \int v\rho(2, t - r/c) dV_2.$$

Protože má všechny náboj stejnou rychlost, je tento integrál roven součinu v/r a celkového náboje q . Ale qv je rovno právě změně dipólového momentu za jednotku času $\partial p/\partial t$, která se má ovšem počítat v retardovaném čase $(t-r/c)$. Pro vektorový potenciál tedy dostáváme tento výsledek:

$$A(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\dot{p}(t-r/c)}{r}. \quad (21.18)$$

Podle něj vytváří proud v proměnném dipólu vektorový potenciál ve tvaru kulových vln, které mají intenzitu zdroje rovnu $\dot{p}/4\pi\epsilon_0 c^2$.

Ze vztahu $B = \nabla \times A$ můžeme nyní dostat magnetické pole. Protože \dot{p} leží ve směru osy z , A má pouze složku z a v rozpisu $\text{rot } A$ existují pouze dvě nenulové derivace. Proto $B_x = \partial A_z / \partial y$ a $B_y = -\partial A_z / \partial x$. Nejdříve si všimněme B_x :

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\dot{p}(t-r/c)}{r}. \quad (21.19)$$

Abychom mohli derivovat, je třeba si uvědomit, že $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, takže

$$B_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \dot{p}(t-r/c) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \dot{p}(t-r/c). \quad (21.20)$$

Když si vzpomeneme, že $\partial r / \partial y = y/r$, dostaneme z prvního členu výraz

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{y \dot{p}(t-r/c)}{r^3}, \quad (21.21)$$

který klesá s r podle zákona $1/r^2$ (y/r je pro daný směr konstanta), tj. tak jako pole statického dipólu.

Druhý člen v (21.20), který vede k novým jevům, nabude po derivování tohoto tvaru:

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{y}{cr^2} \ddot{p}(t-r/c), \quad (21.22)$$

kde \ddot{p} označuje druhou derivaci p podle času t . Právě tento člen, který pochází z derivování čitatele v (21.19), souvisí s vyzářováním. Za prvé, popisuje pole, které klesá se vzdáleností jen jako $1/r$. Za druhé, závisí na zrychlení náboje. Nyní už můžeme postřehnout, jak hodláme dostat výsledek podobný výrazu (21.1'), který popisuje vyzářování světla.

Jde o tak zajímavý a důležitý výsledek, že stojí za podrobnější prozkoumání, z čeho pochází tento člen související s vyzářováním. Vycházíme z výrazu (21.18), který závisí na vzdálenosti jako $1/r$ a je podobný Coulombovu potenciálu až na to, že v čitateli obsahuje retardovaný argument. Proč potom při výpočtu polí nedostaneme derivováním podle prostorových souřadnic přímo pole měnící se podle zákona $1/r^2$, přirozeně, s příslušnými časovými zpožděními?

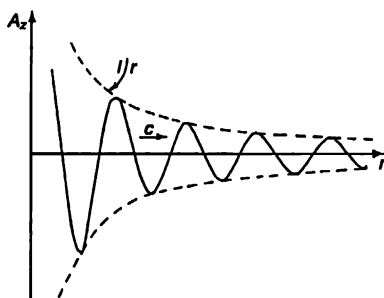
Můžeme to zjistit následujícím způsobem: Předpokládejme, že náš dipól kmitá sem a tam a koná harmonický pohyb. Pak platí, že

$$\dot{p} = \dot{p}_z = \dot{p}_0 \sin \omega t$$

a

$$A_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\omega \dot{p}_0 \cos \omega(t - r/c)}{r}.$$

Nakreslíme-li graf A_z jako funkce rv daném okamžiku, dostaneme takovou křivku, jakou ukazuje obr. 21.3. Její amplituda klesá jako $1/r$, ale kromě toho existují i prostorové kmity, které jsou omezeny obalovou křivkou $1/r$. Počítáme-li prostorové derivace, budou přímo úměrné náklonu křivky. Z obrázku vidíme, že na naší křivce existují náklony, které jsou mnohem strmější, než je náklon samotné křivky $1/r$. Vlastně je zřejmé, že pro danou frekvenci jsou extrémní náklony přímo úměrné amplitudě vlny, která se mění jako $1/r$. Tím se vysvětluje zákon poklesu vyzářovacího členu se vzdáleností.



Obr. 21.3 Graf velikosti vektoru A jako funkce vzdálenosti r v časovém okamžiku t v případě kulové vlny vyzářené kmitajícím dipólem

K tomu dochází proto, že změny ve zdroji se s časem při výstupu vlnění ze zdroje ven mění na změny v prostoru a magnetická pole závisí pouze na prostorových derivacích potenciálu.

Vraťme se zpět a dokončeme náš výpočet magnetického pole. Pro B_x jsme dostali dva členy (21.21) a (21.22), takže

$$B_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[-\frac{y \dot{p}(t - r/c)}{r^3} - \frac{y \ddot{p}(t - r/c)}{cr^2} \right].$$

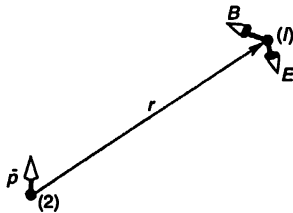
Přesně tímtož matematickým postupem dostaneme, že

$$B_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[\frac{x \dot{p}(t - r/c)}{r^3} + \frac{x \ddot{p}(t - r/c)}{cr^2} \right].$$

Vše můžeme shrnout do jednoho pěkného vektorového vzorce:

$$B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{[\dot{p} + (r/c)\ddot{p}]_{t-r/c} \times r}{r^3}. \quad (21.23)$$

Podívejme se na tento vzorec. Především při velmi velkých r má význam pouze člen s $\ddot{\mathbf{p}}$. Směr pole \mathbf{B} je dán vektorovým součinem $\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{r}$, jenž je kolmý na polohový vektor \mathbf{r} jakož i na zrychlení (obr. 21.4). Všechno vychází správně; kromě toho je to totožné s výsledkem, který dostáváme ze vztahu (21.1').



Obr. 21.4 Radiační pole E a B kmitajícího dipólu.

Nyní se podívejme na to, čeho jsme dosud nebyli zvyklí si všimnout – na to, co se děje při menších vzdálenostech od náboje. V článku 14.9 jsme odvodili Biotův-Savartův zákon pro magnetické pole proudového elementu. Zjistili jsme, že proudový element $\mathbf{j}dV$ přispívá k magnetickému poli hodnotou

$$d\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} dV, \quad (21.24)$$

uvědomíte-li si, že \mathbf{j} znamená elektrický proud, vidíte, že tento výraz je velmi podobný prvnímu členu ve vztahu (21.23). Je tu však jeden rozdíl. Ve vztahu (21.23) se má proud určit v čase $(t-r/c)$, což se ve vzorci (21.24) nepožaduje. Ve skutečnosti se však vztah (21.24) velmi dobře hodí pro malá r , neboť ve vztahu (21.23) má druhý člen tendenci vyrušit účinek zpoždění v prvním členu. A tak spolu dávají výsledek, který je velmi blízký vzorci (21.24), je-li r malé.

Můžeme se o tom přesvědčit tímto způsobem. Je-li r malé, $(t-r/c)$ se příliš neliší od t , a můžeme tedy výraz ve vztahu (21.23) v závorce rozvinout do Taylorovy řady. Z prvního členu dostáváme

$$\dot{\mathbf{p}}(t-r/c) = \dot{\mathbf{p}}(t) - \frac{r}{c} \ddot{\mathbf{p}}(t) + \dots$$

a z druhého členu pro tytéž mocniny r/c vyplyne, že

$$\ddot{\mathbf{p}}(t-r/c) = \ddot{\mathbf{p}}(t).$$

Provedeme-li sčítání, členy s $\dot{\mathbf{p}}$ se vyruší a zůstane pouze neretardovaný proud $\dot{\mathbf{p}}$, tj. $\dot{\mathbf{p}}(t)$ plus členy řádu $(r/c)^2$ nebo vyššího např. $(r/c)^2 \ddot{\mathbf{p}}/2$, které však budou při malých r velmi malé, takže se $\dot{\mathbf{p}}$ za dobu r/c změní pouze nepatrně.

Vzorec (21.23) tedy udává pole velmi blízka těm, která poskytuje teorie s okamžitým působením – mnohem bližší než pole vyplývající z teorie s okamžitým působením ve zpožděném čase. Je to proto, že efekty zpoždění prvního řádu se kompenzují druhým členem ve vzorci. Statické vzorce jsou velmi přesné, mnohem přesnější, než by se zdálo. Ke kompenzaci dochází, přirozeně, pouze v bodech v blízkosti náboje. Pro vzdálené body korekce selhává, neboť časová zpoždění už vyvolávají velmi velký efekt. Získává na důležitosti člen s $1/r$, související s vyzařováním.

Zatím stále stojíme před úlohou vypočítat elektrické pole a ukázat, že je totéž jako to, které vyplývá ze vztahu (21.1'). V případě velkých vzdáleností se už můžeme přesvědčit, že odpověď

vychází správně. Víme, že daleko od zdrojů, kde existuje pouze šířící se vlna, je E kolmé na B (a kromě toho i na r) a že $cB = E$ (obr. 21.4). Proto je E přímo úměrné zrychlení \dot{p} , což se dalo čekat i na základě vztahu (21.1').

Abychom elektrické pole dostali úplně pro všechny vzdálenosti, je nutné vypočítat elektrostatický potenciál. Když jsme při odvozování výrazu (21.18) pro A počítali integrál proudové hustoty, zanedbali jsme malé změny r v retardovaných členech. V případě elektrostatického potenciálu se tak postupovat nedá, neboť pak bychom dostali součin $1/r$ a integrálu hustoty náboje, což je konstanta. Tato aproximace je tedy příliš hrubá. Je nutné přejít k vyššímu řádu. Avšak místo toho, abychom se pustili přímo do výpočtu této přesnější aproximace můžeme provést ještě něco – můžeme skalární potenciál určit z (21.6) a použít přitom vektorový potenciál, který jsme už našli. Divergence vektoru A je v našem případě rovna pouze $\partial A_z / \partial z$, neboť A_x a A_y jsou identicky nulové. Derivujeme-li tak, jako když jsme počítali B , dostaneme

$$\nabla \cdot A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[\dot{p}(t-r/c) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \dot{p}(t-r/c) \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[-\frac{z\dot{p}(t-r/c)}{r^3} - \frac{z\dot{p}(t-r/c)}{cr^2} \right]$$

nebo ve vektorové symbolice

$$\nabla \cdot A = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{[\dot{p} + (r/c)\ddot{p}]_{t-r/c} \cdot r}{r^3}.$$

Na základě (21.6) dostáváme tuto rovnici pro φ .

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{[\dot{p} + (r/c)\ddot{p}]_{t-r/c} \cdot r}{r^3}.$$

Integrovaním podle t pouze odstraní jednu tečku za každým p , takže

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{[p + (r/c)\dot{p}]_{t-r/c} \cdot r}{r^3}. \quad (21.25)$$

(Integrační konstanta by odpovídala nějakému přidanému statickému poli, které by, přirozeně, mohlo existovat a sčítalo by se s naším proměnným polem, Pro kmitající dipól jsme předpokládali, že žádné statické pole neexistuje.)

Nyní můžeme ze vzorce

$$E = -\nabla\varphi - \frac{\partial A}{\partial t}$$

vypočítat elektrické pole. Protože jde o zdlouhavý, ale jednoduchý výpočet [je třeba při něm pamatovat na to, že moment $p(t-r/c)$ a jeho časové derivace závisejí na x , y a z prostřednictvím zpoždění r/c], uvedeme tu pouze výsledek:

$$E(r, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[-\dot{p}^* - 3 \frac{(\dot{p}^* \cdot r) r}{r^2} + \frac{1}{c^2} \{ \ddot{p}(t-r/c) \times r \} \times r \right] \quad (21.26)$$

kde

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{p}(t - r/c) + \frac{r}{c} \dot{\mathbf{p}}(t - r/c). \quad (21.27)$$

Ačkoliv tento výraz vypadá dost složitě, lze jej snadno interpretovat. Vektor \mathbf{p}^* je retardovaný dipólový moment a potom „opravený“ na retardaci, takže oba členy s \mathbf{p}^* v (21.26) dávají při malém r statické pole dipólu [kapitola 6, vztah (6.14)]. Při velkém r převládá třetí člen, obsahující $\dot{\mathbf{p}}$ a elektrické pole je přímo úměrné zrychlení nábojů, kolmé na \mathbf{r} a ležící vlastně ve směru průmětu $\dot{\mathbf{p}}$ do roviny kolmé na \mathbf{r} .

Tento výsledek souhlasí s tím, co jsme dostali použitím výrazu (21.1). Samozřejmě, vztah (21.1) je obecnější – platí pro každý pohyb, zatímco vztah (21.26) platí pouze pro pohyby v malé oblasti, při nichž můžeme na hranicích zdroje pokládat zpoždění r/c za konstantu. V každém případě jsme nyní položili základy pod náš celý předchozí výklad světla (s výjimkou některých věcí, o nichž pojednává 34. kapitola 1. dílu), protože se celý zakládal na posledním členu ve vztahu (21.26). Dále budeme hovořit o tom, jak lze dostat pole pro rychleji se pohybující náboje, což nás přivede k relativistickým jevům probíraným v kapitole 34 dílu 1.

21.5 POTENCIÁLY POHYBUJÍCÍHO SE NÁBOJE. LIÉNARDOVO A WIECHERTOVO OBECNÉ ŘEŠENÍ

V předchozím článku jsme si věci zjednodušili tím, že při výpočtu integrálu pro A jsme uvažovali pouze malé rychlosti. Ale tím jsme pustili ze zřetele jeden důležitý bod jakož i další bod, kde se velmi snadno udělá chyba. Proto se nyní pustíme do nového výpočtu potenciálů v případě, že se bodový náboj pohybuje tentokrát jakýmkoliv způsobem – dokonce i relativistickou rychlostí. Jeho výsledek nám poskytne úplný popis elektrických a magnetických jevů vyvolaných elektrickými náboji. Potom bude možné derivováním odvodit i vztah (21.1) a náš výklad se tím završí. Mějte tedy s námi strpení.

Pokusme se vypočítat skalární potenciál $\varphi(1)$ v bodě (x_1, y_1, z_1) , který pochází od *bodového* náboje, například elektronu, pohybujícího se libovolným způsobem. „Bodovým“ nábojem rozumíme velmi malou nabitou kuličku s hustotou náboje $\varrho(x, y, z)$ a přitom scvrknutou tolik, jak jen chcete. φ můžeme určit ze vztahu (21.15)

$$\varphi(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\varrho(2, t - r_{12}/c)}{r_{12}} dV_2. \quad (21.28)$$

Zdalo by se, že odpověď bude – a téměř každý se bude v první chvíli domnívat –, že integrál z ϱ přes takovýto „bodový“ náboj je prostě roven celkovému náboji q , tj. že

$$\varphi(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{q}{r'_{12}} \quad (\text{nesprávně}).$$

Pod r'_{12} rozumíme polohový vektor jdoucí z náboje v bodě (2) do bodu (1) v retardovaném čase $(t - r_{12}/c)$. Ale to je nesprávné.

Správná odpověď je

$$\varphi(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'_{12}} \cdot \frac{1}{1 - v_r/c}, \quad (21.29)$$

kde v_x je složka rychlosti náboje rovnoběžná s r'_{12} , tj. směřující k bodu (1). Nyní si ukážeme, proč je tomu tak. Abychom usnadnili sledování našeho důkazu, provedeme výpočet nejdříve pro „bodový“ náboj, který má tvar malé nabitě krychle pohybující se směrem k bodu (1) rychlostí v (obr. 21.5 a). Nechť má hrana krychle délku a , přičemž předpokládáme, že a je mnohem, mnohem menší než r_{12} , tj. vzdálenost bodu (1) od středu náboje.

Abychom určili hodnotu integrálu ve vztahu (21.28), vrátíme se i k samotným základům integrálního počtu – náš integrál napíšeme jako sumu

$$\sum_{i=1}^N = \frac{\rho_i \Delta V_i}{r_i} \quad (21.30)$$



Obr. 21.5 a) „Bodový“ náboj, uvažovaný jako malé rozdělení náboje ve tvaru krychle, pohybující se rychlostí v k bodu (1),
b) Element objemu ΔV_i použitý při výpočtu potenciálů

kde r_i je vzdálenost od bodu (1) do určitého elementu objemu ΔV_i a ρ_i je hustota náboje v ΔV_i v čase $t_i = t - r_i/c$. Protože je vždy $r_i \gg a$, bude pohodlné vzít naše ΔV_i ve tvaru tenkých pravoúhlých plátek kolmých na r_{12} (obr. 21.5 b).

Začneme tím, že vezmeme elementy objemu ΔV_i s nějakou tloušťkou w , která je mnohem menší než a . Jednotlivé elementy budou vypadat tak, jak ukazuje obr. 21.6 a, kde jsme jich složili více než je třeba na pokrytí celého náboje. Ale samotný náboj jsme tam neukázali, a to z dobrého důvodu. Kam jej totiž nakreslit? Pro každý objemový element ΔV_i máme ρ brát v čase $t_i = (t - r_i/c)$, ale když se náboj pohybuje, je to pro každý objemový element ΔV_i na jiném místě.

Řekněme, že začneme objemovým elementem „1“ na obr. 21.6 a, který jsme vybrali tak, aby v čase $t_1 = (t - r_1/c)$ zadní okraj náboje zabíral element ΔV_i (obr. 21.6 b). Potom při vyhodnocování $\rho_2 \Delta V_2$ musíme použít polohu náboje v trochu pozdějším čase $t_2 = (t - r_2/c)$, kdy se náboj nachází v poloze, kterou ukazuje obr. 21.6 c. A tak postupně dále pro $\Delta V_3, \Delta V_4$ atd. Nyní už můžeme počítat sumu (21.30).

Je-li w tloušťka každého elementu ΔV_i , jeho objem je wa^2 . Každý element objemu překrývající rozdělení náboje obsahuje množství náboje $wa^2 \rho$, kde ρ je hustota náboje uvnitř naší krychle, kterou pokládáme za homogenní. Je-li vzdálenost od bodu (1) velká, uděláme zanedbatelnou chybu, položíme-li všechna r_i ve jmenovateli rovna nějaké střední hodnotě, řekněme retardované poloze r' středu náboje. Pro sumu (21.30) tak dostaneme výraz

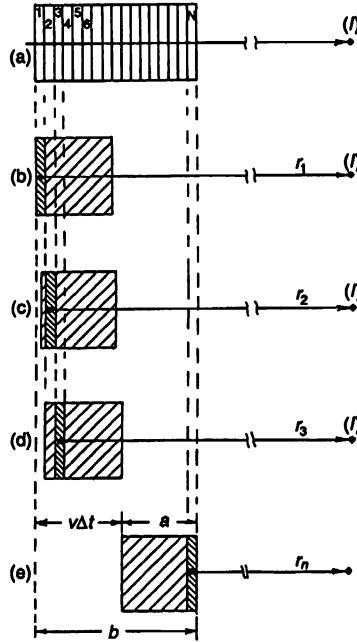
$$\sum_{i=1}^N \frac{\rho w a^2}{r'}$$

přičemž ΔV_N je poslední element ΔV_i , který překrývá nábojové rozdělení (obr. 21.6 e). Je zřejmé,

že suma je rovna

$$N \frac{\rho w a^2}{r'} = \frac{\rho a^3}{r'} \left(\frac{Nw}{a} \right).$$

ρa^3 je právě celkový náboj q a Nw je délka b vyznačená v části (e) obrázku.



Obr. 21.6 Integrovaní $\rho(t - r'/c)$ d V v případě pohybujícího se náboje

Tak dostáváme

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'} \left(\frac{b}{a} \right). \quad (21.31)$$

Čemu je rovno b ? Je rovno délce hrany nabitě krychle zvětšené o vzdálenost, kterou náboj překonal mezi časovými okamžiky $t_1 = (t - r_1/c)$ a $t_N = (t - r_N/c)$, tj. za časový interval

$$\Delta t = t_N - t_1 = (r_1 - r_N)/c = b/c.$$

Je-li rychlost náboje v , je překonaná vzdálenost $v\Delta t = vb/c$. Délka b je však rovna této vzdálenosti zvětšené o a :

$$b = a + \frac{v}{c} b.$$

Vyřešením této rovnice vzhledem k b dostáváme

$$b = \frac{a}{1 - (v/c)}.$$

Pod v rozumíme rychlost v retardovaném čase $t' = (t - r'/c)$, což můžeme vyznačit pomocí zápisu $[1 - v/c]_{\text{ret}}$ a rovnice (21.31) pro potenciál tak získá tvar

$$\varphi(1, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'} \frac{1}{[1 - v/c]_{\text{ret}}}.$$

Tento výsledek souhlasí s naším tvrzením (21.29). Obsahuje korekční člen, který je tam proto, že když integrujeme přes oblast náboje, náboj se pohybuje. Pohybuje-li se směrem k bodu (1), vzrůstá jeho příspěvek k integrálu v poměru b/a . Proto je správná hodnota integrálu rovna q/r' , tj. $1/[1 - v/c]_{\text{ret}}$.

Nesměřuje-li rychlost náboje k bodu (1), v němž se pozorování děje, můžete se přesvědčit, že se uplatňuje složka rychlosti náboje směřující do bodu (1). Označíme-li ji v_r , bude korekční součinitel roven $1/[1 - v_r/c]_{\text{ret}}$. Kromě toho lze analýzu, kterou jsme udělali, přesně stejným způsobem provést pro nábojové rozdělení jakéhokoliv tvaru – nemusí jít jen o krychli. A konečně, protože „velikost“ náboje q v konečném výsledku nevystupuje, platí stejný výsledek i když necháme náboj scvrknout se na jakoukoliv velikost – tedy i do bodu. Platí proto obecně, že pro bodový náboj pohybující se jakoukoliv rychlostí se skalární potenciál vyjádří takto:

$$\varphi(t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r' [1 - (v_r/c)]_{\text{ret}}}. \quad (21.32)$$

Tento vztah je často psán v ekvivalentním tvaru:

$$\varphi(1, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 [r - (v \cdot r/c)]_{\text{ret}}}, \quad (21.33)$$

kde r je vektor vycházející z náboje do bodu (1), v němž se φ zjišťuje a hodnoty veškerých veličin v závorce je třeba brát v retardovaném čase $t' = t - r'/c$.

Totéž nastane, když ze vztahu (21.16) počítáme A pro bodový náboj. Proudová hustota je rovna qv a integrál ϱ je stejný, jako jsme našli v případě φ . Vektorový potenciál je tedy roven

$$A(1, t) = \frac{qv}{4\pi\epsilon_0 c^2 [r - (v \cdot r/c)]_{\text{ret}}}. \quad (21.34)$$

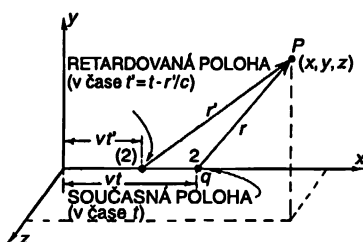
Potenciály bodového náboje v této formě poprvé odvodili Liénard a Wiechert. Nazývají se *Liénardovy–Wiechertovy potenciály*.

Abychom uzavřeli kruh a dostali se zpět k vztahu (21.1), je už jen třeba vypočítat E a B z těchto potenciálů (pomocí vztahů $B = \nabla \times A$ a $E = -\nabla\varphi - \partial A/\partial t$). Je to čistě aritmetická záležitost, ale výpočet je trochu pracný, a tak ho nebudeme podrobně uvádět. Snad nám uvěříte, že vztah (21.1) je ekvivalentní s námi odvozeným Liénardovým–Wiechertovým potenciálem.³⁰⁾

³⁰⁾ Máte-li dostatek papíru a času, můžete se pokusit sami se tím pokousat. Pro tento případ vám dáme dvě rady: Za prvé, nezapomeňte, že derivace r' jsou složité, neboť jde o funkci t' . Za druhé, nesazte se vzorec (21.1) odvodit, ale proveďte v něm všechny derivace a pak to, co dostanete, porovnejte s tím E , které jste vypočítali z potenciálů (21.33) a (21.34).

21.6 POTENCIÁLY NÁBOJE POHYBUJÍCÍHO SE ROVNOMĚRNĚ: LORENTZŮV VZOREC

Dále chceme použít Liénardovy–Wiechertovy potenciály a jejich pomocí najít pole náboje pohybujícího se stálou rychlostí po přímce. Později to budeme dělat znovu – s použitím principu relativity. Už víme, jaké jsou potenciály, nacházíme-li se v souřadnicové soustavě pevně spojené s nábojem. Když se náboj pohybuje, můžeme všechno vypočítat pomocí relativistické transformace z jedné vztažné soustavy do druhé. Avšak teorie relativity má svůj původ v teorii elektřiny a magnetizmu. Vzorce pro Lorentzovu transformaci (kapitola 15, díl 1.) objevil Lorentz při studiu rovnic elektřiny a magnetizmu. Proto abyste měli představu, odkud se co vzalo, chtěli bychom tu ukázat, že Maxwellovy rovnice vedou k Lorentzově transformaci. Začneme výpočtem potenciálů náboje pohybujícího se stálou rychlostí, a to přímo z elektrodynamiky Maxwellových rovnic. Ukázali jsme však, že Maxwellovy rovnice vedou k potenciálům pohybujícího se náboje, které jsme dostali v předchozím článku. Proto když použijeme tyto potenciály, používáme samotnou Maxwellovu teorii.



Obr. 21.7 Určování potenciálu v bodě P , kdy se náboj rovnoměrně pohybuje podél osy x

Předpokládejme, že máme náboj pohybující se rychlostí v podél osy x . Zajímají nás potenciály v bodě $P(x, y, z)$ (obr. 21.7). Je-li $t=0$ čas, kdy se náboj nachází v počátku souřadnicové soustavy, v čase t bude v bodě $x = vt$, $y = z = 0$. Co tu však potřebujeme znát, je jeho poloha v retardovaném čase

$$t' = t - \frac{r'}{c}. \quad (21.35)$$

kde r' je vzdálenost bodu P od náboje *v* retardovaném čase. V tomto pozdějším časovém okamžiku t' se náboj nacházel v poloze $x = vt'$, takže

$$r' = \sqrt{(x - vt')^2 + y^2 + z^2}. \quad (21.36)$$

Abychom našli r' nebo t' , musíme řešit soustavu rovnic, skládající se z této a předcházející rovnice. Nejdříve z rovnice (21.35) vyjádříme r' a dosadíme do rovnice (21.36). Umocníme-li pak obě strany této rovnice na druhou, dostaneme tuto kvadratickou rovnici pro t'

$$c^2 (t - t')^2 = (x - vt')^2 + y^2 + z^2.$$

Po umocnění dvojčlenů a uspořádání podle mocnin t' přejde rovnice do tvaru

$$(v^2 - c^2) t'^2 - 2(xv - c^2 t) t' + x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = 0.$$

Jejím řešením vzhledem k t' dostaneme

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) t' = t - \frac{vx}{c^2} - \frac{1}{c} \sqrt{(x - vt')^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (y^2 + z^2)}. \quad (21.37)$$

Abychom našli r' , dosadíme tento výraz pro t' do vztahu

$$r' = c(t - t').$$

Nyní jsme připraveni najít ze vztahu (21.33) φ . Protože v je konstantní, dostáváme, že

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r' - (v \cdot r' / c)}. \quad (21.38)$$

Složka v ve směru vektoru r' je rovna $v(x - vt') / r'$, takže $v \cdot r'$ je rovno právě $v(x - vt')$ a celý jmenovatel lze přepsat takto:

$$c(t - t') - \frac{v}{c}(x - vt') = c \left[t - \frac{vx}{c^2} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) t' \right].$$

Dosadíme-li sem za $(1 - v^2/c^2) t'$ ze vztahu (21.37), dostaneme nakonec pro φ tento výsledek

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (y^2 + z^2)}}.$$

Tento vztah bude pochopitelnější, zapíšeme-li jej ve tvaru

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \left[\left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)^2 + y^2 + z^2 \right]^{1/2}}}. \quad (21.39)$$

Vektorový potenciál A je roven témuž výrazu násobenému součinitelem v/c^2 :

$$A = \frac{v}{c^2} \varphi.$$

Ve výsledku (21.39) můžete zřetelně vidět začátek Lorentzovy transformace. Kdyby se náboj nacházel v počátku souřadnicové soustavy pevně s ním spojené, jeho potenciál by udával vzorec

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}.$$

Podíváme-li se na náboj z pohybující se vztažné soustavy, jeví se nám to tak, že souřadnice je třeba transformovat takto:

$$x \rightarrow \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$y \rightarrow y,$$

$$z \rightarrow z.$$

To je právě Lorentzova transformace a tady jsme v podstatě prošli cestu, kterou Lorentz objevil.

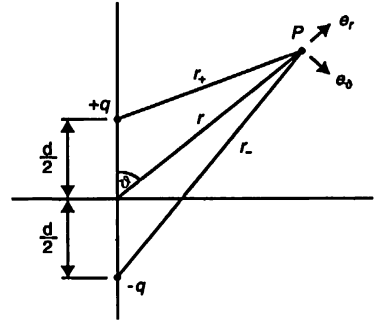
Ale co se zbývá sčítáním součinitelem $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, který taktéž vystupuje ve vztahu (21.39)? A kromě toho, jak vzniká vektorový potenciál A , když ve vztažné soustavě spojené s částicí je všude roven nule? Později ukážeme, že A a φ spolu vytvářejí tenzor podobně jako hybnost p a celková energie W částice. Dodatečný výraz $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ ve vztahu (21.39) představuje tentýž součinitel, který se vyskytuje vždy, když se transformují složky tenzoru právě tak, jako se hustota ρ transformuje na $\rho/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Ze vztahů (21.4) a (21.5) je vlastně téměř zřejmé, že A a φ jsou složkami tenzoru, neboť už v kapitole 13 jsme ukázali, že j a ρ představují složky čtyřvektoru.

Později budeme teorii relativity v elektrodynamice probírat podrobněji; zde jsme pouze chtěli ukázat, jak Maxwellovy rovnice přirozeně vedou k Lorentzově transformaci. Potom nebudete překvapeni, když zjistíte, že zákony elektřiny a magnetizmu platí beze změny i Einsteinově teorii relativity. Nebude je třeba „upravovat“, jako jsme to museli udělat s Newtonovými zákony mechaniky.

PŘÍKLADY A CVIČENÍ

21.1 ■ Odvodte podrobně výraz (21.26).

21.2 ■ Pomocí výrazu (21.1) můžeme najít elektrické pole vytvářené pohyblivým se nábojem. Uvažujme dipól sestávající z kladného a záporného náboje, které kmitají vzhledem k počátku souřadnic podél osy z tak, že souřadnice kladného náboje se mění v čase podle zákona $z_+ = (d/2)\cos\omega t$ a záporného náboje jako $z_- = -(d/2)\cos\omega t$. Dipólový moment takové soustavy nábojů je $p = e_z q d \cos\omega t$. Ukažte, že elektrické pole dipólu získané pomocí zmíněného výrazu má tvar ($p = qd$):



$$E_\varphi = 0,$$

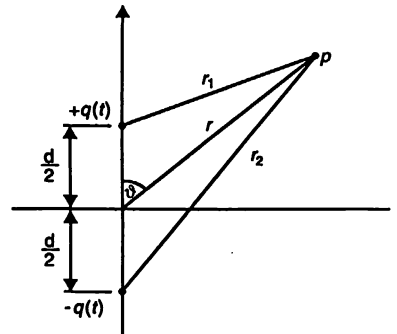
$$E_\theta = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \sin\theta \left[\left(-\frac{\omega^2}{c^2 r} + \frac{1}{r^3} \right) \cos\omega \left(r - \frac{t}{c} \right) - \frac{\omega}{cr^2} \sin\omega \left(r - \frac{t}{c} \right) \right],$$

$$E_r = -\frac{2p}{4\pi\epsilon_0} \cos\theta \left[\frac{1}{r^3} \cos\omega \left(r - \frac{t}{c} \right) - \frac{\omega}{cr^2} \sin\omega \left(r - \frac{t}{c} \right) \right].$$

Při řešení úlohy předpokládejte, že bod P se nachází ve vzdálenosti $r > d$ od počátku (viz obrázek). Pro jednotkové vektory platí $e_{r_+} \approx e_{r_-} = e_r$ a vektory $d e_{r_+} / dt$, $d^2 e_{r_+} / dt^2$ mají směr, který je prakticky shodný se směrem vektoru e_θ .

21.3 ■ Využijte symetrii Maxwellových rovnic a známý průběh elektrického a magnetického pole oscilujícího elektrického dipólu a najděte pole oscilujícího magnetického dipólu. (Elektrické pole bylo odvozeno v úloze 21.2, magnetické pole můžete vzít z druhého výrazu rovnice (21.1)). Pole magnetického dipólu musí souhlasit s polem smyčky, již protéká proud $I = I_0 \cos\omega t$, a která má poloměr a , kde $a < d/\omega$.

21.4 ■ V úloze 21.2 byl dipól utvořen dvěma náboji kmitajícími kolem počátku souřadnic. Dipól, jehož velikost se mění v čase harmonicky může však být sestrojen i jinak. Můžeme vzít dvě vodivé koule, spojit je vodičem délky d a vodičem pustit střídavý proud. Na koncích vodiče tak vznikne proměnný náboj $\pm q(t)$, přičemž vodič zůstane jako celek neutrální. Náboj $q(t)$ můžeme považovat za reálnou část výrazu $Q_0 e^{i\omega t}$. V libovolném bodě P ve vzdálenosti $r > d$ od dipólu (viz obrázek) dává integrální vyjádření retardovaného potenciálu přesný výraz pro φ .



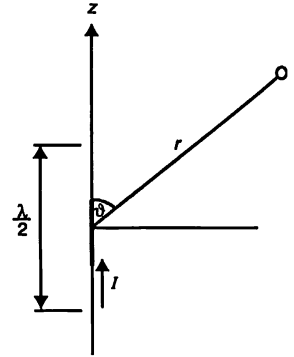
$$\varphi = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\cos\omega(t-r_1/c)}{r_1} - \frac{\cos\omega(t-r_2/c)}{r_2} \right].$$

a) Za předpokladu $\omega d/2c < 1$ ukažte že $\varphi = \frac{Q_0 d \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\frac{1}{r} \cos\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega}{c} \sin\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]$.

b) Dále ukažte, že $A_z \approx -\frac{Q_0 d \sin \omega(t-r/c)}{4\pi \epsilon_0 c^2 r}$.

c) Přesvědčte se, že z vámi získaných potenciálů plynou správné výrazy pro elektrické a magnetické pole.

21.5 ■ Anténa projektovaná na kmitočet $\omega = 2\pi c/\lambda$ je zhotovena ze dvou kolineárních vodičů čtvrtinové délky (viz obrázek). K anténě je přiloženo sinusoidálně proměnné napětí požadované frekvence. V anténě vznikne rozdělení proudů, které lze s velkou přesností popsat výrazem $I = -I_0 \sin(\omega t) \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right)$, $\left(-\frac{\lambda}{4} < z < \frac{\lambda}{4}\right)$. Pro výpočet pole záření můžeme anténu reprezentovat superpozicí velkého počtu dipólů délky Δz , přičemž každý z nich je umístěn v bodě z . Velikost dipólového momentu se mění od dipólu k dipólu.



a) Ukažte, že dipólový moment každého takového dipólu je třeba

$$\text{brát ve tvaru } \Delta p = \left\{ \frac{I_0}{\omega} \cos \frac{2\pi z}{\lambda} \cos \omega t \right\} \Delta z.$$

b) Ukažte, že na velkých vzdálenostech ($r \gg d\omega$) jsou elektrické a magnetické pole antény

$$E_\vartheta = \frac{2I_0}{4\pi \epsilon_0 cr} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right), \quad B_\varphi = \frac{1}{c} E_\vartheta.$$

c) Nakreslete přibližný průběh závislosti E_ϑ na úhlu ϑ . Na témž obrázku znázorněte i závislost E_ϑ na úhlu ϑ pro jeden dipól a porovnejte obě křivky.

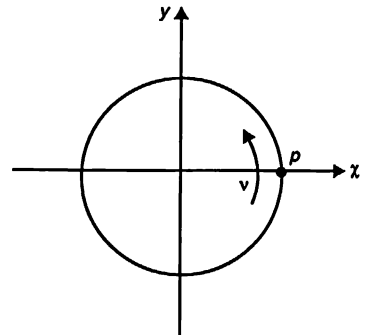
21.6 ■ Částice má náboj q a pohybuje se po kružnici poloměru a rychlostí v .

a) Najděte skalární potenciál φ ve středu kružnice v okamžiku, kdy se částice nachází v bodě P (viz obrázek).

b) Určete vektorový potenciál A ve středu kružnice v témž okamžiku.

c) Budete-li znát potenciály v blízkosti středu kružnice, použijte vztahy (18.16) a (18.19) a najděte elektrické a magnetické pole ve středu kružnice. Jak je orientován vektor intenzity elektrického pole vzhledem k polohovému vektoru bodu P ?

d) Vypočítejte tato pole pomocí vzorce (21.1). V této úloze *nepředpokládáme*, že rychlost v je mnohem menší než rychlost světla ve vakuu c .



S

trídavé obvody

22.1 IMPEDANCE

22.2 GENERÁTORY

22.3 SÍŤ S IDEÁLNÍMI PRVKY. KIRCHHOFFOVA PRAVIDLA

22.4 EKVIVALENTNÍ OBVODY

22.5 ENERGIE

22.6 ŘETĚZOVÝ OBVOD

22.7 FILTRY

22.8 JINÉ PRVKY OBVODŮ

22.1 IMPEDANCE

Přečtěte si znovu: kapitolu 22, díl 1, Algebra
kapitolu 23, díl 1, Rezonance
kapitolu 25, díl 1, Lineární systémy. Přehled

Většina naší práce v těchto přednáškách směřovala k sestavení úplných Maxwellových rovnic. V předchozích dvou kapitolách jsme hovořili o důsledcích těchto rovnic. Zjistili jsme, že vystihují jak všechny statické jevy, které jsme předtím řešili, tak i úkazy související s elektromagnetickými vlnami a světlem, které jsme do určité míry probrali v 1. díle. Z Maxwellových rovnic vyplývá jedno i druhé v závislosti na tom, zda se pole počítají v těsné blízkosti proudů a nábojů nebo velmi daleko od nich. O prostřední oblasti nelze říci mnoho zajímavého; žádné zvláštní úkazy tam nevznikají.

Naproti tomu v nauce o elektríně a magnetizmu zůstává ještě několik témat, které je třeba probrat. Chceme pohovořit o problému relativity a Maxwellových rovnic, tj. o tom, co se děje, když se na Maxwellovy rovnice díváme ve vztahu k pohybujícím se souřadnicovým soustavám. Kromě toho existuje problém zachování energie v elektromagnetických systémech. Pak je tu široké téma elektromagnetických vlastností látek; totiž s výjimkou studia vlastností dielektrik jsme až dosud zkoumali pouze elektrická pole ve vakuu. A ačkoliv jsme se světlem zabývali v nějaké míře v 1. díle, je ještě několik věcí, které bychom rádi probrali znovu z hlediska rovnic pole.

Jmenovitě chceme opět pojednat o indexu lomu, zejména v kondenzovaných látkách. A konečně existují jevy spojené s vlněním omezeným na ohraničenou oblast prostoru. Stručně jsme se takového problému dotkli, když jsme studovali zvukové vlny. I Maxwellovy rovnice vedou k řešení představujícím ohraničené vlny elektrických a magnetických polí. Tento problém, který má důležité technické aplikace, budeme probírat v následujících kapitolách. Abychom se k němu dostali, pojednáme nejprve o vlastnostech elektrických obvodů při nízkých frekvencích. Umožní nám to porovnat případy, v nichž lze použít téměř statická přiblížení Maxwellových rovnic, s těmi, v nichž jsou určujícími vysokofrekvenční efekty.

Sestupujeme tedy z velkých, a pouze pro zasvěcené určených, výšek několika kapitol, abychom se pustili do takového relativně přízemní tématu, jakým jsou elektrické obvody. Uvidíme však, že i takové pozemské téma, zkoumá-li se dostatečně podrobně, může obsahovat velké komplikace.

Některé z vlastností elektrických obvodů jsme diskutovali už v kapitolách 23 a 25 dílu 1. Teď budeme probírat totéž znovu, ale podrobněji. Opět se budeme zabývat pouze lineárními soustavami a jen sinusově se měnícími napětími a proudy. Všechna napětí a proudy můžeme reprezentovat komplexními čísly, a to pomocí exponenciální symboliky popsané v kapitole 22 dílu 1. Napětí $U(t)$, měnící se s časem, se tedy zapíše takto:

$$U(t) = \hat{U} e^{i\omega t}, \quad (22.1)$$

kde \hat{U} představuje komplexní číslo, které nezávisí na t . Rozumí se při tom, samozřejmě, že skutečné, v čase se měnící, napětí $U(t)$ udává reálná část komplexní funkce vystupující na pravé straně uvedené rovnosti.

Podobně budeme všechny naše další v čase se měnící veličiny chápat jako měnící se sinusově s toutéž frekvencí ω . Budeme tedy psát

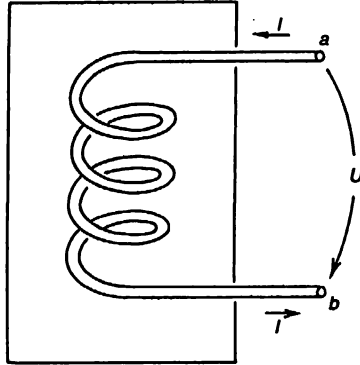
$$\begin{aligned} I &= \hat{I} e^{i\omega t} \quad (\text{proud}) \\ \mathcal{E} &= \hat{\mathcal{E}} e^{i\omega t} \quad (\text{elektromotorické napětí}) \\ E &= \hat{E} e^{i\omega t} \quad (\text{intenzita elektrického pole}) \end{aligned} \quad (22.2)$$

atd.

V našich rovnicích budeme většinou psát symboly U, I, \mathcal{E}, \dots (místo $\hat{U}, \hat{I}, \hat{\mathcal{E}} \dots$). Přitom si však budeme pamatovat, že závislosti na čase jsou dány vztahy (22.2).

Když jsme dříve hovořili o obvodech, počítali jsme s tím, že takové věci jako indukčnosti, kapacity a odpory jsou vám známy. Nyní se chceme trochu podrobněji podívat na to, co se těmito idealizovanými prvky obvodů rozumí. Začneme s indukčností.

Indukčnost se v praxi vytvoří tak, že se navine mnoho závitů drátu do tvaru cívky, přičemž oba konce drátu jsou vyvedeny na svorky umístěné v určité vzdálenosti od cívky (*obr. 22.1*). Přitom je třeba předpokládat, že magnetické pole, vytvořené proudy v cívce, se příliš nerozptyluje do okolního prostoru a neinteraguje s jinými částmi obvodu. Obvykle je toho dosaženo navinutím cívky do tvaru prstence nebo ohraničením magnetického pole navinutím cívky na vhodné železné jádro, nebo konečně uložením cívky do vhodné kovové schránky (schématicky naznačené na *obr. 22.1*). V každém případě počítáme s tím, že ve vnější oblasti blízko svorek a a b je magnetické pole zanedbatelné. Dále můžeme předpokládat, že lze zanedbat i elektrický náboj, který se v procesu vytváření elektrických polí objevuje na povrchu drátu.



Obr. 22.1 Induktor

Uplatní-li se všechny tyto aproximace, dostáváme to, co nazveme ideálním induktorem. (Později se vrátíme zpět a budeme hovořit o procesech v reálné cívce.) Tvrdíme, že v případě ideálního induktoru je napětí na svorkách rovno $L(dI/dt)$. Podíváme se, proč je tomu tak. Když cívkou prochází elektrický proud, vzniká v ní magnetické pole, jehož velikost je přímo úměrná proudu. Mění-li se proud v čase, magnetické pole se mění taktéž. Obecně je rot E rovna $-dB/dt$ nebo jinak vyjádřeno, křivkový integrál E po kterékoliv uzavřené křivce je roven záporně vzaté rychlosti změny toku vektoru B plochou smyčky. Uvažujme například následující křivku: začněme na svorce a , postupujme cívkou (přičemž stále zůstáváme uvnitř drátěného vodiče) ke svorce b a vzduchem ve vnějším prostoru se vraťme na svorku a . Křivkový integrál vektoru E po této uzavřené dráze lze vyjádřit jako součet dvou integrálů

$$\oint E \cdot ds = \int_a^b E \cdot ds + \int_b^a E \cdot ds. \quad (22.3)$$

cívkou mimo cívku

Jak jsme se přesvědčili už dříve, uvnitř dokonalého vodiče nemohou existovat žádná elektrická pole. (I nejmenší pole by vyvolala nekonečné proudy.) Proto je integrál z a do b cívkou roven nule. Celý příspěvek ke křivkovému integrálu E pochází z dráhy vedené mimo cívku od svorky b ke svorce a . Pokud jsme předpokládali, že v prostoru mimo „schránku“ žádná magnetická pole nejsou, nezávisí tato část integrálu na zvolené dráze a můžeme tedy pro oba výstupy zavést potenciály. Jejich rozdíl je to, co nazýváme napětím U , takže

$$U = -\int_b^a E \cdot ds = -\oint E \cdot ds.$$

Úplný křivkový integrál představuje to, co jsme již dříve nazvali elektromotorickým napětím a je roven rychlosti změny magnetického indukčního toku v cívce. Taktéž už jsme dříve viděli, že toto elektromotorické napětí je rovno záporně vzaté rychlosti změny elektrického proudu, takže bude

$$U = -\mathcal{E} = L \frac{dI}{dt},$$

kde L je indukčnost cívky. Pokud $dI/dt = i\omega I$, dostáváme

$$U = i\omega LI. \quad (22.4)$$

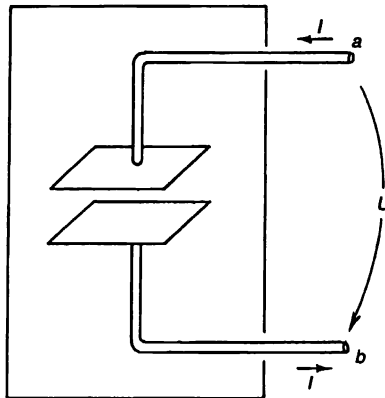
Způsob, jakým jsme popsali ideální indukčnost, ilustruje obecný přístup k obvodu s ideálními prvky obvykle nazývaném „obvod se soustředěnými parametry“. Vlastnosti takových prvků lze úplně popsat pomocí proudů a napětí na jejich svorkách. Udělají-li se vhodné aproximace, je možné pustit ze zřetele velkou složitost polí, vznikajících uvnitř příslušného objektu. To, co se děje uvnitř, je odděleno od toho, co se děje venku.

Pro všechny prvky obvodu najdeme vztahy, připomínající (22.4), v nichž je napětí přímo úměrné proudu, přičemž součinitelem úměrnosti je obecně komplexní číslo. Tento komplexní součinitel se nazývá *impedance* a obvykle se označuje Z . V obecném případě je funkcí úhlové frekvence ω . Pro každý ideální prvek tedy můžeme napsat, že

$$\frac{U}{I} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = Z. \quad (22.5)$$

V případě indukčnosti bude

$$Z(\text{indukčnost}) = Z_L = i\omega L^{31)}. \quad (22.6)$$



Obr. 22.2 Kapacitor

Ze stejného hlediska se nyní podíváme na kapacitor (kondenzátor)³²⁾. Skládá se z páru vodičů elektrod, které jsou dvěma drátěnými vodiči připojeny k vhodným svorkám. Elektrody mohou mít jakýkoliv tvar a často jsou od sebe odděleny nějakou dielektrickou látkou. Schématicky je toto uspořádání znázorněno na obr. 22.2. Opět uděláme několik zjednodušujících předpokla-

³¹⁾ Z_L nazýváme induktance (pozn. red.).

³²⁾ Jsou lidé, kteří říkají, že bychom měli objekty nazývat „induktor“ a „kapacitor“ a jejich *vlastnosti* „indukčnost“ a „kapacita“ (podobně jako „rezistor“ a „odpor“). Dáváme přednost používání výrazů, které skutečně uslyšíte v laboratoři. Většina lidí stále nazývá „indukčnost“ jak skutečnou cívku, tak její indukčnost L .

dů. Elektrody a přívodné dráty budeme pokládat za dokonalé vodiče. Budeme také počítat s tím, že mezi elektrodami je dokonalá izolace, takže jf nemohou z jedné elektrody na druhou procházet žádné náboje. Dále předpokládáme, že oba vodiče představující elektrody kondenzátoru jsou blízko sebe, ale daleko od jiných vodičů a tedy všechny siločáry, které vycházejí z jedné elektrody, končí v druhé elektrodě. Pak na elektrodách vždy existují stejně velké náboje opačného znaménka a tyto náboje jsou mnohem větší než náboje na površích přívodných vodičů. Nakonec budeme předpokládat, že v blízkosti kondenzátoru nejsou žádná magnetická pole.

Nyní uvažujme křivkový integrál z E po uzavřené dráze, která začíná na svorce a , jde po drátu k vrchní elektrodě kondenzátoru, prochází mezerou mezi elektrodami na spodní z nich a od něj po přívodním drátu ke svorce b , od něhož se vrací prostorem mimo kondenzátor ke svorce a . Protože tam není žádné magnetické pole, křivkový integrál E po této uzavřené dráze je roven nule. Lze jej rozdělit na tři složky:

$$\oint E \cdot ds = \int_{\text{vodiči}} E \cdot ds + \int_{\text{mezi elektrodami}} E \cdot ds + \int_b^a E \cdot ds.$$

Integrál po přívodních vodičích je roven nule, neboť uvnitř dokonalých vodičů žádná elektrická pole nejsou. Integrál z b do a po dráze vedoucí mimo kondenzátor je roven záporně vzatému rozdílu potenciálů mezi oběma svorkami. A protože jsme předpokládali, že elektrody jsou nějakým způsobem odizolovány od okolního světa, musí být celkový náboj na nich roven nule.

Je-li na horní elektrodě náboj Q , na spodní se nachází stejně velký náboj s opačným znaménkem, tj. $-Q$. Předtím jsme se dozvěděli, že mají-li dva vodiče stejně velké náboje s opačnými znaménky, plus a minus Q , je mezi nimi rozdíl potenciálů Q/C , kde C je vzájemná kapacita obou vodičů. Z rovnosti (22.7) vyplývá, že rozdíl potenciálů mezi svorkami a a b je roven rozdílu potenciálů mezi elektrodami. Dostáváme proto výsledek, že

$$U = \frac{Q}{C}.$$

Elektrický proud I vstupující do kondenzátoru svorkou a (a vystupující svorkou b) je roven dQ/dt , tj. rychlosti změny elektrického náboje na elektrodách. Zapišeme-li dU/dt jako $i\omega U$, můžeme vztah mezi napětím a proudem pro kondenzátor vyjádřit v následujícím tvaru:

$$i\omega U = \frac{I}{C}$$

resp.

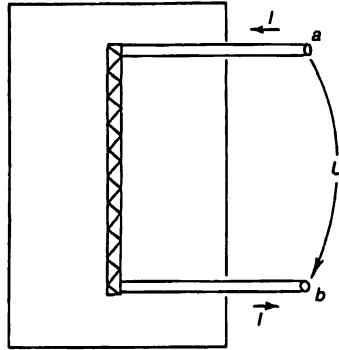
$$U = \frac{I}{i\omega C}. \quad (22.8)$$

Impedance Z idealizovaného kondenzátoru je tedy rovna

$$Z \text{ (kapacita)} = Z_C = \frac{1}{i\omega C}^{33)}. \quad (22.9)$$

³³⁾ Z_C nazýváme kapacitance (pozn. red.).

Třetí prvek, který potřebujeme prozkoumat, je rezistor. Protože jsme se však dosud nezabývali elektrickými vlastnostmi reálných látek, nejsme ještě připraveni hovořit o procesech, k nimž dochází uvnitř reálného vodiče. Budeme pouze muset přijmout fakt, že uvnitř reálných látek mohou existovat elektrická pole, že tato elektrická pole mohou vyvolat tok elektrického náboje, tj. elektrický proud a že tento proud je přímo úměrný integrálu elektrického pole od jednoho konce vodiče k druhému. Představujeme si přitom, že ideální rezistor je konstruován tak, jak ukazuje obr. 22.3. Od svorek *a* a *b* vedou k oběma koncům tyče z odporového materiálu dva přívodní dráty, které pokládáme za dokonalé vodiče. Obvyklou posloupností úvah dospějeme k výsledku, že rozdíl potenciálů mezi svorkami *a* a *b* je roven křivkovému integrálu vnějšího elektrického pole, který je též roven křivkovému integrálu elektrického pole podél tyče z odporového materiálu.



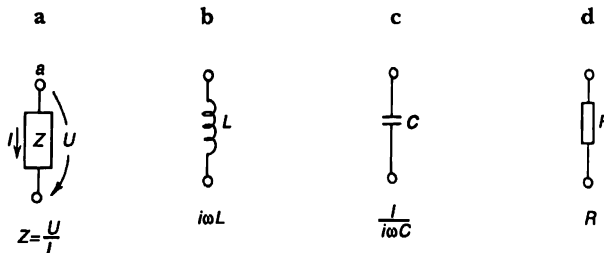
Obr. 22.3 Rezistor

Z toho pak vyplývá, že proud *I* rezistorem je přímo úměrný napětí *U* na výstupech:

$$I = \frac{U}{R},$$

kde se *R* nazývá odpor (rezistance). Později uvidíme, že vztah mezi proudem a napětím je pouze přibližně lineární. Také uvidíme, že tuto přibližnou přímou úměrnost lze pokládat za nezávislou na frekvenci změny proudu a napětí pouze tehdy, když tato frekvence není příliš vysoká. Při střídavých proudech je v tomto případě napětí na odporu ve fázi s proudem, což znamená, že impedance je reálným číslem:

$$Z \text{ (odpor)} = Z_R = R. \quad (22.10)$$



Obr. 22.4 Ideální (pasivní) prvky obvodu se soustředěnými parametry

Výsledky, které jsme dostali pro tři reálné prvky obvodů – induktor, kapacitor a rezistor – jsou shrnuty na obr. 22.4. Na tomto, jakož i na předcházejících obrázcích, jsme vyznačili napětí šipkou, která směřuje od jednoho výstupu k druhému.

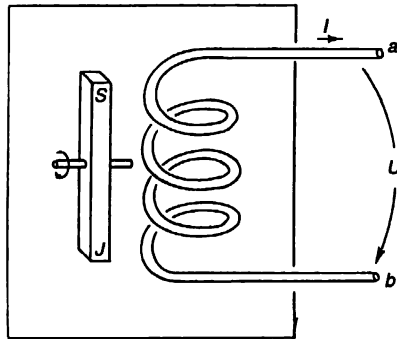
Je-li napětí „kladné“, tj. má-li svorka *a* vyšší potenciál než svorka *b*, ukazuje šipka směr kladného „úbytku potenciálu“.

Ačkoliv nyní probíráme střídavé proudy, můžeme sem zahrnout i obvody s ustálenými proudy, a to tím, že provedeme limitu pro případ, že se frekvence ω blíží nule. Při nulové frekvenci, tj. pro stejnosměrný proud, klesá impedance indukčnosti k nule – cívka představuje spojení nakrátko. Impedance kapacity pro stejnosměrný proud roste do nekonečna – kondenzátor představuje přerušení obvodu. Protože impedance odporu nezávisí na frekvenci, je rezistor jediným prvkem, který zůstává i při analýze obvodů se stejnosměrným proudem.

V těchto prvcích elektrických obvodů, které jsme dosud popsali, jsou proud a napětí navzájem úměrné veličiny. Je-li jedna z nich rovna nule, je rovna nule i druhá. Obvykle chápeme tyto věci takto: přiložené napětí je „příčinou“ proudu, nebo proud „způsobuje vznik“ napětí na výstupech – tedy uvedené prvky v určitém smyslu reagují na vnucené vnější podmínky. Proto takovéto prvky nazýváme *prvky pasivní*. Z tohoto aspektu jsou protikladem *aktivních prvků*, takových jako jsou generátory, probírané v následujícím článku, které jsou zdroji kmitavých proudů a napětí v elektrickém obvodu.

22.2. GENERÁTORY

Nyní je třeba pohovořit o *aktivním* prvku elektrických obvodů, tj. o tom prvku, který je zdrojem proudů a napětí v obvodu – o *generátoru*.



Obr. 22.5 Generátor skládající se ze zpevné cívky a rotujícího magnetického pole

Mějme cívku podobnou té, o níž jsme hovořili v souvislosti s indukčností, pouze s tím rozdílem, že má velmi malý počet závitů, takže magnetické pole jí procházejícího proudu lze zanedbat. Nechť se tato cívka nachází v proměnném magnetickém poli, například v takovém, jaké by vytvářel otáčející se magnet (obr. 22.5). (Dřív jsme ukázali, že pole takového rotujícího magnetu lze vytvořit i vhodnou soustavou cívek napájených střídavým proudem.) Opět musíme provést několik zjednodušujících předpokladů. Jde o všechny ty předpoklady, které jsme popsali v případě idealizované cívky. Jmenovitě budeme předpokládat, že proměnné magnetické pole je omezeno na určitou oblast v blízkosti cívky a mimo generátor se v prostoru mezi svorkami neobjevuje.

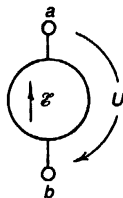
Přesně tak jako při analýze indukčnosti uvažujeme křivkový integrál E podél uzavřené smyčky, která začíná na svorce a , prochází cívkou ke svorce b a prostorem mezi oběma cívkami se vrací do svého východiska. Znovu dospějeme k závěru, že rozdíl mezi výstupy je roven křivkovému integrálu E po této uzavřené křivce:

$$U = - \oint E \cdot ds.$$

Tento křivkový integrál představuje elektromotorické napětí v obvodu. Proto rozdíl potenciálů U na výstupech generátoru je také roven rychlosti změny magnetického indukčního toku cívkou, vynásobenému počtem závitů:

$$U = -\mathcal{E} = \frac{d}{dt} (\text{tok}). \quad (22.11)$$

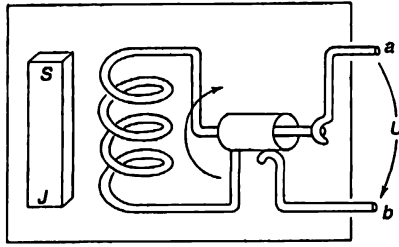
V případě ideálního generátoru předpokládáme, že magnetický tok procházející cívkou je určen pouze vnějšími podmínkami (takovými jako například úhlová rychlost rotujícího magnetického pole) a není vůbec ovlivněn proudem procházejícím generátorem. Z toho důvodu generátor – alespoň ideální generátor, o němž zde hovoříme – nemá žádnou impedanci. Rozdíl potenciálů na jeho svorkách určuje elektromotorické napětí $\mathcal{E}(t)$, které se generátoru libovolně přiřadilo. Takový ideální generátor budeme zakreslovat značkou ukázanou na obr. 22.6. Malá šipka ukazuje směr kladného elektromotorického napětí. V generátoru zobrazeném na obr. 22.6 bude kladné elektromotorické napětí vytvářet napětí $U = \mathcal{E}$, přičemž svorka a bude mít vyšší potenciál než svorka b .



Obr. 22.6 Značka ideálního generátoru

Existuje i jiný způsob, jak sestavit generátor. Ten pak bude úplně jiný, pokud se jedná o vnitřní uspořádání, ale naprosto nerozlišitelný od výše popsaného z hlediska toho, co se děje za jeho svorkami. Představuje cívkou se závitů drátu, která se otáčí ve stálém magnetickém poli tak, jak je to vyznačeno na obr. 22.7. Abychom zvýraznili existenci magnetického pole, je tam vyobrazen tyčový magnet. Je pravda, že by se mohl nahradit jakýmkoliv jiným zdrojem magnetického pole, například další cívkou napájenou ustáleným elektrickým proudem. Jak je vidět z obrázku, rotující cívka je spojena s vnějším světem pomocí kluzných kontaktů nebo „sběracích kroužků“. Opět nás zajímá, jaký rozdíl potenciálů vzniká mezi oběma svorkami a a b . Je roven integrálu intenzity elektrického pole po dráze vedené mimo generátor od svorky a k svorce b .

V systému znázorněném na obr. 22.7 nyní nejsou žádná proměnná magnetická pole. Na první pohled bychom se proto mohli podívat, jak se vůbec může objevit nějaké napětí na svorkách generátoru. Vlastně nikde v něm nejsou ani žádná elektrická pole. Jako obvykle pro naše ideální prvky, i zde předpokládáme, že vodiče uvnitř generátoru jsou z dokonale vodivého materiálu a jak jsme řekli mnohokrát, uvnitř dokonalého vodiče je elektrické pole rovno nule. Ale to není pravda. Totiž pravda to není tehdy, když se vodič pohybuje v magnetickém poli. Správným tvrzením je, že uvnitř dokonalého vodiče musí být rovna nule výsledná síla působící na každý náboj. V opačném případě by došlo k nekonečně velkému toku volných nábojů.



Obr. 22.7 Generátor skládající se z cívky rotující v konstantním magnetickém poli

Vždy však platí, že součet elektrického pole E a vektorového součinu rychlosti vodiče a magnetického pole B , což mimochodem představuje celkovou sílu, která by působila na jednotkový náboj, musí mít uvnitř vodiče nulovou hodnotu:

$$F/\text{náboj} = E + v \times B = 0 \quad (\text{v dokonalém vodiči}) \quad (22.12)$$

(v je zde rychlost vodiče). Naše pozdější tvrzení, že uvnitř dokonalého vodiče nejsou elektrická pole je v pořádku, je-li rychlost vodiče v rovna nule; jinak správné tvrzení představuje rovnice (22.12).

Vraťme se k našemu generátoru, jehož schéma je na obr. 22.7. Nyní vidíme, že křivkový integrál elektrického pole E od svorky a po svorku b po dráze vedoucí vodiči v generátoru musí být roven křivkovému integrálu součinu $v \times B$ počítanému po téže dráze, tj.

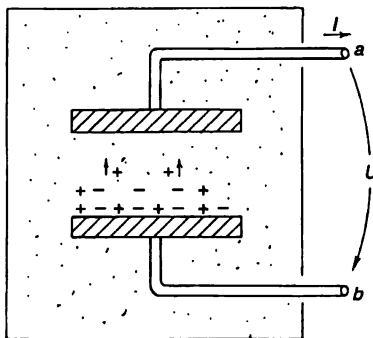
$$\int_a^b E \cdot ds = - \int_a^b (v \times B) \cdot ds. \quad (22.13)$$

uvnitř vodiče uvnitř vodiče

Stále však platí, že křivkový integrál E po úplně uzavřené dráze, včetně návratu od b k a prostorem mimo generátor, musí být roven nule, neboť tam nejsou proměnná magnetická pole. Proto je první integrál v rovnici (22.13) roven i napětí U mezi oběma svorkami. Ukazuje se, že integrál na pravé straně (22.13) je právě roven rychlosti změny součinu magnetického indukčního toku cívku a počtu jejích závitů a podle pravidla o toku je proto roven elektromotorickému napětí v cívce. Tak opět docházíme k výsledku, že rozdíl potenciálů svorek je roven záporně vzatému elektromotorickému napětí v obvodu, což souhlasí se vztahem (22.11). Máme-li tedy nějaký generátor, v němž se magnetické pole v blízkosti nepohybujících se cívky mění, nebo takový, v němž se cívka pohybuje ve stálém magnetickém poli, jsou vnější vlastnosti generátorů tytéž. Na svorkách generátoru existuje napětí U , jež nezávisí na proudu v obvodu, ale jen na podmínkách uvnitř generátoru a tyto nastavujeme podle naší libovůle.

Pokud se snažíme pochopit činnost generátorů z hlediska Maxwellových rovnic, mohli bychom se také zeptat, jak je to v případě obyčejného galvanického článku, například takového, který se používá do baterky. Jde taktéž o generátor, tj. zdroj napětí, ačkoliv se, samozřejmě, vyskytuje pouze v obvodech se stejnosměrným proudem. Obr. 22.8 ukazuje druh článku, který je pro porozumění nejjednodušší. Představme si dvě kovové destičky ponořené do nějakého chemického roztoku. Předpokládejme, že roztok obsahuje kladné a záporné ionty. Necht' jedny ionty, řekněme záporné, jsou mnohem těžší než ionty opačné polarity, takže jejich difuzní pohyb v roztoku je mnohem pomalejší. Nakonec budeme předpokládat, že se nějakým způsobem zabezpečilo, aby

se koncentrace roztoku od místa k místu v kapalině měnila tak, že počet iontů obou polarit je řekněme u spodní destičky mnohem větší než koncentrace iontů v blízkosti horní destičky. V důsledku své velké pohyblivosti se kladné ionty budou pohotověji přesouvat do oblasti s nižší koncentrací, takže množství kladného náboje přicházející k horní destičce bude trochu převyšovat množství záporného náboje, jež tam také dospěje.



Obr. 22.8 Galvanický článek

Horní destička se proto bude nabíjet kladně a výsledný náboj spodní destičky bude záporný.

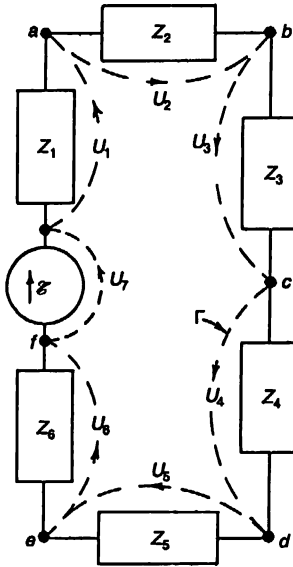
Podle toho, jak k horní destičce difunduje víc a víc nábojů, bude potenciál této destičky růst, až se mezi destičkami vytvoří takové elektrické pole, které svým silovým účinkem na ionty přesně vykompenzuje jejich nadměrnou pohyblivost. V důsledku toho získají obě destičky rychle takový rozdíl potenciálů, který charakterizuje vnitřní stavbu článku.

Stejnými úvahami jako v případě ideálního kondenzátoru se přesvědčíme, že není-li už žádná výsledná difuze iontů, je rozdíl potenciálů mezi svorkami a a b přesně roven křivkovému integrálu elektrického pole mezi oběma destičkami. Je pravda, že mezi kondenzátorem a takovým galvanickým článkem je podstatný rozdíl. Spojíme-li na okamžik svorky kondenzátoru nakrátko, kondenzátor se vybije a na svorkách už žádné napětí nebude. V případě galvanického článku lze proud ze svorek odebrat neustále bez jakékoliv změny elektromotorického napětí – dokud, přirozeně, nebudou příslušné chemikálie spotřebovány. V reálném článku je pozorováno, že stoupá-li z něj odebraný proud, napětí na jeho svorkách se snižuje. Avšak v rámci výše provedených abstrakcí si můžeme představit takový ideální článek, v němž napětí na svorkách nezávisí na proudu. Na reálný článek se pak můžeme dívat jako na ideální článek spojený do série s rezistorem.

22.3 SÍTĚ S IDEÁLNÍMI PRVKY. KIRCHHOFFOVA PRAVIDLA

Zajímáme-li se jen o to, co se děje mimo prvek, je popis ideálních prvků obvodů – jak už jsme viděli – docela jednoduchý. Proud a napětí souvisí lineárně. Ale procesy, které uvnitř toho kterého prvku skutečně probíhají, jsou značně komplikované a podat jejich přesný popis z hlediska Maxwellových rovnic je velmi obtížné. Představte si pokus přesně popsat elektrická a magnetická pole uvnitř rádia, obsahujícího stovky odporů, kondenzátorů a cívek. Analyzovat takovou věc pomocí Maxwellových rovnic by byla prakticky nespílitelná úloha. Provedeme-li však mnohé aproximace, které jsme uvedli v článku 22.2 a podstatné charakteristiky reálných prvků elektrických obvodů sumarizujeme ve formě jejich idealizací, získáváme možnost analyzovat elektrický obvod poměrně jednoduchým způsobem. Nyní ukážeme, jak se to dělá.

Mějme obvod skládající se z generátoru a několika impedancí propojených tak, jak to ukazuje obr. 22.9. V prostoru mimo samotné prvky obvodu není souhlasně s našimi aproximacemi žádné magnetické pole. Proto je křivkový integrál E po každé dráze neprocházející ani jedním z prvků roven nule. Nyní prozkoumejme křivku Γ , která vede kolem našeho obvodu a je na obr. 22.9 vykreslena čárkovaně. Křivkový integrál E po této křivce se skládá z několika příspěvků, z nichž každý je křivkovým integrálem počítaným po dráze jdoucí od jedné svorky nějakého prvku k další jeho svorce. Tento křivkový integrál jsme nazvali úbytkem napětí na příslušném prvku.



Obr. 22.9 Součet úbytků napětí po každé uzavřené dráze je roven nule

Úplný křivkový integrál je pak přesně roven součtu úbytků napětí na všech prvcích obvodu:

$$\oint E \cdot ds = \sum U_n.$$

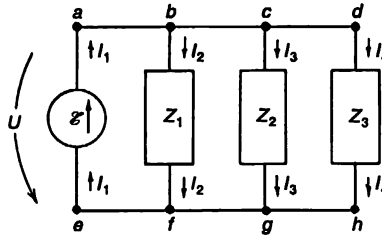
Je-li tento křivkový integrál roven nule, platí, že součet rozdílů potenciálů podél uzavřeného elektrického obvodu je roven nule:

$$\sum_{\substack{\text{podél} \\ \text{každého} \\ \text{uzavřeného} \\ \text{obvodu}}} U_n = 0. \quad (22.14)$$

Tento výsledek vyplývá z jedné z Maxwellových rovnic, podle níž v oblasti, kde nejsou magnetická pole, je křivkový integrál z E po každé uzavřené křivce roven nule.

Nyní prozkoumejme takový obvod, jako je na obr. 22.10. Vodorovná čára spojující svorky a , b , c a d má označovat, že všechny tyto svorky jsou spolu spojeny nebo že jsou propojeny spojovacími vodiči se zanedbatelným odporem. V každém případě podle tohoto schématu mají svorky a , b ,

c a d stejný potenciál a podobně svorky e , f , g a h jsou také všechny na téže společném potenciálu. Pak je na každém z těchto čtyř prvků stejný úbytek napětí U .



Obr. 22.10 Algebraický součet proudů vstupujících do každého uzlu je roven nule

Jedna z našich idealizací spočívala v tom, že na svorkách impedancí se akumulují pouze zanedbatelné elektrické náboje. Nyní uděláme předpoklad, že lze zanedbat i jakékoliv elektrické náboje sídlící na vodičích spojujících mezi sebou svorky. Zákon zachování elektrického náboje pak vyžaduje, aby každý náboj, který vychází z jednoho prvku našeho obvodu ihned vstoupil do nějakého jiného prvku. Nebo – což je totéž – požadujeme, aby algebraický součet proudů přicházejících do jakéhokoliv daného spojovacího bodu byl roven nule. Spojovacím bodem rozumíme, samozřejmě, jakoukoliv množinu svorek (takových jako a , b , c a d na obr. 22.10), které jsou spolu propojeny. Taková množina propojených svorek se obvykle nazývá „uzel“. Zákon zachování náboje pak vyžaduje, aby pro obvod na obr. 22.10 platilo

$$I_1 - I_2 - I_3 - I_4 = 0. \quad (22.15)$$

Součet proudů vstupujících do uzlu, který se skládá ze čtyř svorek e , f , g a h , musí být také roven nule:

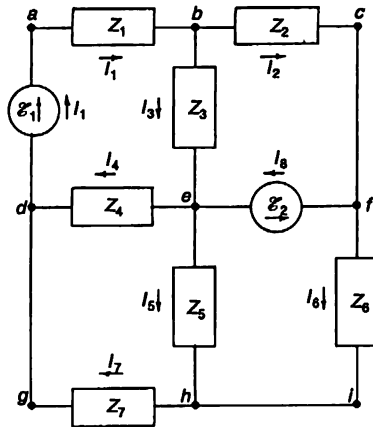
$$-I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0. \quad (22.16)$$

Je to ovšem též rovnice jako (22.15). Tyto rovnice nejsou nezávislé. Obecné pravidlo zní, že *součet proudů vstupujících do každého uzlu musí být roven nule*.

$$\sum_{\text{do uzlu}} I_n = 0. \quad (22.17)$$

Náš dřívější závěr o tom, že součet úbytků napětí v uzavřeném obvodu je roven nule, musí ve složité síti platit pro každý uzavřený obvod. Kromě toho pro každý uzel musí platit náš výsledek, že algebraický součet proudů vstupujících do uzlu je roven nule. Tyto dvě rovnice jsou známy jako Kirchhoffova pravidla. Jejich pomocí lze najít proudy a napětí v jakékoliv síti.

Uvažujme složitější obvod, jehož schéma je na obr. 22.11. Jak najdeme proudy a napětí v tomto obvodu? Lze je určit následujícím prostým způsobem. Odděleně prozkoumáme každý ze čtyř uzavřených obvodů vyskytujících se v tomto obvodu. (Například jeden obvod vede od svorky a ke svorce b a dále přes svorky e a d zpět ke svorce a .) Pro každý z nich napíšeme rovnici vyjadřující první z Kirchhoffových zákonů – že součet všech napětí podél obvodu je roven nule.



Obr. 22.11 Analýza sítě pomocí Kirchhoffových pravidel

Je nutné pamatovat na to, aby se úbytek napětí počítal jako kladný, postupujeme-li ve směru proudu, a jako záporný, procházíme-li v opačném směru než proud. Musíme také mít na zřeteli, že úbytek napětí na generátoru je roven záporné hodnotě elektromotorického napětí v příslušném směru. Pro jednoduchý obvod, který začíná a končí na svorce a dostaneme rovnici

$$Z_1 I_1 + Z_3 I_3 + Z_4 I_4 - \mathcal{E}_1 = 0.$$

Použitím stejného pravidla na zbývající obvody bychom dostali další tři rovnice téhož druhu.

Dále je třeba napsat rovnici pro proud, a to pro každý uzel v našem schématu. Například sečtení proudů přitékajících do uzlu b vede k rovnici

$$I_1 - I_3 - I_2 = 0.$$

Analogicky by rovnice pro proudy v případě uzlu označeného e vypadala takto:

$$I_3 - I_4 + I_8 - I_5 = 0.$$

Pro dané schéma existuje pět takovýchto rovnic pro proudy. Ukazuje se však, že kteroukoliv z těchto rovnic lze odvodit ze zbývajících čtyř. Existují proto jen čtyři nezávislé rovnice pro proudy. Máme tedy celkem osm nezávislých lineárních rovnic – čtyři rovnice pro napětí a čtyři pro proudy. Z těchto osmi rovnic lze vypočítat osm neznámých proudů. Budeme-li tyto proudy znát, bude obvod vyřešen. Úbytek napětí na každém prvku je dán součinem proudu tímto prvkem a jeho impedancí (nebo – jako v případě zdrojů napětí – je už znám).

Viděli jsme, že při sestavování rovnic pro proudy jsme dostali jednu rovnici, která nebyla nezávislá na jiných. Obecně lze napsat příliš mnoho rovnic i pro napětí. Ačkoliv jsme například v případě schématu z obr. 22.11 uvažovali pouze o čtveřici malých uzavřených obvodů, existuje tam mnoho dalších obvodů, pro něž bychom mohli psát rovnice pro napětí. Je to například uzavřený obvod procházející body $a b c f e d a$. Jiný obvod sleduje dráhu $a b c f e h g d a$. Můžete se přesvědčit, že takových obvodů existuje mnoho. Při analýze složitých zapojení se velmi snadno

dostane příliš mnoho rovnic. Na to, jak postupovat, aby se napsal pouze minimální počet rovnic, existují pravidla. Ale obvykle už po chvilí přemýšlení lze pochopit, jak dostat správný počet rovnic v nejjednodušším tvaru. Kromě toho napsání jedné – dvou přebytečných rovnic ničemu neublíží. Nepovedou k žádným nesprávným výsledkům, jen k troše zbytečné algebry.

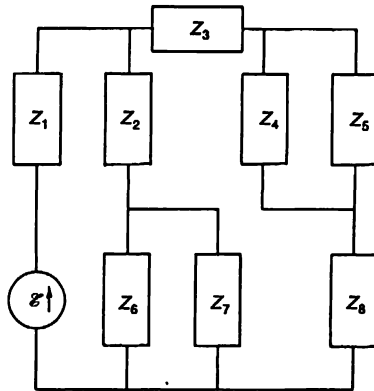
V kapitole 25 dílu 1 jsme ukázali, že jsou-li dvě impedance Z_1 a Z_2 zapojeny do série, jsou rovnocenné jedné impedanci Z_s dané vztahem

$$Z_s = Z_1 + Z_2. \quad (22.18)$$

Ukázali jsme také, že jsou-li tyto dvě impedance jsou zapojeny paralelně, jsou rovnocenné jedné impedanci Z_p dané vztahem

$$Z_p = \frac{1}{(1/Z_1) + (1/Z_2)} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}. \quad (22.19)$$

Podíváte-li se zpět, uvidíte, že při odvozování těchto výsledků jsme vlastně použili Kirchhoffovy zákony. Složitá schémata lze často analyzovat opakovaným použitím těchto vzorců pro sériové a paralelní zapojení impedancí. Tímto způsobem lze například analyzovat síť, jejíž schéma je na obr. 22.12. Především lze impedance Z_4 a Z_5 jakož i impedance Z_6 a Z_7 nahradit ekvivalenty jejich paralelnímu zapojení. Nato lze impedanci Z_2 kombinovat podle pravidla pro sériové zapojení s ekvivalentem paralelního zapojení Z_6 a Z_7 . Pokračuje-li se takto dále, lze celý obvod zredukovat na generátor \mathcal{E} zapojený do série s jedinou impedancí Z . Proud celým generátorem je pak roven \mathcal{E}/Z . Zpětným postupem lze vypočítat proudy pro každou impedanci.



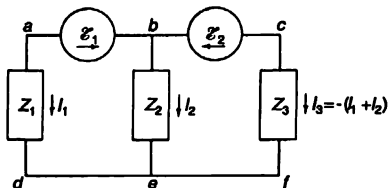
Obr. 22.12 Obvod, který lze analyzovat pomocí pravidel pro sériové a paralelní zapojení

Existují však i taková, a přitom docela jednoduchá zapojení, která nelze touto metodou analyzovat, například schéma na obr. 22.13. Při analýze tohoto schématu musíme napsat rovnice pro proudy a pro napětí podle Kirchhoffových pravidel. Udělejme to. Pro proudy existuje jediná rovnice:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

takže ihned víme, že

$$I_3 = -(I_1 + I_2).$$



Obr. 22.13 Obvod, který nelze analyzovat na základě pravidel pro sériové a paralelní zapojení

Trochu algebraické práce si můžeme ušetřit tím, že tento výsledek ihned využijeme při psaní rovnic pro napětí. Pro naše schéma existují dvě takové nezávislé rovnice; jsou to

$$-\mathcal{E}_1 + I_2 Z_2 - I_1 Z_1 = 0$$

a

$$\mathcal{E}_2 - (I_1 + I_2) Z_3 - I_2 Z_2 = 0.$$

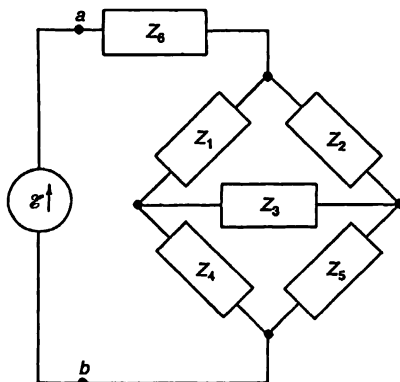
Máme dvě rovnice a dva neznámé proudy. Vyřešíme-li tyto rovnice vzhledem k I_1 a I_2 , dostaneme, že

$$I_1 = \frac{Z_2 \mathcal{E}_2 - (Z_2 + Z_3) \mathcal{E}_1}{Z_1 (Z_2 + Z_3) + Z_2 Z_3}$$

$$I_2 = \frac{Z_1 \mathcal{E}_2 + Z_3 \mathcal{E}_1}{Z_1 (Z_2 + Z_3) + Z_2 Z_3}.$$

Třetí proud dostaneme součtem těchto dvou.

Jiný příklad zapojení, které nelze analyzovat použitím pravidel pro sériové a paralelní impedance, ukazuje obr. 22.14.

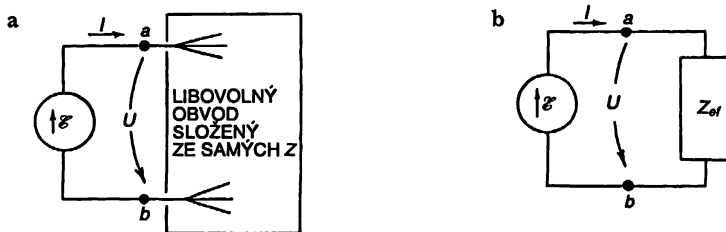


Obr. 22.14 Můstkové zapojení

Takové zapojení se nazývá „můstek“. Vyskytuje se v mnoha přístrojích používaných k měření impedancí. V případě můstkového zapojení obvykle klademe otázku: V jakém poměru musí být různé impedance, aby proud impedancí Z_3 byl nulový? Ponecháme na vás zjistit podmínky, za kterých to nastane.

22.4 EKVIVALENTNÍ OBVODY

Představte si, že generátor \mathcal{E} připojíme k síti obsahující nějaké komplikované spojení impedancí, jako je to schématicky naznačeno na *obr. 22.15 a*.



Obr. 22.15 Každá síť složená pouze z pasivních prvků a obsahující dva vývody je ekvivalentní nějaké efektivní impedanci

Všechny rovnice, které dostaneme z Kirchhoffových pravidel, jsou lineární, takže vyřešíme-li je vzhledem k proudu I procházejícímu generátorem, dostaneme, že I je přímo úměrné \mathcal{E} . Můžeme tedy psát, že

$$I = \frac{\mathcal{E}}{Z_{ef}},$$

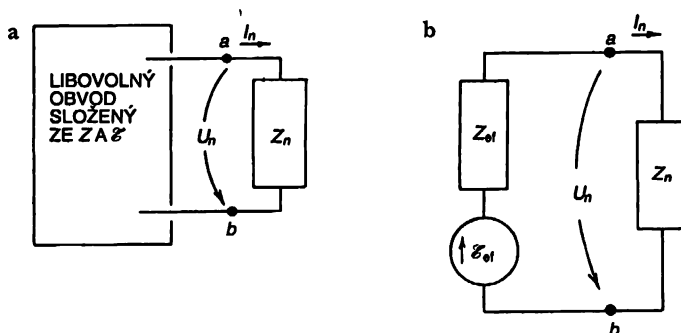
kde Z_{ef} je nyní nějaké komplexní číslo, dané algebraickou funkcí všech prvků v obvodu. (Neobsahuje-li schéma žádné jiné generátory, pouze ten, který je na obrázku vyznačen, nevystupuje zde žádný dodatkový, na \mathcal{E} nezávislejší člen.) Ale tato rovnice je přesně taková, jakou bychom napsali pro obvod na *obr. 22.15 b*. Pokud se zajímáme pouze o to, co se děje nalevo od obou svorek a a b , jsou obě schémata na *obr. 22.15* ekvivalentní. Můžeme proto formulovat obecný výrok, že každou síť pasivních prvků připojenou ke dvěma svorkám lze nahradit jedinou impedancí Z_{ef} , aniž by se nějak změnily proudy a napětí ve zbytku zapojení. Je pravda, že tento výrok představuje pouhou formulaci toho, co vychází z Kirchhoffových pravidel a konec konců z linearity Maxwellových rovnic.

Tuto myšlenku lze zobecnit i na síť, která obsahuje nejen impedance ale i generátory. Představte si, že se na takovou síť díváme „z hlediska“ jedné z impedancí, kterou budeme označovat Z_n (*obr. 22.16 a*). Kdybychom měli řešit rovnice pro celou síť, zjistili bychom, že napětí U_n mezi dvěma svorkami a a b je lineární funkcí proudu I_n . Můžeme to zapsat takto:

$$U_n = A - BI_n, \quad (22.22)$$

kde A a B závisí na generátorech a impedancích, které jsou zapojeny nalevo od svorek. Například pro síť na *obr. 22.13* zjistíme, že $U_1 = I_1 Z_1$. To lze úpravou rovnice (22.20) rozepsat takto:

$$U_1 = \left(\frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 \right) - \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} I_1. \quad (22.23)$$



Obr. 22.16 Každou síť se dvěma vývody, obsahující impedanci i generátory, lze nahradit generátorem zapojeným do série s impedancí

Úplné řešení pak lze dostat kombinováním tohoto vztahu se vztahem pro impedanci Z_1 , totiž $U_1 = I_1 Z_1$, nebo v obecném případě kombinováním vztahu (22.22) se vztahem

$$U_n = I_n Z_n.$$

Uvažujeme-li případ, že Z_n se vztahuje na jednoduchý sériový obvod, skládající se z generátoru a impedance, jako na obr. 22.15 b, vztahu (22.22) bude odpovídat rovnice

$$U_n = \mathcal{E}_{ef} - I_n Z_{ef}.$$

kteřá se s (22.22) shoduje, položíme-li $\mathcal{E}_{ef} = A$ a $Z_{ef} = B$. Tedy, zajímáme-li se pouze o to, co se děje napravo od svorek a a b , je vždy možné nahradit libovolné zapojení z obr. 22.16 ekvivalentní kombinací generátoru zapojeného v sérii s impedancí.

22.5 ENERGIE

Viděli jsme, že k tomu, aby v cívce vznikl proud I , musí její vnější obvod dodat energii $W = LI^2/2$. Když proud poklesne opět na nulu, uvolní se tato energie zpět do vnějšího obvodu. V ideální indukčnosti nedochází k procesům ztráty energie. Když takovou indukčnost prochází střídavý proud, přelévá se energie sem a tam mezi ní a zbytkem obvodu, ale střední rychlost, kterou se do obvodu energie dodává, je rovna nule. Říkáme, že indukčnost je *nedisipativním* prvkem – žádná elektrická energie v ní nedisipuje, tj. neztrácí se.

Podobně se do vnějšího obvodu vrací i energie kondenzátoru $W = CU^2/2$ při jeho vybíjení. Nachází-li se kondenzátor v obvodu se střídavým proudem, energie do něj vtéká a vytéká, ale průměrný tok energie v každém cyklu je roven nule. Ideální kondenzátor je také *nedisipativním* prvkem.

¹ Víme, že elektromotorické napětí je zdrojem energie. Když proud protéká ve směru elektromotorického napětí, je energie dodávána do vnějšího obvodu rychlostí $dW/dt = \mathcal{E} I$. Je-li proud

poháněn – jinými generátory v obvodu – proti elektromotorickému napětí, bude toto napětí absorbovat energii rychlostí $\mathcal{E}I$; protože I je záporné, bude záporné i dW/dt .

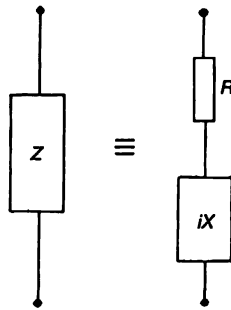
Je-li generátor připojen k rezistoru, jehož odpor je R , prochází jím proud $I = \mathcal{E}/R$. Energie, již generátor dodává za jednotku času $\mathcal{E}I$, je rezistorem pohlcována. Tato energie se v něm mění na teplo a z elektrické energie obvodu se ztrácí. Říkáme, že rezistorem se elektrická energie disipuje. Rychlost, kterou se energie mění odporem na teplo, je $dW/dt = RI^2$.

V obvodu se střídavým proudem je střední rychlost, kterou se energie v odporu ztrácí, rovna střední hodnotě veličiny RI^2 za jeden cyklus. Protože $I = \hat{I}e^{i\omega t}$ – čímsž vlastně myslíme to, že se I mění jako $\cos\omega t$ – střední hodnota I^2 ze jeden cyklus je rovna $|\hat{I}|^2/2$, neboť maximální proud je $|\hat{I}|$ a střední hodnota funkce $\cos^2\omega t$ je $1/2$.

Jak je to se ztrátou energie, je-li generátor připojen k libovolné impedanci Z („Ztrátou“ rozumíme přeměnu elektrické energie na tepelnou energii.) Každou impedanci Z lze vyjádřit jako součet její reálné a imaginární části:

$$Z = R + iX, \quad (22.24)$$

kde R a X jsou reálná čísla. Z hlediska ekvivalentních obvodů můžeme říci, že každá impedance je ekvivalentní odporu zapojenému do série s ryze imaginární impedancí, kterou nazýváme *reaktance* (obr. 22.17).



Obr. 22.17 Každá impedance je ekvivalentní sériovému zapojení čistého odporu a čisté reaktance

Už dříve jsme viděli, že impedance každého obvodu obsahujícího pouze indukčnosti L a kapacity C je ryze imaginárním číslem. Protože v těchto „ L “ a „ C “ nedochází v průměru k žádným ztrátám energie, v čisté reaktanci, skládající se pouze ze samých „ L “ a „ C “, žádné ztráty energie nebudou. Můžeme se přesvědčit, že to musí platit pro reaktanci obecně.

Připojí-li se generátor s elektromotorickým napětím \mathcal{E} k impedanci Z z obr. 22.17, musí elektromotorické napětí souviset s proudem I z generátoru podle vztahu

$$\mathcal{E} = I(R + iX). \quad (22.25)$$

Abychom našli střední rychlost, kterou se energie z generátoru odčerpává, potřebujeme znát střední hodnotu součinu $\mathcal{E}I$. Nyní si musíme dát pozor. Jde-li o takovéto součiny, musíme zacházet s reálnými veličinami $\mathcal{E}(t)$ a $I(t)$. (Reálné části komplexních funkcí budou představovat skutečné fyzikální veličiny pouze když máme lineární rovnice; nyní však máme *součiny*, které zajisté nejsou lineární.)

Předpokládejme, že jsme si vybrali počátek počítání času t tak, aby amplituda \hat{I} byla reálným číslem, řekněme I_0 ; pak skutečný průběh I v čase udává vztah

$$I = I_0 \cos \omega t.$$

Elektromotorické napětí v (22.25) je rovno reálné části výrazu

$$I_0 e^{i\omega t} (R + iX)$$

tj.

$$\mathcal{E} = I_0 R \cos \omega t - I_0 X \sin \omega t. \quad (22.26)$$

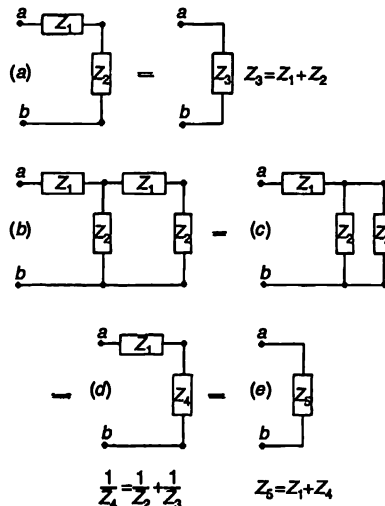
Dva členy ve vztahu (22.26) představují úbytky napětí na R a X z obr. 22.17. Vidíme, že úbytek napětí na odporu je ve fázi s proudem, zatímco úbytek napětí na reaktivní části je vzhledem k proudu posunut.

Střední ztráta energie generátoru za jednotku času $\langle P \rangle_{\text{stř}}$ je rovna integrálu součinu $\mathcal{E}I$ počítanému za jeden cyklus a vydělenému periodou T , tj.

$$\langle P \rangle_{\text{stř}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{E} I dt = \frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 R \cos^2 \omega t dt - \frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 X \cos \omega t \sin \omega t dt.$$

První integrál je roven $I_0^2 R/2$ a druhý integrál je roven nule. Proto střední ztráta energie v impedanci $Z = R + iX$ závisí pouze na reálné části Z a je rovna $I_0^2 R/2$, což souhlasí s naším dřívějším výsledkem pro ztrátu energie v odporu. V reaktivní části nedochází k žádné ztrátě energie.

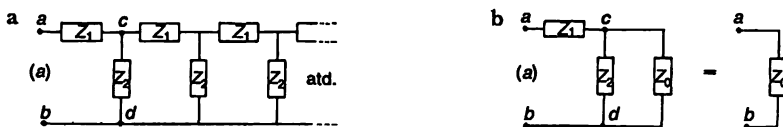
22.6 ŘETĚZOVÝ OBVOD



Obr. 22.18 Efektivní impedance řetězového obvodu

Nyní bychom rádi prozkoumali zajímavé schéma, které lze analyzovat pomocí sériových a paralelních zapojení. Začneme, řekněme s obvodem, jehož schéma je na obr. 22.18 a. Ihned je vidět, že impedance od svorky *a* po svorku *b* je prostě rovna $Z_1 + Z_2$. Nyní vezměme trochu složitější obvod, tj. ten jehož schéma je na obr. 22.18 b. Mohli bychom jej analyzovat pomocí Kirchhoffových pravidel, ale je také dostatečně snadný na to, aby se dal zvládnout uvažováním o sériových a paralelních zapojeních. Obě impedance na pravém konci lze nahradit jedinou impedancí $Z_3 = Z_1 + Z_2$, jako je tomu na obr. 22.10 c. Nato můžeme obě impedance Z_2 a Z_3 nahradit jejich ekvivalentní „paralelní“ impedancí Z_4 , což ukazuje část d našeho obrázku. Konečně Z_1 a Z_4 jsou ekvivalentní jediné impedanci Z_5 , což je vidět na obrázku v části e.

Nyní můžeme položit zábavnou otázku: Co by se stalo, kdybychom do sítě na obr. 22.18 b neustále přidávali další sekce, jako jsme to čárkovaně vyznačili na obr. 22.19 a? Lze takovou nekonečnou síť řešit? Tak těžké to není. Především si všimněme, že se taková nekonečná síť nezmění, přidáme-li na její „přední“ konec ještě jednu sekci. Opravdu, když přidáme ještě jednu sekci k nekonečné síti, je to stále ještě tatáž nekonečná síť.



Obr. 22.19 Efektivní impedance nekonečného řetězového obvodu

Impedanci nekonečné sítě mezi svorkami *a* a *b* označme Z_0 ; pak ale impedance všeho, co se nachází vpravo od svorek *c* a *d* je také Z_0 . Proto pokud jde o přední konec, můžeme naši síť chápat tak, jak ukazuje obr. 22.19 b. Přidáme-li výsledek paralelního zapojení Z_2 a Z_0 do série s Z_1 , můžeme pro impedanci tohoto zapojení ihned napsat:

$$Z = Z_1 + \frac{1}{(1/Z_2) + (1/Z_0)} \quad \text{nebo} \quad Z = Z_1 + \frac{Z_2 Z_0}{Z_2 + Z_0}.$$

Ale tato impedance je také rovna Z_0 a proto dostáváme rovnici

$$Z_0 = Z_1 + \frac{Z_2 Z_0}{Z_2 + Z_0}.$$

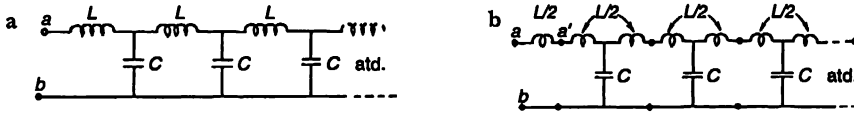
Její řešení vzhledem k Z_0 vychází, že

$$Z_0 = \frac{Z_1}{2} + \sqrt{(Z_1^2/4) + Z_1 Z_2}. \quad (22.27)$$

Tak jsme našli výraz pro impedanci nekonečného řetězového obvodu skládajícího se z opakujících se sériových a paralelních impedancí. Impedance Z_0 se nazývá *charakteristická impedance* takové nekonečné sítě.

Prozkoumejme specifický případ, kdy je sériovým prvkem indukčnost *L* a paralelním je kapacita *C* (obr. 22.20 a). Impedanci nekonečné sítě v tomto případě najdeme, když dosadíme

$Z_1 = i\omega L$ a $Z_2 = 1/i\omega C$. Všimněte si, že první člen na pravé straně vztahu (22.27), tj. $Z_1/2$ je roven právě polovině impedance prvního prvku. Proto by bylo přirozenější nebo alespoň jednodušší, kdybychom nekonečnou síť kreslili tak, jako na obr. 22.20 b.



Obr. 22.20 Řetězový obvod LC nakreslený dvěma ekvivalentními způsoby

Při pohledu na tuto nekonečnou síť ze svorky a' bychom pozorovali tuto charakteristickou impedanci

$$Z_0 = \sqrt{(L/C) - (\omega^2 L^2/4)}. \quad (22.28)$$

V závislosti na frekvenci ω existují dva zajímavé případy. Je-li ω^2 menší než $4/LC$, bude druhý člen pod odmocninou menší než první a impedance Z_0 bude reálná. Naproti tomu, když ω^2 je větší než $4/LC$, impedance Z_0 bude ryze imaginární a lze ji vyjádřit jako:

$$Z_0 = i\sqrt{(\omega^2 L^2/4) - (L/C)}.$$

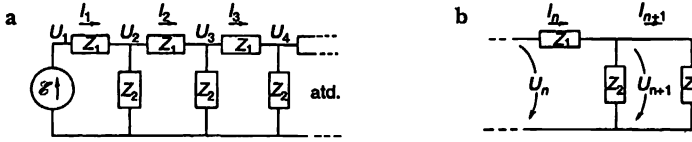
Už jsme řekli, že síť obsahující jen imaginární impedance, tj. indukance a kapacitance, bude mít ryze imaginární impedanci. Jak tedy může síť, kterou nyní zkoumáme – a která má pouze samá L a C – mít impedanci při frekvencích nižších než $4/LC$ rovnu čisté rezistanci? Při vyšších frekvencích je impedance ryze imaginární, což plně souhlasí s naším dřívějším tvrzením. Při nižších frekvencích je však impedance rovna čisté rezistanci a bude proto absorbovat energii. Ale jak tato síť může nepřetržitě absorbovat energii – tak, jak je tomu v případě odporu – když je sestavena pouze z indukčnosti a kapacit? Je to proto, že jde o nekonečný počet indukčností a kapacit, takže je-li k takové síti připojen zdroj, dodává nejdříve energii do první indukčnosti a kapacity, pak do druhé, do třetí atd. V takové síti se energie z generátoru absorbuje spojitě a konstantní rychlostí. Stále protéká do sítě a ukládá se v indukčnostech a kapacitách podél vedení.

Tato představa naznačuje zajímavou věc o procesech v takové síti. Když k přednímu konci sítě připojíme zdroj, je třeba očekávat, že jeho účinky se budou sítí šířit k jejímu nekonečnému konci. Postup tohoto vlnění po vedení se v mnohém podobá vyzařování antény, která absorbuje energii ze svého napájecího zdroje; vznik takového vlnění totiž očekáváme, když je impedance reálná, což nastává, když je ω menší než $\sqrt{4/LC}$. Ale když je impedance ryze imaginární, což nastává při hodnotách ω větších než $\sqrt{4/LC}$, nelze žádné takové šíření očekávat.

22.7 FILTRY

V předešlém článku jsme viděli, že nekonečný řetězový obvod na obr. 22.20 absorbuje energii nepřetržitě, je-li napájen při frekvenci ležící pod určitou kritickou frekvencí $\sqrt{4/LC}$, kterou budeme nazývat mezní frekvencí ω_0 . Naznačili jsme, že tento efekt lze pochopit pomocí představy o spojitém přenosu energie podél vedení. Na druhé straně, při $\omega > \omega_0$ k nepřetržitému pohlcování energie nedochází; je třeba čekat, že tehdy asi proudy nebudou „pronikat“ příliš daleko do vedení. Podívejme se, zda jsou tyto představy správné.

Představte si, že jsme přední konec článku připojili k nějakému generátoru střídavého proudu a ptáme se, jak bude vypadat napětí, řekněme na 754-té sekci obvodu. Pokud jde o nekonečnou síť, děje se s napětím při přechodu od jedné sekce k druhé totéž; podívejme se tedy, k čemu dochází, postoupíme-li od nějaké sekce, řekněme n -té, k následující. Proud I_n a napětí U_n budeme definovat tak, jak je to vyznačeno na obr. 22.21 a.



Obr. 22.21 K odvození činitele přenosu řetězového obvodu

Napětí U_{n+1} můžeme dostat z U_n , vzpomeneme-li si, že vždy lze zbytek řetězového obvodu po n -té sekci nahradit jeho charakteristickou impedancí Z_0 ; pak je nutné analyzovat pouze obvod na obr. 22.21 b. Především vidíme, že každé U_n je rovno $I_n Z_0$, neboť jde o napětí na impedanci Z_0 . Kromě toho rozdíl mezi U_n a U_{n+1} je roven právě $I_n Z_1$:

$$U_n - U_{n+1} = I_n Z_1 = U_n \frac{Z_1}{Z_0}.$$

Pro poměr obou napětí dostáváme vyjádření

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 - \frac{Z_1}{Z_0} = \frac{Z_0 - Z_1}{Z_0}.$$

Tento poměr můžeme nazvat činitelem přenosu pro jednu sekci řetězového obvodu a označíme jej α . Přirozeně, je pro všechny sekce stejný:

$$\alpha = \frac{Z_0 - Z_1}{Z_0}. \tag{22.29}$$

Pak je napětí po n -té sekci

$$U_n = \alpha^n \mathcal{E}. \tag{22.30}$$

Nyní můžeme najít napětí po 754 sekcích; je rovno součinu \mathcal{E} a 754-té mocniny α .

Jaké bude α pro L-C síť z obr. 22.20 a? Dosadíme-li Z_0 ze vztahu (22.27) a $Z_1 = i\omega L$, dostaneme

$$\alpha = \frac{\sqrt{(L/C) - (\omega^2 L^2/4)} - i(\omega L/2)}{\sqrt{(L/C) - (\omega^2 L^2/4)} + i(\omega L/2)}. \tag{22.31}$$

Když napájecí frekvence leží pod hraniční frekvencí $\omega_0 = \sqrt{4/LC}$, je odmocnina reálným číslem a komplexní čísla v čitateli a ve jmenovateli mají stejné velikosti. Proto je absolutní hodnota α rovna 1 a můžeme psát, že

$$\alpha = e^{i\delta}$$

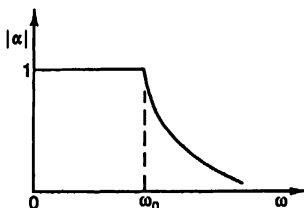
což znamená, že velikost napětí je pro každou sekci tatáž a mění se pouze jeho fáze. Změna fáze δ je vlastně záporné číslo a představuje opožďování napětí při jeho postupu v síti.

Pro frekvence ležící nad hraniční frekvencí ω_0 je lepší zkrátit jmenovatele i čitatele ve vztahu (22.31) imaginární jednotkou i a (22.31) přepsat do tvaru

$$\alpha = \frac{\sqrt{(\omega^2 L^2/4) - (L/C)} - (\omega L/2)}{\sqrt{(\omega^2 L^2/4) - (L/C)} + (\omega L/2)}. \quad (22.32)$$

Činitel přenosu α je nyní reálný a je menší než jedna. To znamená, že napětí na každé sekci je ve srovnání s napětím na předcházející sekci menší v poměru α . Pro každou frekvenci větší než ω_0 napětí při postupu sítí rychle zaniká. Graf absolutní hodnoty α jako funkce frekvence vypadá tak, jak je znázorněno na obr. 22.22.

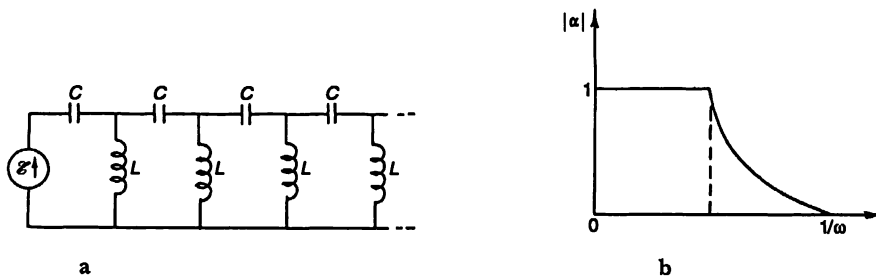
Vidíme, že chování α jak nad tak i pod ω_0 souhlasí s naší interpretací, že síť energii přenáší při $\omega < \omega_0$ a přehrazuje při $\omega > \omega_0$. Říkáme, že taková síť *nízké* frekvence propouští a *vysoké* frekvence odfiltrává.



Obr. 22.22 Činitel přenosu jedné sekce řetězového obvodu LC

Každá síť, která je vyprojektována tak, aby se její charakteristiky předepsaným způsobem měnily s frekvencí, se nazývá *filtr*. My jsme analyzovali filtr nízkých frekvencí, tzv. dolní propust.

Možná vás udivuje, proč provádíme celou tuto diskuzi nekonečné sítě, kterou nelze prakticky realizovat. Je to v tom, že tytéž charakteristiky nacházíme i u konečné sítě, je-li zakončena impedancí rovnající se charakteristické impedanci Z_0 . V praxi se však nepodaří přesně reprodukovat charakteristickou impedanci pomocí několika jednoduchých prvků, jako jsou R , L a C . Ale často toho lze s velmi dobrým přiblížením dosáhnout pro určitý rozsah frekvencí. Tak lze sestavit konečnou filtrační síť, jejíž vlastnosti jsou téměř stejné, jako má nekonečná síť. Například řetězový obvod LC se v mnohém chová tak, jak jsme to popsali, je-li zakončen čistou rezistancí $R = \sqrt{L/C}$.



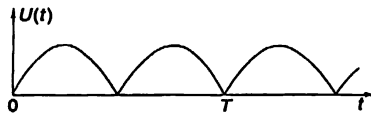
Obr. 22.23 a) horní propust, b) její součinitel přenosu jako funkce $1/\omega$

Když v našem obvodu LC navzájem vyměníme polohy L a C , aby vznikl obvod ukázaný na obr. 22.23 a, můžeme dostat filtr, který přenáší *vysoké* frekvence a přehrazuje *nízké* frekvence. Už

pomocí našich dosavadních výsledků lze snadno zjistit, co se v této síti děje. Patrně jste už zjistili, že kdykoliv L nahrazujeme C a naopak, měníme každé $i\omega$ na $1/i\omega$, resp. naopak. Konkrétně, změníme-li na obr. 22.22 označení horizontální osy na $1/\omega$ (obr. 22.23 b), můžeme nahlédnout, jak se bude měnit α s frekvencí.

Dolní a horní propust, které jsou tu popsány, nacházejí rozmanité technické využití. Dolní propust LC se často používá jako „vyhlazovací“ filtr v napájecích zdrojích stejnosměrného proudu. Potřebujeme-li vyrábět stejnosměrný proud ze zdroje střídavého proudu, připojíme na začátek usměrňovač, který proud dovoluje téci jen jedním směrem. Z usměrňovače dostaneme posloupnost impulzů, které vypadají jako funkce $U(t)$ znázorněná na obr. 22.24 a představují nedokonalý stejnosměrný proud, neboť kmitá nahoru a dolů. Dejme tomu, že bychom rádi dostali krásný, čistý stejnosměrný proud, jaký poskytuje akumulátorová baterie. Můžeme se k tomu přiblížit, vložíme-li mezi usměrňovač a zátěž dolní propust.

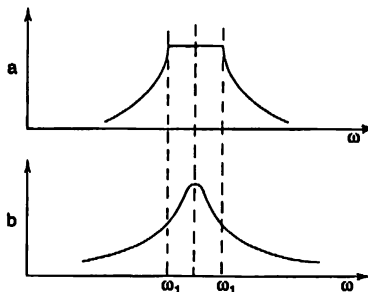
Z kapitoly 50 dříve víme, že takovou funkci času, jako je na obr. 22.24, lze vyjádřit jako následující superpozice: stálé napětí plus sinusová vlna plus sinusová vlna o vyšší kmitočtu plus sinusová vlna o ještě vyšší kmitočtu atd., tj. jako Fourierova řada. Je-li náš filtr lineární (když – jak jsme předpokládali – se hodnoty L a C nemění při změnách proudů a napětí), pak to, co z filtru vychází, představuje superpozici výstupů od každé složky na jeho vstupu.



Obr. 22.24 Výstupní napětí dvoucestného usměrňovače

Zabezpečíme-li, aby mezní frekvence ω_0 pro náš filtr ležela hodně pod nejnižší frekvencí ve funkci $U(t)$ bude stejnosměrný proud (pro nějž $\omega=0$) filtrem procházet pěkně, ale amplituda první harmonické bude značně seřfznuta. A amplitudy vyšších harmonických budou seřfznuty ještě víc. Výstup tedy můžeme dostat libovolně hladký; závisí to jen na tom, kolik filtračních členů jsme ochotni koupit.

Horní propust se používá, je-li třeba přehradit některé nízké frekvence. Lze jej například použít v gramofonovém zesilovači, aby se propouštěla hudba a současně se zadržoval nízkofrekvenční hukot vznikající chvěním motorku otáčejícího kotoučem.



Obr. 22.25 a) pásmová propust, b) prostá rezonanční propust

Lze vyrobit i pásmové propusti, které přehrazují frekvence ležící pod nějakou frekvencí ω_1 a nad jinou frekvencí ω_2 (vyšší než ω_1), ale mezi ω_1 a ω_2 propouštějí. Toho lze docílit snadno

složením horní a dolní propusti dohromady. Ale častěji se to provádí pomocí řetězového obvodu, v němž jsou komplikovanější impedance Z_1 a Z_2 – každá představuje kombinaci několika L a C . Činitel přenosu takové pásmové propusti bude vypadat tak jako graf na obr. 22.25 a. Lze ji použít k oddělení signálů, které zabírají pouze určitý frekvenční interval, například z mnoha kanálů ve vysokofrekvenčním telefonním kabelu nebo modulované nosné vlny rozhlasového vysílání.

V kapitole 25 dšlu 1 jsme viděli, že takového filtrování lze docílit i využitím selektivnosti obyčejné rezonanční křivky, kterou jsme pro porovnání nakreslili jako obr. 22.25 b. Pro některé účely však rezonanční filtr není tak dobrý jako pásmový. Jistě si vzpomínáte (kapitola 48, díl 1), že je-li nosná vlna o frekvenci ω_n modulována „signálovou“ frekvencí ω_m , výsledný signál neobsahuje jen nosnou frekvenci, ale i frekvence dvou bočních pásem $\omega_n + \omega_m$ a $\omega_n - \omega_m$. V rezonančním filtru se tato boční pásma vždy trochu zeslabují a zeslabení je tím větší, čím vyšší je frekvence signálu, o čemž se můžete přesvědčit na obrázku. Takový filtr tedy nemá dobrou frekvenční charakteristiku. Vyšší hudební tóny se přes něj nedostanou. Ale provádí-li se filtrování pomocí pásmového filtru zkonstruovaného tak, aby šířka $\omega_2 - \omega_1$ byla alespoň dvojnásobkem signálové frekvence, bude frekvenční charakteristika pro příslušné signály „plochá“.

Je nutné udělat ještě jednu poznámku o řetězovém obvodu: LC obvod z obr. 22.20 přibližně představuje i přenosové vedení. Máme-li dlouhý vodič uložený rovnoběžně s jiným vodičem, například drát v koaxiálním kabelu nebo drát zavěšený nad zemí, bude mezi těmito vodiči existovat určitá kapacita i určitá indukčnost způsobená magnetickým polem mezi nimi. Představíme-li si toto vedení rozdělené na malé části délky Δl , bude každá délka vypadat jako sekce LC obvodu se sériovou indukčností ΔL a paralelní kapacitou ΔC . Pak lze použít naše výsledky pro řetězový filtr. Vezmeme-li limitu, když se Δl blíží k nule, dostaneme dobrý popis přenosového vedení. Všimněte si, že když se Δl víc a víc zkracuje, zmenšují se zároveň i hodnoty ΔL a ΔC , ale vždy ve stejném poměru, takže podíl $\Delta L/\Delta C$ se pak nemění. Proto vezmeme-li limitu rovnice (22.28), když se ΔL a ΔC blíží k nule, zjistíme, že charakteristická impedance Z_0 je rovna čisté rezistanci, jejíž velikost je $\sqrt{\Delta L/\Delta C}$. Poměr $\Delta L/\Delta C$ můžeme vyjádřit jako L_0/C_0 kde L_0 a C_0 označují indukčnost a kapacitu jednotkové délky vedení. Pak dostaneme vztah

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \quad (22.33)$$

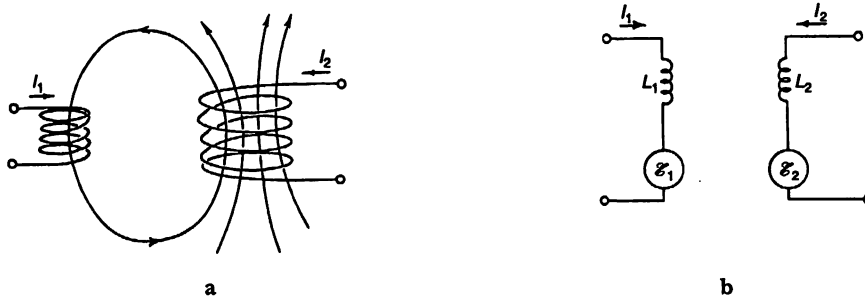
Také si všimněte, že se když ΔL a ΔC blíží k nule, jde mezní frekvence $\omega_0 = \sqrt{4/LC}$ k nekonečnu. Pro ideální přenosové vedení neexistuje žádná mezní frekvence.

22.8 JINÉ PRVKY OBVDŮ

Dosud jsme definovali v obvodu jen ideální impedance – indukčnost, kapacitu a odpor, jakož i ideální generátor napětí. Nyní chceme ukázat, že jiné prvky, například vzájemné indukčnosti nebo tranzistory nebo elektronky, také lze popsat pomocí těchto základních prvků. Představte si, že máme dvě cívky a že část indukčního toku z jedné cívky – ať už úmyslně nebo z jiné příčiny – protíná druhou cívku (obr. 22.26 a). Pak budou mít obě cívky vzájemnou indukčnost M , takže když se v jedné z nich mění proud, ve druhé se bude generovat napětí. Můžeme takový efekt vyjádřit v našich ekvivalentních obvodech? Můžeme, a to následujícím způsobem. Viděli jsme, že elektromotorické napětí indukované v každé z obou vzájemně na sebe působících cívek lze vyjádřit jako součet dvou částí:

$$\mathcal{E}_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} \pm M \frac{dI_2}{dt} \quad (22.34)$$

$$\mathcal{E}_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt} \pm M \frac{dI_1}{dt}.$$



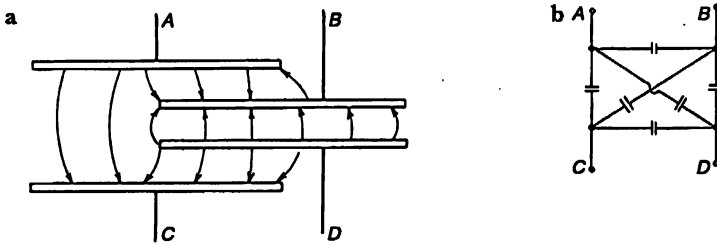
Obr. 22.26 Ekvivalentní obvod vzájemné indukčnosti

První člen pochází z vlastní indukčnosti dané cívky a druhý ze vzájemné indukčnosti s druhou cívkou. Znaménko druhého členu může být plus nebo minus v závislosti na tom, jak magnetický tok z jedné cívky protíná druhou cívku. Provedeme-li tytéž aproximace, jaké jsme použili při popisu ideální indukčnosti, můžeme tvrdit, že rozdíl potenciálů svorek každé cívky je roven elektromotorickému napětí v cívce. Pak jsou obě rovnice v soustavě (22.34) stejné, jako bychom dostali pro obvod na obr. 22.26 b za předpokladu, že elektromotorické napětí v každém z obou nakreslených obvodů závisí na proudu v druhém obvodu podle vztahů

$$\mathcal{E}_1 = \pm i\omega MI_2, \quad \mathcal{E}_2 = \pm i\omega MI_1. \quad (22.35)$$

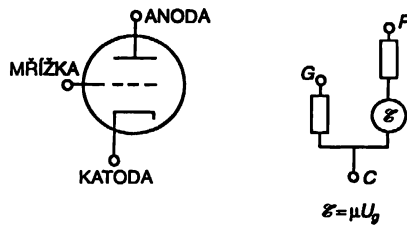
Co můžeme udělat, je toto: Účinek vlastní indukčnosti vyjádřit normálním způsobem a účinek vzájemné indukčnosti nahradit pomocným ideálním generátorem napětí. Kromě toho musíme, samozřejmě, mít i rovnici, která toto elektromotorické napětí uvádí do souvislosti s proudem v nějaké části obvodu; ale pokud je tato rovnice lineární, k našim rovnicím pro obvod jsme pouze přidali další lineární rovnice a všechny z našich dřívějších závěrů o ekvivalentních obvodech apod. zůstávají v platnosti.

Kromě vzájemných indukčností mohou existovat i vzájemné kapacity. Dosud, když jsme hovořili o kondenzátorech, jsme si vždy představovali, že jde jen o dvě elektrody. Avšak v mnoha situacích, například v elektronce, se může blízko u sebe nacházet mnoho elektrod. Vložíme-li na jakoukoliv elektrický náboj, bude její elektrické pole indukovat náboje na každé další elektrodě a ovlivňovat její potenciál. Jako příklad prozkoumáme takovou sestavu elektrod, jakou znázorňuje obr. 22.27 a. Představte si, že tyto čtyři elektrody jsou připojeny k vnějším obvodům pomocí vodičů A, B, C a D. Pokud nás zajímají jen elektrostatické efekty, ukazuje ekvivalentní obvod takové soustavy elektrod část b tohoto obrázku. Vzájemné elektrostatické působení každé elektrody na každou další z těchto elektrod je ekvivalentní existenci kapacity mezi těmito elektrodami.

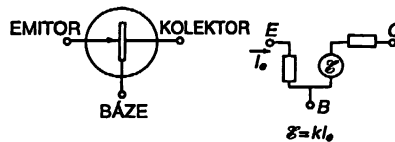


Obr. 22.27 Ekvivalentní obvod vzájemné kapacity

Konečně prozkoumáme, jak bychom měli v obvodech se střídavými proudy reprezentovat taková složitá zařízení, jako jsou tranzistory a elektronky. Na začátku je třeba zdůraznit, že tato zařízení často pracují takovým způsobem, že vztah mezi proudy a napětími vůbec není lineární. V takových případech ta z našich tvrzení, která závisí na lineárních rovnicích přestávají platit. Na druhé straně v mnoha aplikacích jsou funkční charakteristiky dostatečně lineární, abychom mohli tranzistory a elektronky pokládat za lineární zařízení. Myslíme tím, že střídavé proudy řekněme v anodovém obvodu elektronky jsou přímo úměrné napětím na jiných elektrodách, například mřížkovému napětí a anodovému napětí. Existují-li takové lineární vztahy, můžeme včlenit příslušné zařízení do naší reprezentace pomocí ekvivalentního obvodu.



Obr. 22.28 Ekvivalentní obvod elektronky při nízkých frekvencích



Obr. 22.29 Ekvivalentní obvod tranzistoru při nízkých frekvencích

Naše reprezentace bude muset – podobně jako v případě vzájemné indukčnosti – zahrnovat pomocné generátory napětí, jimiž je popsán vliv napětí nebo proudů v jedné části zařízení na proudy a napětí v jiné jeho části. Například anodový obvod triody lze obvykle reprezentovat jako odpor zapojený do série s ideálním generátorem napětí, jehož emn je přímo úměrné mřížkovému napětí. Dostáváme tak ekvivalentní obvod nakreslený na obr. 22.28.³⁴⁾ Podobně kolektorový obvod tranzistoru lze vhodně reprezentovat jako rezistor zapojený do série s ideálním generátorem napětí, jehož velikost je přímo úměrná proudu z emitoru do báze tranzistoru. Ekvivalentní

³⁴⁾ Tento ekvivalentní obvod je správný pouze pro nízké frekvence. Při vysokých frekvencích se ekvivalentní obvod stává složitějším a bude obsahovat různé tzv. parazitní kapacity a indukčnosti.

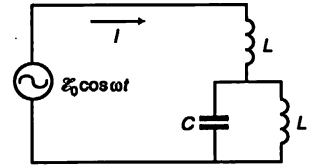
obvod pak vypadá tak, jak je nakresleno na *obr. 22.29*. Pro elektronky nebo tranzistory můžeme takové reprezentace používat tehdy, když rovnice popisující jejich činnost jsou lineární. Včlení-li se tato zařízení do složité sítě, zůstávají naše obecné závěry o ekvivalentní reprezentaci libovolného zapojení prvků stále platná.

Existuje jedna pozoruhodná věc, kterou se obvody s tranzistory a elektronkami liší od obvodů obsahujících pouze impedance – v nich se totiž reálná část efektivní impedance Z_{ef} může stát zápornou. Viděli jsme, že reálná část Z představuje ztrátu energie. Ale důležitou vlastností tranzistorů a elektronek je, že *dodávají* energii do obvodu. (Přirozeně, oni sami „energii“ nevyrábějí, ale odebrávají ji ze stejnosměrných obvodů zahrnujících i zdroje napětí a transformují ji na energii střídavého proudu.) Tak je tedy možné dostat obvod se záporným odporem. Takový obvod má tu vlastnost, že když jej připojíte k nějaké impedanci s kladnou reálnou částí, tj. kladné rezistancí, a uspořádáte vše tak, aby součet obou reálných částí byl přesně roven nule, nebude v tomto složeném obvodu docházet ke ztrátám energie. A když žádné ztráty energie nejsou, každé střídavé napětí, které jednou vzniklo, zůstane navždy. To je základní myšlenka, na níž je založena činnost oscilátoru anebo signálového generátoru, kterého lze použít jako zdroj střídavého napětí každé požadované frekvence.

PŘÍKLADY A CVIČENÍ

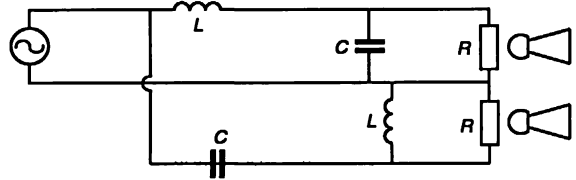
22.1 ■ Vodiče jsou propojeny tak, že tvoří hrany krychle, přičemž odpor každé z hran je roven 1Ω . Najděte odpor mezi různými páry vrcholů krychle.

22.2 ■ a) Určete proud I v obvodu, jehož schéma je na obrázku.
b) Čemu bude roven proud I , budou-li mít cívky znázorněné na obrázku vzájemnou indukčnost M ?

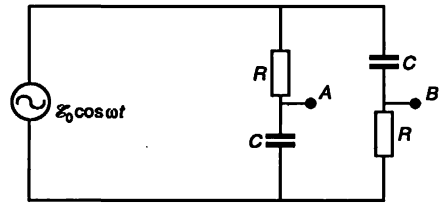


22.3 ■ Na obrázku je znázorněno schéma zvukové hi-fi aparatury. Efektivní odpor každého z reproduktorů je R .

a) Ukažte, že při $R^2 = L/2C$ bude impedance na vstupu (na svorkách generátoru) reálná a rovna R .
b) Ukažte, že na frekvenci ω_c dané vztahem $\omega_c^2 = 1/LC$ připadá na každý z reproduktorů polovina celkového výkonu.



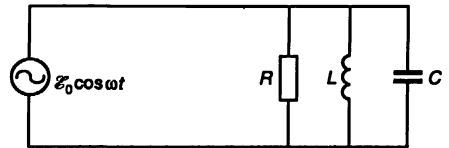
22.4 ■ Ukažte, že amplituda napětí mezi body A a B v obvodu znázorněném na obrázku nezávisí na ω . Popište kvalitativně, jak závisí fáze tohoto napětí na ω . Jak se změní amplituda a fáze tohoto napětí, bude-li mít napěťový zdroj vnitřní odpor $R/10$?



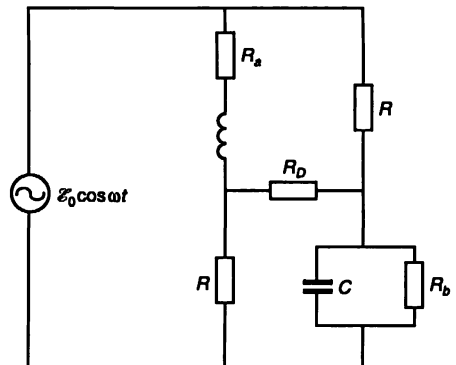
22.5 ■ Uvažujte elektrický obvod znázorněný na obrázku.

a) Nakreslete schématicky závislost amplitudy proudu v obvodu na frekvenci pro libovolně zvolené veličiny L , C a R .
b) Je-li $R \gg \sqrt{LC}$, porovnejte rezonanční frekvenci a šířku rezonanční křivky daného obvodu s analogickými hodnotami pro sériový obvod za podmínky $R \ll \sqrt{LC}$.

Zvlášť uvažujte případ $R = K\sqrt{LC}$ pro paralelní obvod a $R = (1/K)\sqrt{LC}$ pro sériový obvod.

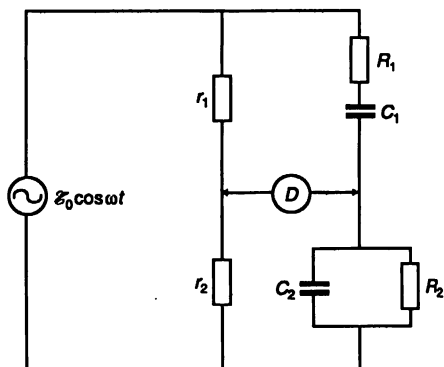


22.6 ■ Můstkové schéma na obrázku se používá k měření indukčnosti. Jako zdroj střídavého emn o frekvenci ω slouží napěťový generátor. Je-li můstek vyvážen, proud protékající odporem R_D je nulový. Najděte L jako funkci R a C .



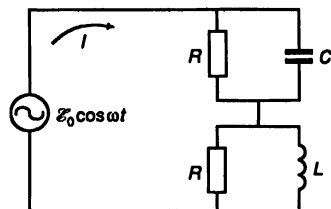
- 22.7 ■ Zobrazené schéma znázorňuje Wienův můstek, často používaný v selektivních RC obvodech. Je-li proud procházející indikátorem D nulový, říkáme, že můstek je vyvážen. Ukažte, že v tom případě musí být splněny podmínky $\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = \left(\frac{R_1}{R_2}\right) + \left(\frac{C_2}{C_1}\right)$,

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}.$$

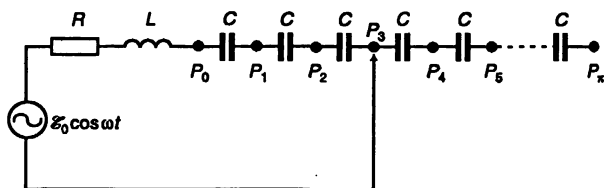


- 22.8 ■ V obvodu ukázaném na obrázku působí zdroj střídavého napětí $U = U_0 \cos \omega t$.

- Ukažte že jsou-li R , L a C zvoleny tak, aby $RC = L/R$, proud I v obvodu nezávisí na frekvenci.
- Jaký je za této podmínky fázový rozdíl mezi působícím napětím a napětím na prvku RC ?



- 22.9 ■ Elektrický obvod je sestaven tak že jeden z vodičů znázorněný na obrázku šipkou a připojený v bodě P_3 může být připojen k libovolnému z bodů P_0, P_1, \dots, P_n .



- Najděte výraz pro výkon, který je vyvíjen na odporu R , je-li obvod uzavřen v bodě P_m , kde $0 \leq m \leq n$.
- Nechť $R = 1000 \Omega$, $L = 10 \text{ H}$, $C = 20 \mu\text{F}$, $\omega = 100 \text{ rad/s}$.
 - Pro které m bude tento výkon maximální?
 - Jaká je maximální hodnota napětí mezi body P_0 a P_2 při $m = 2$ a $U_0 = 100 \text{ V}$? A na odporu R ?

Dutinové rezonátory

23.1 REÁLNÉ PRVKY OBVODŮ

23.2 KONDENZÁTOR PŘI VYSOKÝCH FREKVENCÍCH

23.3 REZONANČNÍ DUTINA

23.4 KMITAVÉ MODY DUTINOVÝCH REZONÁTORŮ

23.5 DUTINOVÉ REZONÁTORY A REZONANČNÍ OBVODY

Přečtěte si znovu: kapitolu 23, díl 1, Rezonance
kapitolu 49, díl 1, Vlastní kmity

23.1 REÁLNÉ PRVKY OBVODŮ

Každý obvod sestavený z ideálních impedancí a generátorů, když se na něj díváme přes jakýkoliv pár svorek, je při každé dané frekvenci ekvivalentní generátoru \mathcal{E} v sérii s impedancí Z . Je tomu tak proto, že vložíme-li na svorky napětí U a řešíme všechny rovnice, abychom našli proud I , musíme dostat lineární vztah mezi proudem a napětím. Protože všechny rovnice jsou lineární, musí záviset výsledný proud I na napětí U také jen lineárně. Nejobecnější lineární závislost lze vyjádřit takto:

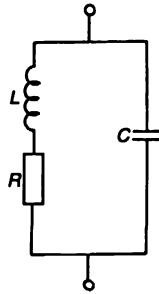
$$I = \frac{1}{Z}(U - \mathcal{E}). \quad (23.1)$$

Obecně jak U , tak i \mathcal{E} mohou nějakým složitým způsobem záviset na frekvenci ω . Rovnice (23.1) však představuje vztah, který bychom dostali, kdyby k našim svorkám byl připojen generátor $\mathcal{E}(\omega)$ v sérii s impedancí $Z(\omega)$.

Existuje i obrácená otázka: Máme-li nějaký elektromagnetický přístroj se dvěma vývody a měříme vztah mezi I a U , abychom určili \mathcal{E} a Z jako funkce frekvence, lze najít takovou kombinaci našich ideálních prvků, která je ekvivalentní jeho vnitřní impedanci Z . Odpověď je, že pro každou rozumnou, tj. fyzikálně významnou, funkci $Z(\omega)$ je možné situaci libovolně přesně

aproximovat obvodem obsahujícím konečnou množinu ideálních prvků. My se nyní nechceme zabývat touto úlohou obecně, ale pouze nahlédnout, co lze na základě fyzikálních úvah očekávat v několika případech.

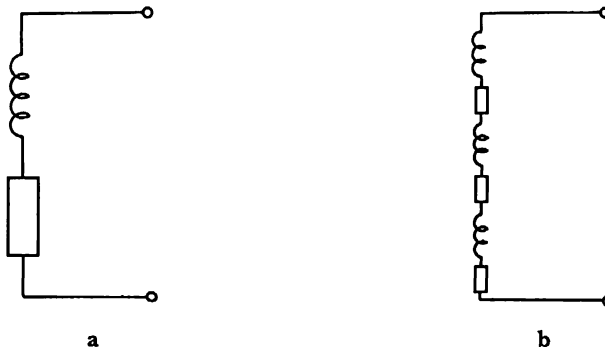
Máme-li na mysli reálný rezistor, víme, že jím procházející proud vytvoří magnetické pole. Každý reálný rezistor má tedy nějakou indukčnost. Kromě toho, je-li na rezistoru spád potenciálu, musí na jeho koncích existovat náboje, aby vytvořily potřebná elektrická pole. Náboje se budou měnit přímo úměrně změnám napětí, takže rezistor bude mít i určitou kapacitu. Proto očekáváme, že reálný rezistor bude mít takový ekvivalentní obvod, jako je na *obr. 23.1*. V dobře zkonstruovaném odporu jsou tzv. parazitní prvky L a C tak malé, že při frekvencích, pro které je určen, je ωL mnohem menší než R a $1/\omega C$ je mnohem větší než R , což umožňuje zanedbat je. Při zvyšování frekvence se však nakonec stanou významnými a odpor se začne chovat jako rezonanční obvod.



Obr. 23.1 Ekvivalentní obvod reálného rezistoru

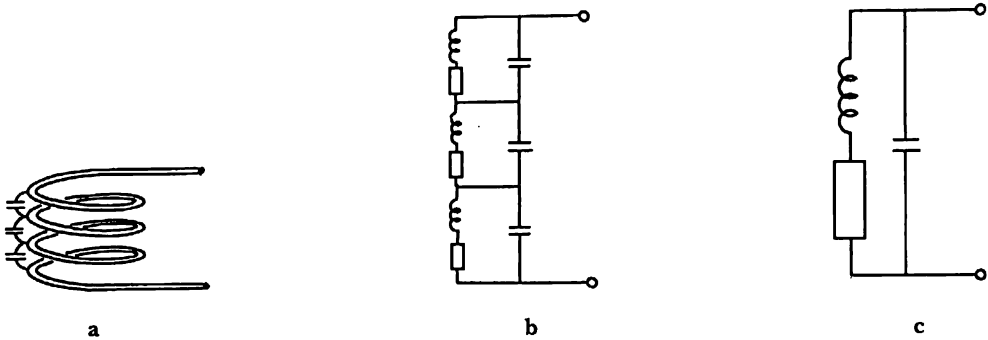
Reálný induktor také není totožný s idealizovanou indukčností, jejíž impedance je $i\omega L$. Reálná cívka z drátu bude mít nějaký odpor, takže při nízkých frekvencích je opravdu ekvivalentní indukčnosti v sérii s určitým odporem, jak ukazuje *obr. 23.2 a*. Ale asi si myslíte, že v reálné cívce existují odpor a indukčnost společně – odpor je rozložen podél celého vodiče, je tedy „promíchán“ s indukčností. Pravděpodobně bychom měli raději použít takový obvod, jako je na *obr. 23.2 b*, který má několik malých R a L v sérii. Ale výsledná impedance takového obvodu je právě $\Sigma R + \Sigma i\omega L$, což je ekvivalentní jednoduššímu diagramu v části *a*.

Aproximace reálné cívky indukčností v sérii s odporem přestává při zvyšující se frekvenci vyhovovat. Důležitost získávají náboje, které se nutně usadí na vodičích, aby na nich vytvořily napětí.



Obr. 23.2 Ekvivalentní obvod reálné indukční cívky při nízkých frekvencích

Jeví se to tak, jako kdyby se mezi závity cívky nacházely malé kondenzátorky (obr. 23.3 a). V tomto případě se můžeme pokusit reálnou cívku aproximovat obvodem nakresleným na obr. 23.3 b. Při nízkých frekvencích lze tento obvod dobře nahradit jednodušším, ukázaným na obr. 23.3 c (což je opět tentýž rezonanční obvod, jako jsme našli pro vysokofrekvenční model rezistoru). Při vyšších frekvencích je však vhodnější složitější obvod obr. 23.3 b. Opravdu, čím přesněji chcete vystihnout skutečnou impedanci reálné, fyzikální indukčnosti, tím víc ideálních prvků budete muset použít v jejím umělém modelu.



Obr. 23.3 Ekvivalentní obvod reálné indukční cívky při vyšších frekvencích

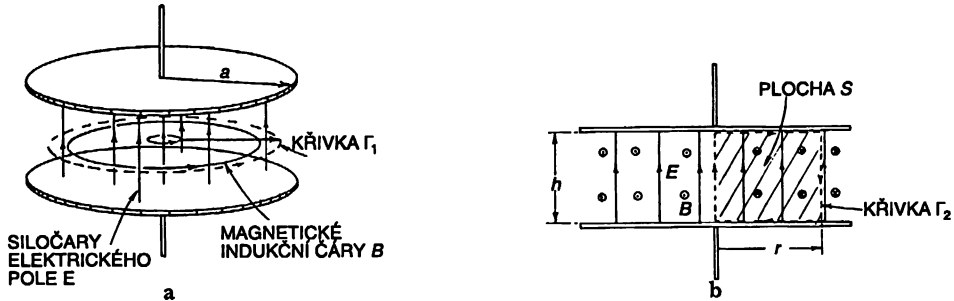
Podívejme se trochu blíže na to, co se děje v reálné cívce. Impedance indukčnosti se mění jako ωL a při nízkých frekvencích se tedy stává nulovou – v tom případě jde o „spojení nakrátko“: jedině, co pozorujeme, je odpor vodiče. Zvyšujeme-li frekvenci, stane se ωL velmi brzy mnohem větším než R a cívka se chová docela jako ideální indukčnost. Při dalším zvyšování frekvence získají význam kapacity. Jejich impedance je přímo úměrná veličině $1/\omega C$, která je pro malá ω velká. Při dostatečně nízkých frekvencích představuje kondenzátor přerušeni v obvodu a je-li ještě s něčím paralelně zapojen, proud nevede. Při vysokých frekvencích však proud poteče spíš mezi závity než indukčností. V cívce tedy proud skáče z jednoho závitu na druhý a neobtěžuje se jít kolem dokola, kde musí překonávat elektromotorickou sílu. Tedy kdybychom snad i chtěli, aby procházel vinutím, půjde po snazší cestě – cestě nejmenší impedance.

Kdyby tento jev představoval předmět obecného zájmu, bylo by jej možné nazvat „vysokofrekvenční bariéra“ nebo tak nějak. Ke stejnému úkazu dochází i v jiných oblastech. Když se pokoušíte v aerodynamice docílit, aby se tělesa pohybovala rychleji než zvuk, pokud byla projektována pro nižší rychlosti, nepodaří se to. To neznamená, že tam existuje nějaká velká „bariéra“; znamená to pouze, že je těleso třeba přestavět. Podobně naše cívka, kterou jsme konstruovali jako „indukčnost“, se při vysokých frekvencích nebude chovat jako dobrá indukčnost, ale jako nějaký jiný objekt. Pro vysoké frekvence musíme vynalézt jiné zařízení.

23.2 KONDENZÁTOR PŘI VYSOKÝCH FREKVENCÍCH

Nyní chceme podrobně hovořit o chování kondenzátoru – máme na mysli geometricky ideální kondenzátor – při zvětšování frekvence, abychom prozkoumali změnu jeho vlastností. (Raději použijeme kondenzátor místo cívky, neboť geometrie páru rovinných elektrod je mnohem méně složitá než geometrie cívky.) Budeme hovořit o kondenzátoru ukázaném na obr. 23.4 a, který se

skládá ze dvou navzájem rovnoběžných kruhových desek, připojených párem vodičů k vnějšímu generátoru. Nabijeme-li kondenzátor stejnosměrným proudem, objeví se na jedné desce kladný a na druhé záporný náboj a mezi deskami bude homogenní elektrické pole.



Obr. 23.4 Elektrická a magnetická pole v prostoru mezi elektrodami deskového kondenzátoru

Nyní předpokládejme, že místo stejnosměrného proudu přivedeme k deskám střídavý proud o nízké frekvenci. (Později zjistíme, jaká frekvence je „nízká“ a jaká je „vysoká“.) Řekněme, že kondenzátor připojíme k nízkofrekvenčnímu generátoru. Když se napětí střídá, kladný náboj se z horní desky odvádí a přivádí se na ni záporný náboj. Po dobu tohoto stádia elektrické pole mizí a vzápětí vzniká pole opačného směru. Když se náboj pomalu přesouvá nahoru a dolů, elektrické pole jej následuje. Přitom v každé chvíli je homogenní, jak ukazuje obr. 23.4 b, s výjimkou okrajových efektů, které budeme zanedbávat. Pro velikost elektrického pole můžeme psát

$$E = E_0 e^{i\omega t}, \quad (23.2)$$

kde E_0 je konstanta.

Bude to pravda i při zvyšování frekvence? Ne, neboť když elektrické pole roste a klesá, existuje tok elektrického pole každou uzavřenou křivkou, např. i Γ_1 na obr. 23.4 a. A jak víte, účinkem měnícího se elektrického pole se vytváří magnetické pole. Podle jedné z Maxwellových rovnic, máme-li, jako zde proměnné elektrické pole, musí existovat i křivkový integrál magnetického pole. Integrál magnetického pole po uzavřeném okruhu vynásobený konstantou c^2 je roven rychlosti časové změny elektrického toku plochou uvnitř okruhu (neexistují-li proudy):

$$c^2 \oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{uvnitř } \Gamma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (23.3)$$

O jak velké magnetické pole tady jde? To není příliš těžká otázka. Předpokládejme, že jako uzavřenou křivku Γ_1 jsme vzali kružnici o poloměru r . Ze symetrie vyplývá, že průběh magnetického pole je takový jak ukazuje obrázek. Potom křivkový integrál \mathbf{B} je $2\pi r B$. A protože elektrické pole je homogenní, je tok elektrického pole prostě roven součinu E a plošného obsahu kruhu πr^2 :

$$c^2 B \cdot 2\pi r = \frac{\partial}{\partial t} E \cdot \pi r^2. \quad (23.4)$$

Pro naše střídavé pole je derivace E podle času rovna prostě $i\omega E_0 e^{i\omega t}$. Zjišťujeme tak, že náš kondenzátor má magnetické pole

$$B = \frac{i\omega r}{2c^2} E_0 e^{i\omega t}. \quad (23.5)$$

Jinými slovy, magnetické pole také osciluje a jeho velikost je přímo úměrná r .

Jaký to má důsledek? Existuje-li proměnné magnetické pole, budou existovat indukovaná elektrická pole a kondenzátor se začne chovat tak trochu jako indukčnost. Při vyšší frekvenci se magnetické pole zvětší, neboť je přímo úměrné rychlosti změny pole E , a tedy frekvenci ω . Impedance kondenzátoru už nebude rovna pouze $1/i\omega C$.

Pokračujme ve zvyšování frekvence a pečlivě analyzujeme, co se stane. Máme magnetické pole, které směřuje jednou dopředu jednou dozadu. Ale pak nemůže být elektrické pole homogenní, jak jsme předpokládali. Existuje-li totiž proměnné magnetické pole, musí existovat křivkový integrál elektrického pole – v důsledku Faradayova zákona. Existuje-li tedy pozorovatelné magnetické pole (což při vysokých frekvencích začíná být), elektrické pole nemůže být stejné ve všech vzdálenostech od středu. Musí se měnit s r tak, aby křivkový integrál elektrického pole mohl být roven měnícímu se toku magnetického pole.

Podívejme se, zda dokážeme vypočítat skutečné elektrické pole. Můžeme to udělat výpočtem „opravy“ k homogennímu elektrickému poli, které jsme původně předpokládali pro nízké frekvence. Označme homogenní elektrické pole E_1 , které je stále rovno $E_0 e^{i\omega t}$, a skutečné pole vyjádříme jako součet, takže

$$E = E_1 + E_2,$$

kde E_2 je oprava vyvolaná proměnným magnetickým polem. Pro každé ω vyjádříme pole ve středu kondenzátoru jako $E_0 e^{i\omega t}$ (čímž definujeme E_0), a to tak, abychom ve středu neměli žádnou opravu, tj. aby $E_2 = 0$ při $r=0$.

K nalezení E_2 můžeme využít integrální tvar Faradayova zákona:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{tok } B).$$

Tyto integrály jsou jednoduché, budeme-li je počítat po křivce Γ_2 , vyznačené na obr. 23.4 b, která jde nahoru v ose kondenzátoru, potom radiálně ven do vzdálenosti r podél horní desky, vertikálně dolů ke spodní desce a zpět k ose. Křivkový integrál E_1 je po této křivce, samozřejmě, roven nule; tedy přispívá pouze E_2 a příslušný integrál je právě roven $-E_2(r)h$, kde h je vzdálenost mezi deskami. (E budeme pokládat za kladné tehdy, když směřuje nahoru.) To je rovno rychlosti změny toku B , který dostaneme integrováním po vyčárkované ploše S uvnitř křivky Γ_2 na obr. 23.4 b. Tok vertikálním páskem o šířce dr je $B(r)h dr$, takže celkový tok je

$$h \int B(r) dr.$$

Položíme-li $-\partial/\partial t$ toku rovno křivkovému integrálu E_2 , dostaneme

$$E_2(r) = \frac{\partial}{\partial t} \int B(r) dr. \quad (23.6)$$

Všimněte si, že h se zkrátí – pole nezávisí na vzdálenosti elektrod.

Použijeme-li pro $B(r)$ vyjádření (23.5), dostaneme

$$E_2(r) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{i\omega r^2}{4c^2} E_0 e^{i\omega t}.$$

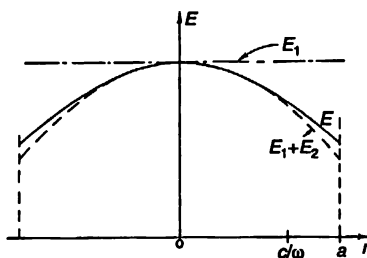
Derivování podle času vede k dalšímu součiniteli $i\omega$ a dostáváme

$$E_2(r) = -\frac{\omega^2 r^2}{4c^2} E_0 e^{i\omega t}. \quad (23.7)$$

Podle očekávání bude indukované pole *zmenšovat* původní elektrické pole, a to tím víc, čím dále jsme od osy. Opravené pole $E = E_1 + E_2$ pak bude

$$E = E_1 + E_2 = \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{4c^2}\right) E_0 e^{i\omega t}. \quad (23.8)$$

Elektrické pole v kondenzátoru už není homogenní, má parabolický průběh ukázaný na obr. 23.5 čárkovaně. Vidíte, že náš jednoduchý kondenzátor se stává trochu složitým.



Obr. 23.5 Elektrické pole v prostoru mezi elektrodami kondenzátoru při vysoké frekvenci (okrajové efekty jsou zanedbány)

Naše výsledky bychom nyní mohli použít k výpočtu impedance kondenzátoru při vysokých frekvencích. Když známe elektrické pole, mohli bychom počítat náboje na elektrodách a zjistit, jak proud kondenzátorem závisí na frekvenci ω . Tato úloha nás však nyní nezajímá. Víc nás zajímá co se stane, když pokračujeme se zvětšováním frekvence. Chceme se dozvědět, co se stane při ještě vyšších frekvencích. A opravdu s tím ještě nejsme hotovi? Ne, protože elektrické pole jsme opravili, což znamená, že magnetické pole tak, jak jsme jej počítali, už není správné. Pole dané vztahem (23.5) je přibližně správné, ale pouze pro první přiblížení. Označme jej tedy B_1 . Vztah (23.5) pak musíme přepsat na tvar

$$B_1 = \frac{i\omega r}{2c^2} E_0 e^{i\omega t}. \quad (23.9)$$

Budete si pamatovat, že toto pole bylo vyvoláno změnou pole E_1 . Správné magnetické pole bude nyní to, které pochází od celkového elektrického pole $E_1 + E_2$. Vyjádříme-li magnetické pole jako

součet $B = B_1 + B_2$, představuje druhý člen právě dodatkové pole vytvořené polem E_2 . Abychom našli B_2 , můžeme udělat stejný úvahu jako při zjišťování B_1 ; křivkový integrál B_2 po křivce Γ_1 je roven rychlosti změny toku E_2 smyčkou Γ_1 . Opět dostaneme rovnici (23.4) s B_2 místo B a E_2 místo E :

$$c^2 B_2 \cdot 2\pi r = \frac{\partial}{\partial t} (\text{tok } E_2 \text{ smyčkou } \Gamma_1).$$

Protože E_2 se mění s poloměrem, abychom našli tok E_2 , musíme integrovat po kruhové ploše uvnitř Γ_1 . Vyjádříme-li element plochy jako $2\pi r dr$, bude tento integrál

$$\int_0^r E_2(r) \cdot 2\pi r dr.$$

Pro pole $B_2(r)$ dostáváme vztah

$$B_2(r) = \frac{1}{rc^2} \frac{\partial}{\partial t} \int E_2(r) r dr. \quad (23.10)$$

Použijeme-li pro $E_2(r)$ vyjádření (23.7), potřebujeme vypočítat integrál $r^3 dr$, který je roven $r^4/4$. Naše oprava k magnetickému poli tedy bude

$$B_2(r) = -\frac{i\omega^3 r^3}{16c^4} E_0 e^{i\omega t}. \quad (23.11)$$

Ale ještě jsme neskončili! Není-li magnetické pole takové, jak jsme si mysleli dříve, počítali jsme E_2 nekorektně. Musíme udělat další opravu k E , která pochází z dodatkového pole B_2 . Označme tuto dodatkovou opravu k elektrickému poli jako E_3 . S magnetickým polem B_2 souvisí stejným způsobem jako E_2 s B_1 . Můžeme opět použít celý vztah (23.6) a změnit pouze indexy:

$$E_3(r) = \frac{\partial}{\partial t} \int B_2(r) dr. \quad (23.12)$$

Použijeme-li pro B_2 náš výsledek (23.11), je nová oprava k elektrickému poli

$$E_3(r) = +\frac{\omega^4 r^4}{64c^4} E_0 e^{i\omega t}. \quad (23.13)$$

Vyjádříme-li naše dvojnásobně opravené elektrické pole jako součet $E = E_1 + E_2 + E_3$, dostaneme

$$E = E_0 e^{i\omega t} \left[1 - \frac{1}{2^2} \left(\frac{\omega r}{c} \right)^2 + \frac{1}{2^2 \cdot 4^2} \left(\frac{\omega r}{c} \right)^4 \right]. \quad (23.14)$$

Křivka změny elektrického pole s poloměrem už není jednoduchou parabolou, jako jsme nakreslili na obr. 23.5, ale při velkých poloměrech leží trochu nad křivkou ($E_1 + E_2$).

Ještě nejsme docela na konci. Nové elektrické pole vytváří novou opravu k magnetickému poli a nově opravené magnetické pole vyvolá další korekci k elektrickému poli atd. Už však máme

všechny vzorce které potřebujeme. Pro B_3 můžeme použít vztah (23.10), změníme-li indexy B a E z 2 na 3.

Další oprava k elektrickému poli je

$$E_4 = -\frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \left(\frac{\omega r}{c}\right)^6 E_0 e^{i\omega t}.$$

S touto přesností tedy dostáváme, že úplné elektrické pole je dáno vztahem

$$E = E_0 e^{i\omega t} \left[1 - \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{\omega r}{2c}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{\omega r}{2c}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{\omega r}{2c}\right)^6 + \dots \right], \quad (23.15)$$

kde jsme číselné koeficienty napsali takovým způsobem, aby bylo zřejmé, jak má řada pokračovat.

Naším konečným výsledkem je, že elektrické pole v prostoru mezi elektrodami kondenzátoru je pro jakoukoliv frekvenci dáno součinem $E_0 e^{i\omega t}$ a nekonečné řady, která obsahuje pouze proměnnou $\omega r/c$. Chceme-li, můžeme definovat speciální funkci, kterou označíme $J_0(x)$, jako nekonečnou řadu vystupující v závorkách na pravé straně vztahu (23.15):

$$J_0(x) = 1 - \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots \quad (23.16)$$

Naše řešení pak můžeme napsat jako součin výrazu $E_0 e^{i\omega t}$ a této funkce, přičemž $x = \omega r/c$:

$$E = E_0 e^{i\omega t} J_0\left(\frac{\omega r}{c}\right). \quad (23.17)$$

Důvod, proč jsme naši speciální funkci označili J_0 je, že, přirozeně, to není poprvé, co vůbec někdo vypočetl úlohu o oscilacích ve válci. Tato funkce vystupovala už dříve a obvykle se označuje J_0 . Objevuje se vždy, když řešíte úlohu o vlnách s válcovou symetrií. Funkce J_0 je pro válcové vlny tím, čím je funkce kosinus pro vlny na přímce. Je to tedy důležitá funkce, objevená už dávno. Byla pojmenována po matematiku Besselovi. Index nula znamená, že Bessel objevil celou skupinu různých funkcí a tato je první z nich.

Jiné Besselovy funkce – J_1, J_2 atd. – se týkají válcových vln, jejichž intenzita se mění v závislosti na úhlu kolem osy válce.

Úplně zkorigované elektrické pole v prostoru mezi elektrodami našeho válcového kondenzátoru, dané vztahem (23.17), je na obr. 23.5 vyznačeno plnou křivkou. Pro ne příliš vysoké frekvence byla už naše druhá aproximace celkem dobrá. Třetí aproximace byla ještě lepší – ve skutečnosti tak dobrá, že kdybychom ji nakreslili, nebyli byste schopni ji odlišit od plné křivky. V následujícím článku však uvidíte, že k tomu, abychom dostali přesný popis v případě velkých poloměrů nebo vysokých frekvencí, je třeba úplné řady.

23.3 REZONANČNÍ DUTINA

Nyní se chceme podívat, co z našeho řešení vyplývá pro elektrické pole mezi elektrodami kondenzátoru v případě, kdy postupujeme k vyšším a vyšším frekvencím. Pro velké ω se parametr $x = \omega r/c$

stává také velkým a několik prvních členů řady pro J_0 bude prudce vzrůstat. To znamená, že při vyšších frekvencích bude parabola, kterou jsme nakreslili na *obr. 23.5*, prudčeji zakřivena dolů. Ve skutečnosti to vypadá tak, jako kdyby při nějaké vysoké frekvenci – asi když c/ω je přibližně rovno polovině a – pole stále klesalo k nule. Podívejme se, zda J_0 opravdu prochází nulovou hodnotou a stává se záporným. Nejdříve zkusme případ $x=2$:

$$J_0(2) = 1 - 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{36} = 0,22.$$

Funkce ještě nezískává nulovou hodnotu. Proto zkusme vyšší hodnotu x , řekněme 2,5. Po vyčíslení dostaneme

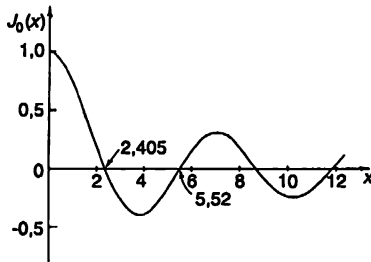
$$J_0(2,5) = 1 - 1,56 + 0,61 - 0,09 = -0,04.$$

Funkce J_0 už mezitím prošla nulovou hodnotou. Z porovnání jejích hodnot pro $x=2$ a $x=2,5$ se zdá, že J_0 prochází nulovou hodnotou v jedné pětině mezi 2,5 a 2. Odhadujeme, že nula nastane pro x přibližně rovné 2,4. Podívejme se co dostaneme pro tuto hodnotu x .

$$J_0(2,4) = 1 - 1,44 + 0,52 - 0,08 = 0,00.$$

Dostáváme nulu s přesností na dvě desetinná místa. Provedeme-li výpočet přesněji (nebo – protože J_0 je známá funkce – vyhledáme-li ji v tabulkách), zjistíme, že prochází nulou při $x=2,405$. Vypočítali jsme to ručně, abychom ukázali, že na podobné věci byste mohli přicházet i sami, místo abychom je hledali v knihách.

Pokud hledáme funkci J_0 v tabulkách, je zajímavé si všimnout jejího průběhu i při vyšších hodnotách x ; znázorňuje jej graf na *obr. 23.6*. Při zvětšování x osciluje $J_0(x)$ mezi kladnými a zápornými hodnotami s klesající amplitudou oscilace.



Öbr. 23.6 Besselova funkce $J_0(x)$

Dostali jsme následující zajímavý výsledek: Při dostatečně vysoké frekvenci bude elektrické pole ve středu našeho kondenzátoru směřovat opačně než u jeho kraje. Například předpokládejme, že máme ω dostatečně vysoké, takže $x = \omega r/c$ je u vnějšího okraje kondenzátoru rovno 4; pak okraj kondenzátoru odpovídá souřadnici $x=4$ na *obr. 23.6*. To znamená, že náš kondenzátor pracuje při frekvenci $\omega = 4c/a$. U hran elektrod bude mít elektrické pole značnou velikost, ale bude směřovat opačně, než bychom očekávali. Je úžasné, co se může s kondenzátorem stát při vysokých frekvencích. Po přechodu k velmi vysokým frekvencím se směr elektrického pole při postupu od středu kondenzátoru ven mnohokrát mění na opačný. Kromě toho tato elektrická pole vyvolávají existenci magnetických polí. Není tedy překvapující, že se náš kondenzátor při vysokých frekvencích nechová jako ideální kapacitance. Můžeme dokonce upadnout do pochyb-

ností, zda se víc podobá kondenzátoru nebo indukčnosti. Musíme zdůraznit, že přitom existují ještě složitější jevy, nastávající na okrajích kondenzátoru, které jsme zanedbali. Například za hranami kondenzátoru dochází k vyzařování vln do okolí, takže pole jsou ještě složitější než ta, která jsme vypočítali, ale teď se nebudeme těmito jevy znepokojovali.

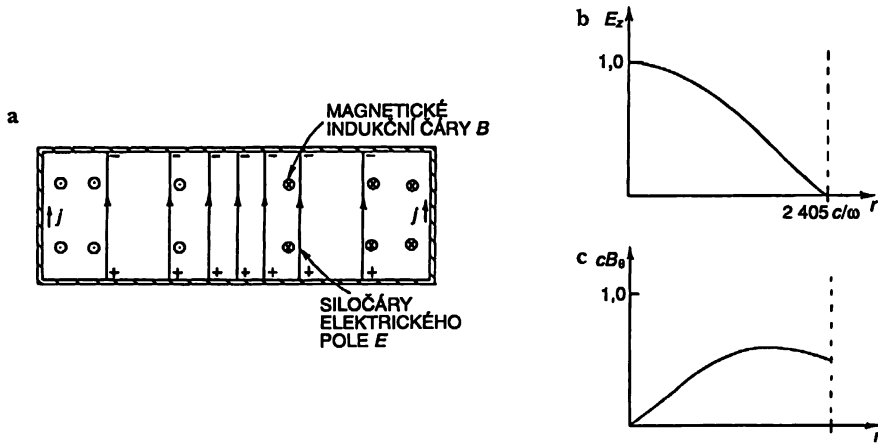
Mohli bychom se pokusit najít ekvivalentní obvod pro kondenzátor, ale asi bude lepší, když prostě připustíme, že kondenzátor, který jsme zkonstruovali pro nízkofrekvenční pole, se nehodí, když je frekvence příliš vysoká. Chceme-li se zabývat vlastnostmi takového objektu při vysokých frekvencích, je nutné vzdát se těch aproximací Maxwellových rovnic, které jsme udělali při zkoumání obvodů a vrátit se k původní soustavě rovnic, která úplně popisuje pole v prostoru. Místo zavedení idealizovaných prvků obvodů musíme pracovat s reálnými vodiči takovými, jaké jsou, a vzít v úvahu všechna pole v prostoru mezi nimi. Například, potřebujeme-li rezonanční obvod při vysokých frekvencích, nebudeme se pokoušet zkonstruovat jej pomocí cívky a deskového kondenzátoru.

Už jsme se zmínili o tom, že deskový kondenzátor, který jsme analyzovali, má některé vlastnosti jak kondenzátoru, tak i indukčnosti. S elektrickým polem souvisí existence nábojů na povrchu elektrod a s magnetickým polem protisměrná emn. Není možné, že už tím máme rezonanční obvod? Skutečně máme. Dejme tomu, že vezmeme takovou frekvenci, pro níž elektrické pole poklesne na nulu při vzdálenosti od středu disku menší, než je poloměr disku; tj. volíme $\omega a/c$ větší než 2,405. Elektrické pole bude nulové všude na kružnici o poloměru rovném této vzdálenosti a koaxiální s diskovými elektrodami. Nyní si představte, že vezmeme tenký kovový plech a odstříháme z něj pásek tak široký, jako je vzdálenost mezi elektrodami kondenzátoru. Pak jej stočíme do válce o takovém poloměru, že bude procházet místy, v nichž je pole nulové. Protože tam nejsou žádná elektrická pole, vložíme-li tam tento vodivý válec, nepotečou jím žádné elektrické proudy, a ani v elektrických ani v magnetických polích nenastane žádná změna. Tak jsme mohli, aniž by se něco změnilo, spojit elektrody kondenzátoru nakrátko. A podívejme se, co jsme dostali – kompletní válcovou plechovku s elektrickým i magnetickým polem uvnitř a bez jakéhokoliv spojení s vnějším světem. Pole uvnitř se nezmění i když odstraníme okraje elektrod přechýlující ven z naší plechovky, jakož i přívody ke kondenzátoru. Ponechali jsme pouze kovovou krabičku s elektrickým a magnetickým polem uvnitř (obr. 23.7 a). Elektrická pole oscilují nahoru a dolů s frekvencí ω , která – nezapomínejte – určila průměr krabičky. Amplituda oscilujícího pole se mění se vzdáleností od osy krabičky tak, jak ukazuje graf na obr. 23.7 b. Graf představuje právě první oblouk Besselovy funkce nultého řádu. V krabičce současně existuje i magnetické pole, jehož indukční čáry jsou kružnice se středem v ose krabičky. Osciluje v čase s fázovým posunem 90° vzhledem k elektrickému poli.

Pro magnetické pole také můžeme vypsát nekonečnou řadu a graficky zobrazit její průběh (obr. 23.7 c).

Jak je možné, že elektrické a magnetické pole může existovat uvnitř krabičky bez jakéhokoliv spojení s vnějškem? Je to proto, že elektrické a magnetické pole se udržují navzájem: proměnné E vytváří B a proměnné B vytváří E – a to vše podle Maxwellových rovnic. Magnetické pole má indukční a elektrické pole kapacitní aspekt; spolu vytvářejí cosi jako rezonanční obvod. Všimněte si, že podmínky, které jsme tu popsali, nastanou pouze tehdy, když je poloměr krabičky přesně $2,405 c/\omega$. V krabičce s udaným poloměrem se oscilující elektrická a magnetická pole budou sama popsány způsobem udržovat pouze při jedné speciální frekvenci. Válcová krabička o poloměru r tedy rezonuje při frekvenci

$$\omega_0 = 2,405 \frac{c}{r}. \quad (23.18)$$



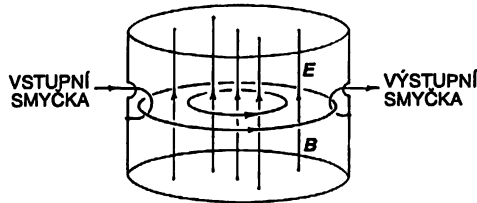
Obr. 23.7 Elektrické a magnetické pole v uzavřené válcové krabici

Řekli jsme, že i po úplném uzavření krabičky budou pole oscilovat stejně jako předtím. Není to úplně pravda. Bylo by to možné, kdyby stěny byly dokonalými vodiči. V případě reálné krabičky však oscilační proudy existující v jejích vnitřních stěnách způsobují ztráty energie v důsledku elektrického odporu materiálu stěn. Oscilace polí postupně zaniknou. Z obr. 23.7 je patrné, že elektrická a magnetická pole uvnitř dutiny musí vyvolávat silné proudy. Pokud náhle zmizí vertikální elektrické pole u vrchní i spodní stěny krabičky, má tam velkou divergenci; proto na vnitřních površích krabičky musí sdílit kladné a záporné elektrické náboje (obr. 23.7 a). Když elektrické pole mění směr, náboje se také musí vyměňovat, takže mezi vrchní a spodní stěnou krabičky nutně prochází střídavý elektrický proud. Tento proud jde po její boční stěně, jak to ukazuje obrázek. Že v této stěně musí existovat proudy se můžeme přesvědčit i tím, že uvažíme, co se stane s magnetickým polem. Podle grafu na obr. 23.7 c klesá magnetické pole při kraji krabičky prudce k nule. K takové náhlé změně magnetického pole může dojít pouze tehdy, když ve stěně existuje elektrický proud. Právě tento proud obstarává střídající se elektrické náboje na vrchní a spodní stěně krabičky.

Možná, že náš objev proudů ve vertikálních stěnách krabičky vás udivuje. Jak je to pak s naším tvrzením, že přidáním vertikální stěny do místa, v němž je elektrické pole nulové, se nic nezmění? Vzpomeňte si však, že když jsme původně vložili vertikální stěnu krabičky, její vršek a dno se rozprostíraly až za boční stěnu, takže na vnější straně krabičky existovala i magnetická pole. Pouze když jsme odstranili ty části elektrod kondenzátoru, které přesahovaly okraj krabičky, musely se na vnitřní straně vertikálních stěn objevit zjevné proudy.

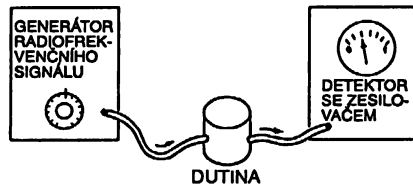
Ačkoliv v důsledku ztrát energie elektrická a magnetická pole v úplně uzavřené krabičce postupně zaniknou, můžeme to odvrátit, uděláme-li do ní malý otvor a budeme-li jím dodávat trochu elektrické energie, aby se ztráty nahradily. Vezmeme malý drát, prostrčíme jej otvorem ve stěně krabičky a připevníme jej k vnitřní straně stěny tak, aby vytvořil malou smyčku (obr. 23.8). Připojíme-li takový drát ke zdroji vysokofrekvenčního střídavého proudu, bude tento proud přivádět energii do elektrického a magnetického pole v dutině a udržovat oscilace obou polí. To nastane, samozřejmě, pouze tehdy, když je frekvence budícího zdroje totožná s rezonanční frekvencí krabičky. Je-li frekvence zdroje jiná, nebudou elektrická a magnetická pole rezonovat a budou v krabičce velmi slabá.

REZONANČNÍ DUTINA



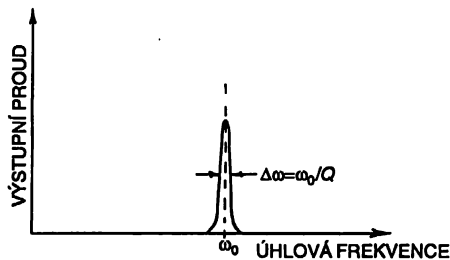
Obr. 23.8 Napojení rezonanční dutiny

O rezonančním chování se lze snadno přesvědčit, když se v krabici udělá ještě jeden malý otvor, kterým se vyvede další vazbová smyčka, jak jsme nakreslili na *obr. 23.8*. Proměnné magnetické pole procházející plochou této smyčky v ní bude generovat indukované elektromotorické napětí. Když tuto smyčku připojíme k nějakému vnějšímu měřicímu obvodu, budou naměřené proudy přímo úměrné intenzitě polí v dutině. Představte si, že nyní připojíme vstupní smyčku naší dutiny ke generátoru radiofrekvenčního signálu (*obr. 23.9*). Tento generátor představuje zdroj střídavého proudu, jehož frekvenci lze měnit otáčením ladicího knoflíku na přední straně generátoru. Výstupní smyčku v dutině pak připojíme k „detektoru“ – přístroji, měřicímu proud přicházející z výstupní smyčky. Údaj na jeho stupnici je přímo úměrný tomuto proudu. Měříme-li výstupní proud jako funkci frekvence signálního generátoru, dostaneme křivku podobnou grafu na *obr. 23.10*.



Obr. 23.9 Pozorování rezonance v dutině

Výstupní proud je malý pro všechny frekvence s výjimkou těch, které jsou velmi blízké frekvenci ω_0 – rezonanční frekvenci dutiny. Resonanční křivka je velmi podobná těm, které jsme popsali v kapitole 23 dílu 1. Šířka rezonance je však mnohem užší než ta, kterou obvykle nacházíme v rezonančních obvodech sestavených z indukčních cívek a kondenzátorů; jinak řečeno Q (kvalita) dutiny je velmi vysoká.



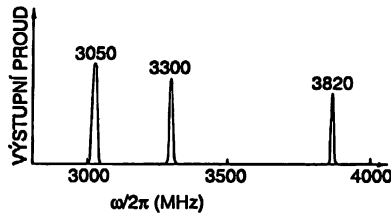
Obr. 23.10 Frekvenční křivka rezonanční dutiny

Není nic neobvyklého najít hodnoty Q rovny 100 000 i víc, jsou-li vnější stěny vyrobeny z materiálu o velmi dobré vodivosti, např. ze stříbra.

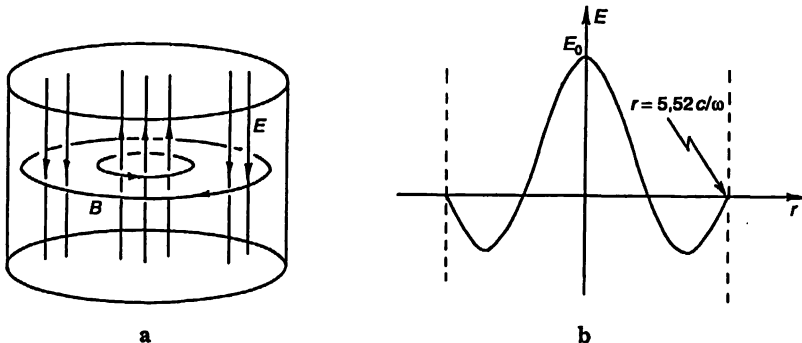
23.4 KMITAVÉ MODY DUTINOVÝCH REZONÁTORŮ

Představte si, že se nyní pokoušíme prověřit naši teorii vykonáním měření se skutečnou krabičkou. Vezmeme válcovou krabičku o průměru 7,6 cm a výšce asi 6,4 cm. Nechtě jsou k ní přimontovány vstupní i výstupní smyčka podle *obr. 23.8*. Vypočteme-li rezonanční frekvenci, která vychází pro tuto krabičku ze vztahu (23.18), dostaneme, že $f_0 = \omega_0 / 2\pi = 3010$ MHz. Nastavíme-li frekvenci našeho signálního generátoru na přibližně 3000 MHz a jemně ji budeme měnit, dokud nenajdeme rezonanci, zjistíme, že maximální výstupní proud se objevuje při frekvenci 3050 MHz, což je docela blízko očekávané rezonanční frekvenci, ale ne přesně tolik. Nesouhlas obou hodnot může mít několik příčin. Možná, že se rezonanční frekvence trochu změnila tím, že jsme vyřízli otvory ke vložení vazbových smyček. Trochu přemýšlení však ukáže, že otvory by měly rezonanční frekvenci o něco snížit, a příčina tedy není v nich. Možná, že nějaká malá chyba je ve frekvenční kalibraci signálního generátoru nebo snad naše měření průměru dutiny nejsou dostatečně přesná. V každém případě je souhlas docela slušný.

Mnohem složitější je cosi, co se stane, když se s frekvencí našeho signálního generátoru trochu vzdálíme od 3 000 MHz. Výsledek ukazuje *obr. 23.11*. Vidíme, že kromě očekávané rezonance blízko 3 000 MHz existuje také rezonance blízko 3 300 MHz a ještě jedna v blízkosti 3 820 MHz. Co znamenají tyto další rezonance? Klíč k záhadě bychom snad mohli najít na *obr. 23.6*. Ačkoliv jsme udělali předpoklad, že první kořen Besselovy funkce se realizuje na okraji naší krabičky, bylo by také možné, aby kraji krabičky odpovídal druhý kořen Besselovy funkce, takže na cestě od středu k jejímu okraji existuje jedna úplná oscilace elektrického pole (*obr. 23.12*). To představuje další možný mod oscilujících polí. Zajisté bychom mohli předpokládat, že krabička bude v takovém modu rezonovat.



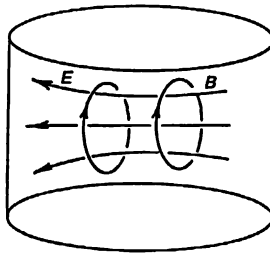
Obr. 23.11 Pozorované rezonanční frekvence válcové dutiny



Obr. 23.12 Mod s vyšší frekvencí

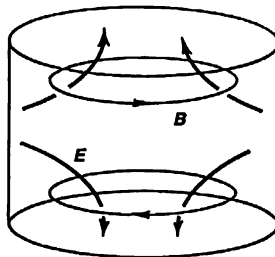
Ale všimněte si, že druhý kořen Besselovy funkce je $x=5,52$, což je více než dvojnásobek hodnoty prvního kořene. Proto bude rezonanční frekvence tohoto modu vyšší než 6 000 MHz. Nepochybně bychom ji tam našli, ale to neobjasňuje rezonanci, kterou pozorujeme při 3 300 MHz.

Problém spočívá v tom, že v naší analýze chování rezonanční dutiny jsme uvažovali pouze jedno z možných geometrických uspořádání elektrického a magnetického pole. Předpokládali jsme, že elektrická pole jsou vertikální a magnetická pole mají tvar horizontálních kružnic. Ale možná jsou i jiná pole. Je jen vyžadováno, aby pole uvnitř krabičky splňovala Maxwellovy rovnice a aby siločáry elektrického pole směřovaly kolmo na její stěnu. My jsme uvažovali případ, v němž je vrchní i spodní stěna krabičky rovinná, ale věci by se podstatně nezměnily, ani kdyby vršek i dno byly zakřiveny. Opravdu, odkud by měla krabička vědět, co je jejím vrškem, co dnem a co jejími boky? Lze ukázat, že existuje kmitavý mod polí uvnitř krabičky, v němž elektrická pole směřují víceméně podél jejího průměru (obr. 23.13).



Obr. 23.13 Příčný mod válcové dutiny

Není těžké pochopit, proč se vlastní frekvence tohoto modu nebude příliš odlišovat od vlastní frekvence prvního modu, který jsme uvažovali. Představte si, že místo naší válcové dutiny bychom vzali dutinu ve tvaru krychle o straně 7,6 cm. Je jasné, že tato dutina by měla tři odlišné mody, ale všechny o téže frekvenci. Mod s elektrickým polem jdoucím víceméně vertikálně bude mít zajisté stejnou frekvenci jako mod, v němž bude elektrické pole směřovat vpravo a vlevo. Zdeformujeme-li krychli na válec, tyto frekvence trochu změníme. Můžeme přitom stále očekávat, že nebudou příliš odlišné za předpokladu, že rozměry dutiny zachováme víceméně tytéž. Frekvence modu na obr. 23.13 se nebude příliš lišit od frekvence modu na obr. 23.8. Mohli bychom provést podrobný výpočet vlastní frekvence modu ukázaného na obr. 23.13, ale nyní to dělat nebudeme. Provedením výpočtu bychom zjistili, že pro námi předpokládané rozměry vychází rezonanční frekvence velmi blízká rezonanci pozorované při 3 300 MHz.

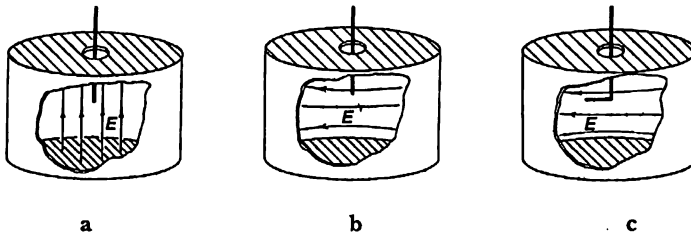


Obr. 23.14 Jiný mod válcové dutiny

Podobnými výpočty lze ukázat, že musí existovat ještě další mod u rezonanční frekvence, kterou jsme našli v oblasti 3 800 MHz. Elektrická a magnetická pole v tomto modu jsou naznačena na *obr. 23.14*. Elektrické pole neprochází celou dutinou, ale pouze od bočních stěn k základnám, jak je tam ukázáno.

Jak už nyní pravděpodobně tušíte, půjdeme-li s frekvencí výš a výš, je třeba očekávat, že najdeme víc a víc rezonancí. Existuje mnoho různých modů, z nichž každý bude mít odlišnou rezonanční frekvenci, příslušící nějakému konkrétnímu složitému uspořádání elektrických a magnetických polí. Takové uspořádání polí se nazývá rezonanční mod. Rezonanční frekvenci každého modu lze vypočítat řešením Maxwellových rovnic pro elektrická a magnetická pole v dutině.

Jak se můžeme dozvědět, který mod je vybuzen, když pozorujeme rezonanci při určité frekvenci? Jeden způsob je prostrčit malým otvorem dutiny drátek. Směřuje-li elektrické pole podél drátku (jako na *obr. 23.15 a*) objeví se v něm poměrně velké proudy, čerpající energii z polí, a rezonance bude potlačena. Bude-li elektrické pole takové jako na *obr. 23.15 b*, bude mít drátek mnohem menší účinek. Najít, kam pole směřuje v daném modu bychom mohli ohnutím konce drátu podle *obr. 23.15 c*.



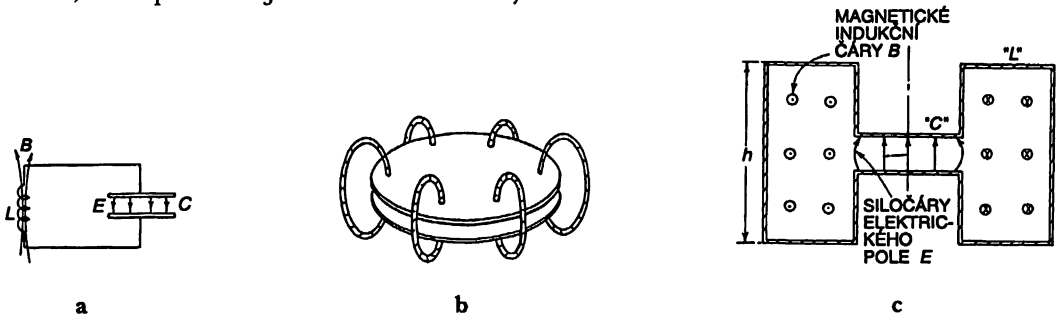
Obr. 23.15 Krátký kovový drát zasunutý do dutiny naruší rezonanci mnohem více, když je rovnoběžný s E než když je na E kolmý

Pak se při otáčení drátu dostaví velký účinek, je-li konec drátu rovnoběžný s E , a malý účinek, je-li otočen tak, že je na E kolmý.

23.5 DUTINOVÉ REZONÁTORY A REZONANČNÍ OBVODY

Ačkoli se zdá, že rezonanční dutina, kterou jsme právě popisovali, je něco úplně jiného než obyčejný rezonanční obvod, skládající se z cívky a kondenzátoru, je mezi oběma rezonančními systémy těsná souvislost. Obě náležejí do stejné rodiny; představují pouze dva extrémní případy elektromagnetických rezonátorů, mezi nimiž existují mnohé přechodné případy. Začneme s uvažováním, řekněme, rezonančního obvodu vytvořeného z kondenzátoru zapojeného paralelně s indukční cívkou (*obr. 23.16 a*). Takový obvod bude rezonovat při frekvenci $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Chceme-li rezonanční frekvenci tohoto obvodu zvýšit, můžeme to udělat zmenšením indukčnosti L . Jedna cesta k tomu je zmenšit počet závitů cívky. Tímto směrem lze však jít pouze po určitou hranici. Nakonec se dostaneme k poslednímu závitě a zůstane nám jen kousek drátu, spojující vrchní a spodní elektrodu kondenzátoru. Rezonanční frekvenci bychom mohli dále zvýšit zmenšením kapacity. Můžeme však také pokračovat ve zmenšování indukčnosti paralelním zapojováním několika cívek. Dvě cívky po jednom závitě, zapojené paralelně, budou mít pouze polovinu indukčnosti každého závitů. Tedy potom, co jsme naši cívku zredukovali na jediný závit, můžeme ve zvyšování rezonanční frekvence pokračovat přidáváním dalších samostatných smyček, spojujících vrchní elektrodu kondenzátoru se spodní. Například *obr. 23.16 b* ukazuje elektrody kondenzátoru

spojené šesti takovými „jednozátvitovými cívkami“. Přidáme-li mnoho takových kousků drátu, můžeme nakonec přejít k úplně uzavřené rezonanční soustavě, znázorněné v části *c* našeho obrázku, která představuje řez osově souměrným tělesem.



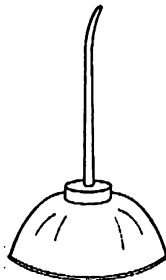
Obr. 23.16 Rezonátory s postupně vyššími rezonančními frekvencemi

Našf indukčnostf je nyní dutá prstencová krabička připojená k hranám elektrod kondenzátoru. Směr elektrického a magnetického pole je v ní vyznačen na obrázku. Takové těleso představuje, samozřejmě, rezonanční dutinu. Jde o tzv. „zatřženou“ dutinu. Ale stále je možné ji pokládat za LC obvod, v němž kapacitní část tvoří ta oblast, v níž se nachází převážná část elektrického pole a indukční část oblast, v níž nacházíme většinu magnetického pole.

Chceme-li zvýšit frekvenci rezonátoru na obr. 23.16 *c* ještě dále, můžeme toho dosáhnout zmenšováním indukčnosti L . Za tím účelem musíme zmenšit geometrické rozměry indukční sekce, např. velikost h na obrázku. Při zmenšování h bude rezonanční frekvence růst. Nakonec se, ovšem, dostaneme do situace, kdy je výška h právě rovna vzdálenosti mezi elektrodami kondenzátoru. Nedostáváme přitom nic jiného než válcovou krabičku; z našeho rezonančního okruhu se stal dutinový rezonátor, takový jako je na obr. 23.7.

Všimněte si, že v původním rezonančním LC okruhu na obr. 23.16 jsou elektrická a magnetická pole úplně oddělena. Jak jsme postupně rezonanční soustavu modifikovali, abychom dosáhli vyšší a vyšší rezonanční frekvence, přibližovalo se magnetické pole čím dál tím víc elektrickému poli, až v dutinovém rezonátoru jsou obě pole úplně promíchaná.

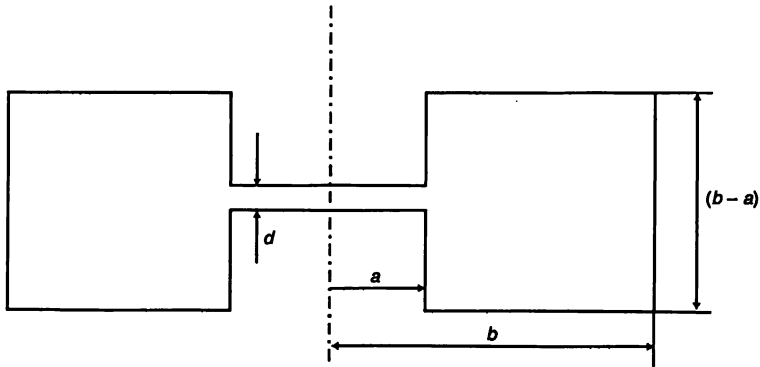
Ačkoli všechny dutinové rezonátory, o nichž jsme v této kapitole mluvili, byly válcovými krabičkami, není ve válcovém tvaru nic magického. Krabička jakéhokoliv tvaru bude mít své vlastní rezonanční frekvence, příslušející možným různým modům kmitů elektrického a magnetického pole. Například, „dutina“ znázorněná na obr. 23.17 bude mít také svou vlastní množinu rezonančních frekvencí – ačkoli by bylo dost těžké je vypočítat.



Obr. 23.17 Jiný druh rezonanční dutiny

PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 23.1 ■ Najděte přibližnou rezonanční frekvenci dutiny znázorněné na obrázku za předpokladu, že $d < a$ a $d < (b - a)$. Které základní jevy jste přitom zanedbali? V případě, že dutina rovnoměrně chladne (tj. teplota v každém bodě dutiny je v každém okamžiku táž), jak se v důsledku změny rozměrů změní rezonanční frekvence? Zvětší se, zmenší se anebo zůstane beze změny?



V 24 Inovody

- 24.1 PŘENOSOVÉ VEDENÍ
- 24.2 OBDÉLNÍKOVÝ VLNOVOD
- 24.3 MEZNÍ FREKVENCE
- 24.4 RYCHLOST ŠÍŘENÍ VLN VE VLNOVODU
- 24.5 DETEKOVÁNÍ VEDENÝCH VLN
- 24.6 SPOJOVÁNÍ VLNOVODŮ
- 24.7 MODY VLNOVODŮ
- 24.8 JINÝ POHLED NA VLNOVODY

24.1 PŘENOSOVÉ VEDENÍ

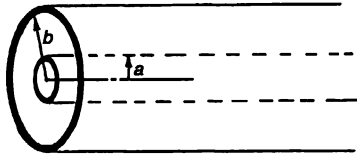
V poslední kapitole jsme zkoumali vlastnosti soustředěných prvků obvodů při vysokých frekvencích a dospěli jsme k závěru, že rezonanční obvod lze nahradit dutinou, v jejímž nitru pole rezonují. Jiným zajímavým technickým problémem je spojování jednoho prvku s druhým tak, aby mezi nimi byl možný přenos elektromagnetické energie. V nízkofrekvenčních obvodech se spojování realizuje pomocí drátů, ale pro vysoké frekvence se tento způsob dost dobře nehodí, protože v tom případě by obvody vyzařovaly energii do celého okolního prostoru a je problém regulovat, kam energie půjde. Pole se rozptylují kolem drátů; drátěné vodiče „neusměrňují“ proudy a napětí dost dobře. V této kapitole chceme prozkoumat způsob propojení prvků při vysokých frekvencích. Je to jeden z možných přístupů k našemu tématu.

Jinak můžeme říci, že jsme dosud hovořili o chování vln ve volném prostoru. Nyní je čas podívat se, co se stane, když jsou kmitající pole omezena v jednom nebo více rozměrech. Objevíme nový zajímavý úkaz: jsou-li pole omezena pouze ve dvou rozměrech a ponechá se jim volnost postupovat ve třetím rozměru, budou se šířit ve formě vlnění. Jde o vedené vlny, které jsou předmětem této kapitoly.

Začneme vypracováním obecné teorie přenosového vedení. Obvyčejně vysokonapěťové přenosové vedení, které se krajinou táhne od sloupu ke sloupu, vyzáří část přenášeného výkonu. Síťové kmitočty (50–60 Hz) jsou však tak nízké, že jde o nevýznamnou ztrátu. Vyzařování by se

dalo zamezit oblopením vedení kovovým potrubím. Tuto metodu nelze však v případě silnoproudého vedení realizovat, neboť používané proudy a napětí by vyžadovaly velmi velké, nákladné a těžké potrubí. Proto se používají jednoduchá „otevřená“ vedení.

Při frekvencích o něco vyšších, řekněme několik kilohertzů, může už mít vyzařování význam. Lze ho však zmenšit použitím dvojlinek, jako se to dělá u telefonních spojení na krátké vzdálenosti. Při vyšších frekvencích se však záření stává skoro neúnosným, ať už pro únik energie, nebo proto, že se energie dostává do jiných obvodů, v nichž je nežádoucí. Při frekvencích od několika kilohertzů do několika stovek megahertzů se elektromagnetické signály a energie přenášejí obvykle koaxiálním vedením, skládajícím se z vodivého drátu nacházejícího se uvnitř válcového „vnějšího vodiče“ nebo „stínění“. Ačkoli následující úvahy se hodí na přenosové vedení vytvořené dvěma rovnoběžnými vodiči jakéhokoliv tvaru, budeme se při nich odvolávat na koaxiální vedení.

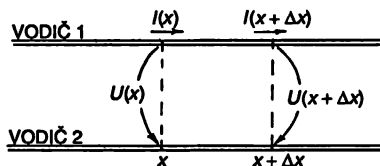


Obr. 24.1 Koaxiální přenosové vedení

Vezmeme nejjednodušší koaxiální vedení, skládající se ze středového vodiče, o němž předpokládáme, že je tenkostěnným dutým válcem, a vnějšího vodiče – jiného tenkostěnného válce, sousedícího s vnitřním vodičem (obr. 24.1). Začneme tím, že přibližně vypočteme, jak se takové vedení chová při poměrně nízkých frekvencích. Něco o jeho nízkofrekvenčním chování jsme naznačili už dříve, když jsme řekli, že takové dva vodiče se vyznačují určitou indukčností a určitou kapacitou, připadající na jednotku jejich délky. Opravdu lze chování každého přenosového vedení při nízkých frekvencích popsat udáním jeho indukčnosti připadající na jednotku délky L_0 a jeho kapacity připadající na jednotku délky C_0 . Vedení tedy můžeme uvažovat jako limitní případ L - C filtru, o němž jsme mluvili v článku 22.6. Takový filtr, který bude imitovat naše vedení, můžeme vytvořit, když spojíme do série malé indukčnosti $L_0 \Delta x$, přičemž každou z nich připojíme k zemi malou kapacitou $C_0 \Delta x$, kde Δx je element délky vedení. Aplikací našich výsledků na tento nekonečný filtr se přesvědčíme, že podél vedení se budou šířit elektrické signály. Místo sledování tohoto přístupu bychom se však raději na vedení podívali z hlediska diferenciální rovnice.

Představte si, že pozorujeme, co se děje ve dvou sousedních bodech přenosového vedení, nacházejících se řekněme ve vzdálenosti x a $x + \Delta x$ od jeho počátku. Nechť $U(x)$ je rozdíl potenciálů mezi oběma vodiči a $I(x)$ je proud v „horním“ vodiči (obr. 24.2). Když se proud ve vedení mění, způsobí indukčnost pokles napětí na malém úseku vedení od x do $x + \Delta x$ o hodnotu

$$U = U(x + \Delta x) - U(x) = -L_0 \Delta x \frac{dI}{dt}.$$



Obr. 24.2 Proud a napětí na přenosovém vedení

Nebo, přejdeme-li k limitě pro $\Delta x \rightarrow 0$, dostaneme

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t}. \quad (24.1)$$

Změna proudu způsobuje vznik gradientu napětí.

Opět se odvoláme na obrázek. Když se napětí v poloze x mění, musí existovat nějaký náboj, který se odevzdává kapacitě této oblasti. Vezmeme-li malý kousek vedení mezi x a $x + \Delta x$, je na něm náboj $q = C_0 \Delta x U$. Rychlost změny tohoto náboje v čase je $C_0 \Delta x dU/dt$. Ale náboj se mění jen tehdy, když proud $I(x)$ vstupující do uvažovaného elementu se liší od proudu $I(x + \Delta x)$ z něj vystupujícího. Označíme-li tento rozdíl ΔI , můžeme psát, že

$$\Delta I = -C_0 \Delta x \frac{dU}{dt}.$$

Přejdeme-li k limitě pro $\Delta x \rightarrow 0$, dostaneme

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C_0 \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (24.2)$$

Zachování náboje tedy znamená, že gradient proudu je přímo úměrný rychlosti změny napětí v čase.

Rovnice (24.1) a (24.2) představují základní rovnice přenosového vedení. Kdybychom chtěli, mohli bychom je upravit, aby zahrnovaly i účinek odporu vodičů nebo úniku náboje izolací mezi vodiči, ale v naší nynější úvaze zůstaneme u tohoto jednoduchého tvaru.

Obě rovnice přenosového vedení lze zkombinovat derivováním jedné z nich podle t a druhé podle x a vyloučením U nebo I . Potom dostaneme rovnici

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = C_0 L_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (24.3)$$

nebo

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = C_0 L_0 \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}. \quad (24.4)$$

Znovu poznáváme vlnovou rovnici pro proměnnou x . V případě homogenního přenosového vedení se napětí (i proud) šíří podél vedení jako vlny. Napětí podél vedení musí jít vyjádřit ve tvaru $U(x, t) = f(x - vt)$ nebo $U(x, t) = g(x + vt)$, nebo jako součet obou těchto funkcí. A co je zde rychlost v ? Víme, že součinitel členu s $\partial^2/\partial t^2$ je právě roven $1/v^2$. Proto

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}. \quad (24.5)$$

Ponecháme na vás, abyste dokázali, že *pro každou vlnu* na vedení je napětí přímo úměrné proudu v této vlně a že součinitelem úměrnosti je právě charakteristická impedance vedení Z_0 . Označíme-li jako U_+ a I_+ napětí a proud v případě vlny postupující ve směru osy x , měli byste dostat

$$V_+ = Z_0 I_+. \quad (24.6)$$

Podobně v případě vlny postupující ve směru $-x$ platí vztah

$$V_- = Z_0 I_-.$$

Charakteristická impedance, kterou – jak jsme zjistili z našich rovnic pro filtr – udává vztah

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \quad (24.7)$$

představuje čistou rezistanci.

Abychom našli rychlost šíření v a charakteristickou impedanci Z_0 přenosového vedení, musíme znát jeho indukčnost a kapacitu, připadající na jednotkovou délku. Pro koaxiální kabel lze obě snadno vypočítat. Podívejme se proto, jak se to dělá. V případě indukčnosti budeme postupovat podle myšlenek v článku 17.8 a položíme veličinu $LI^2/2$ rovnu magnetické energii, kterou dostaneme integrováním $\varepsilon_0 c^2 B^2/2$ přes objem. Předpokládejme, že středovým vodičem prochází proud I . Víme, že v tomto případě $B = I/2\pi \varepsilon_0 c^2 r$, kde r je vzdálenost od osy. Vezmeme-li jako element objemu válcovou vrstvu s tloušťkou dr a délkou l , dostaneme pro magnetickou energii

$$W = \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} \int_a^b \left(\frac{I}{2\pi \varepsilon_0 c^2 r} \right)^2 l 2\pi r dr,$$

kde a, b jsou poloměry vnitřního, resp. vnějšího vodiče. Po integrování dostaneme

$$W = \frac{I^2 l}{4\pi \varepsilon_0 c^2} \ln \frac{b}{a}. \quad (24.8)$$

Položíme-li tuto energii rovnu $\frac{1}{2} LI^2$, zjistíme, že

$$L = \frac{l}{2\pi \varepsilon_0 c^2} \ln \frac{b}{a}. \quad (24.9)$$

L je – jak to má být – přímo úměrné délce vedení l , takže indukčnost připadající na jednotkovou délku L_0 udává vztah

$$L_0 = \frac{\ln(b/a)}{2\pi \varepsilon_0 c^2}. \quad (24.10)$$

Už jsme vypočítali náboj ve válcovém kondenzátoru (článek 12.2). Vydělíme-li nyní tento náboj rozdílem potenciálů, dostaneme

$$C = \frac{2\pi \varepsilon_0 l}{\ln(b/a)}.$$

Kapacita připadající na jednotkovou délku C_0 je rovna C/l . Porovnáme-li tento výsledek se vztahem (24.10), vidíme, že součin $L_0 C_0$ je roven $1/c^2$, takže rychlost $v = 1/\sqrt{L_0 C_0}$ je rovna c . Vlna

postupuje po vedení rychlostí světla. Podotýkáme, že tento výsledek závisí na námi provedených předpokladech: a) že v prostoru mezi vodiči se nenacházejí žádné dielektrické nebo magnetické látky; b) všechny proudy tečou na površích vodičů (jak tomu je u dokonalých vodičů). Později se přesvědčíme, že v případě dobrých vodičů se při vysokých frekvencích všechny proudy rozdělují po površích, jako by šlo o dokonalé vodiče, takže tento předpoklad opravdu platí.

Je zajímavé, že zatímco předpoklady a) i b) jsou splněny, je součin $L_0 C_0$ roven $1/c^2$ pro každý rovnoběžný pár vodičů – i, řekněme, pro šestiboký vnitřní vodič nacházející se kdekoli uvnitř elipsoidního vnějšího vodiče. Je-li průřez konstantní a prostor mezi vodiči neobsahuje žádnou látku, vlny se šíří rychlostí světla.

Pro charakteristickou impedanci nelze uvést žádné takové obecné tvrzení. Pro koaxiální vedení platí

$$Z_0 = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\epsilon_0 c} \quad (24.11)$$

Součinitel $1/\epsilon_0 c$ má rozměr odporu a je roven 120π ohmům. Geometrický součinitel $\ln(b/a)$ závisí na rozměrech pouze logaritmicky, takže pro koaxiální vedení – a také většinu jiných vedení – bývají typické hodnoty charakteristické impedance asi od 50 ohmů do několika set ohmů.

24.2 OBDÉLNÍKOVÝ VLNOVOD

Úkaz, o kterém chceme dále hovořit, se na první pohled zdá být zarážející: koaxiální vedení bude moci přenášet elektromagnetickou energii, i když je z něj středový vodič odstraněn. Jinými slovy, při dostatečně vysokých frekvencích bude prázdná trubice pracovat právě tak dobře jako trubice s vodičem uvnitř. Souvisí to s tím záhadným způsobem, kterým se rezonanční obvod skládající se z kondenzátoru a indukčnosti při vysokých frekvencích nahradil jen pouzdrem.

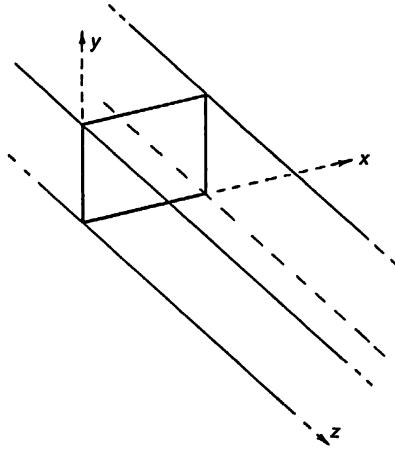
Ačkoliv chápat přenosové vedení jako rozloženou indukčnost a kapacitu se zdá být pozoruhodným, všichni víme, že elektromagnetické vlny se mohou šířit uvnitř prázdné kovové trubice. Vždyť je-li trubice přímá, můžeme skrz ní vidět. Takže elektromagnetické vlny určitě trubici procházejí. Ale také víme, že uvnitř samotné kovové trubice se nedají přenášet nízkofrekvenční vlny (střídavý proud nebo telefonní signály). Z toho vyplývá, že elektromagnetické vlny procházejí jen tehdy, je-li jejich vlnová délka dostatečně krátká. Proto se chceme zabývat hraničním případem největší vlnové délky (neboli nejnižší frekvence), která může projít trubicí o daném rozměru. Protože taková trubice se pak používá k přenosu vln, nazývá se *vlnovod*.

Začneme s trubicí o obdélníkovém průřezu, neboť její analýza je nejjednodušší. Nejdříve podáme matematické zpracování a později se vrátíme a podíváme se na tuto úlohu mnohem elementárnějším způsobem. Elementárnější přístup však lze snadno aplikovat jen na obdélníkový vlnovod. Základní úkazy jsou tytéž v jakémkoliv vlnovodu libovolného tvaru, takže matematická úvaha je principiálně oprávněnější.

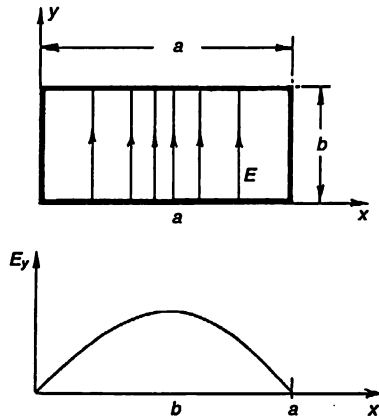
Naší úlohou je tedy najít druh vln, které mohou existovat uvnitř pravouhlé trubice. Nejdříve si zvolme nějaké vhodné souřadnice; umístíme osu z podél trubice a osy x , y rovnoběžně s jejími stěnami (obr. 24.3).

Víme, že postupují-li podél trubice světelné vlny, je jejich elektrické pole příčné. Hledejme proto nejdříve taková řešení, v nichž je E kolmé k ose z a nechť má pouze y -ovou složku E_y . V příčném směru vzhledem k vlnovodu se toto elektrické pole bude nějakým způsobem měnit; u stěn rovnoběžných s osou y musí klesat k nule, neboť ve vodiči se proudy a náboje vždy samy rozdělí tak, aby elektrické pole na povrchu vodiče nemělo tangenciální složku. Graf závislosti

E_y na x bude tedy mít tvar nějakého oblouku (obr. 24.4). Nejde snad o Besselovu funkci, kterou jsme našli v případě dutiny? Ne, neboť Besselova funkce se vyskytuje pouze v úlohách s válcovou geometrií. V případě pravoúhlé geometrie se vlny obvykle popisují jednoduchými harmonickými funkcemi. Zkusme tedy něco podobného $\sin k_x x$.



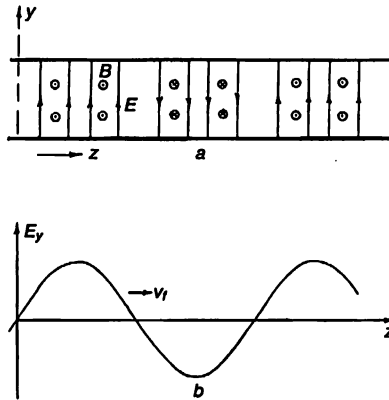
Obr. 24.3 Souřadnicová soustava v případě obdélníkového vlnovodu



Obr. 24.4 Elektrické pole ve vlnovodu při nějaké hodnotě z

Protože potřebujeme vlny, které se šíří podél vlnovodu, hledáme takové pole, které při postupu ve směru osy z bude střídat své znaménko (obr. 24.5) a tyto oscilace se budou pohybovat podél vlnovodu rychlostí v .

Budeme-li mít oscilace při určité frekvenci ω , bude nutné prověřit, zda se vlna může měnit v závislosti na z jako $\cos(\omega t - k_z z)$ nebo – při použití vhodnějšího matematického vyjádření – jako $\exp[i(\omega t - k_z z)]$. Tato závislost na z představuje vlnu pohybující se rychlostí $v = \omega/k_z$ (článek 29, díl 1).


 Obr. 24.5 Závislost pole ve vlnovodu na z

Mohli bychom se tedy domnívat, že vlna ve vlnovodu bude mít následující matematické vyjádření:

$$E_y = E_0 \sin k_x x e^{i(\omega t - k_z z)} \quad (24.12)$$

Přesvědčme se, zda tento odhad vyhovuje rovnicím pole. Zaprvé, elektrické pole nemá mít na vodičích žádné tangenciální složky. Naše pole tomuto požadavku vyhovuje; je kolmé na vrchní a spodní stěnu a na bočních stěnách je nulové. Totiž bude to tak, když zvolíme k_x takové, aby polovina cyklu funkce $\sin k_x x$ připadla přesně na šířku vlnovodu, tj. když

$$k_x a = \pi. \quad (24.13)$$

Existují i jiné možnosti, např. $k_x a = 2\pi, 3\pi, \dots$ nebo obecně

$$k_x a = n\pi, \quad (24.14)$$

kde n je jakékoli celé číslo. Tyto případy představují různé složité uspořádání pole, ale pro tentokrát vezmeme pouze nejjednodušší z nich, v němž $k_x = \pi/a$, kde a je šířka nitra vlnovodu.

Dále, divergence pole E musí být ve volném prostoru rovna nule, protože tam nejsou žádné náboje. Naše E má pouze y -ovou složku a ta na y nezávisí, takže skutečně dostáváme, že $\nabla \cdot E = 0$.

Konečně, naše elektrické pole musí ve volném prostoru uvnitř vlnovodu souhlasit se zbývajícími Maxwellovými rovnicemi. Je to totéž, jako kdybychom řekli, že musí splňovat vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0. \quad (24.15)$$

Musíme prověřit, zda náš typ řešení (24.12) bude této rovnici vyhovovat. Druhá derivace E_y podle x je $-k_x^2 E_y$. Druhá derivace podle y je rovna nule, neboť ve výrazu (24.12) na y nic nezávisí. Druhá derivace podle z je rovna $-k_z^2 E_y$, a druhá derivace podle t je rovna $-\omega^2 E_y$. Podle rovnice (24.15) má tedy platit

$$k_x^2 E_y + k_z^2 E_y - \frac{\omega^2}{c^2} E_y = 0.$$

S výjimkou případu, kdy E_y je všude rovno nule (což není příliš zajímavé), tato rovnice bude splněna, když

$$k_x^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0. \quad (24.16)$$

Hodnotu k_x jsme už stanovili, a podle této rovnice tedy vlny takového druhu, jaký jsme předpokládali, mohou existovat, souvisí-li k_z s frekvencí ω tak, aby byla splněna rovnice (24.16); jinými slovy, když

$$k_z = \sqrt{(\omega^2/c^2) - (\pi^2/a^2)}. \quad (24.17)$$

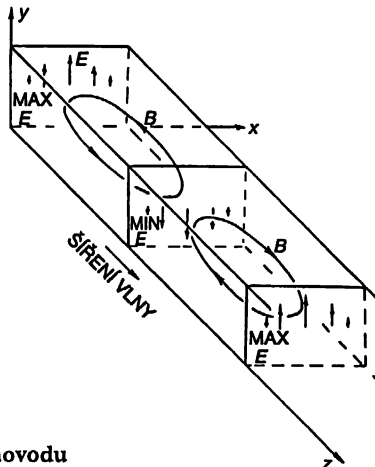
Námi popsané vlnění se šíří ve směru osy z s touto hodnotou k_z .

Vlnové číslo k_z , které vypočteme ze vztahu (24.17), určuje rychlost, jíž se podél vlnovodu pohybují uzly vlny při dané frekvenci ω . Fázová rychlost je dána vztahem

$$v = \frac{\omega}{k_z}. \quad (24.18)$$

Vzpomeňte si, že vlnovou délku λ postupné vlny udává vztah $\lambda = 2\pi v/\omega$, takže k_z je rovno $i 2\pi/\lambda_v$ kde λ_v je vlnová délka kmitů ve směru osy z , tj. vlnová délka vlny ve vlnovodu. Vlnová délka ve vlnovodu se, přirozeně, liší od vlnové délky elektromagnetického vlnění s toutéž frekvencí ω ve volném prostoru. Označíme-li λ_0 vlnovou délku ve volném prostoru, rovnající se $2\pi c/\omega$, můžeme rovnici (24.17) přepsat na tvar

$$\lambda_v = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0/2a)^2}}. \quad (24.19)$$



Obr. 24.6 Magnetické pole ve vlnovodu

Kromě elektrických polí existují i magnetická pole, která se pohybují s vlnou, ale nebudeme se nyní zdržovat odvozením jejich vyjádření. Pokud $c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \partial \mathbf{E} / \partial t$, magnetické indukční čáry budou vytvářet uzavřené křivky kolem oblastí, v nichž je $\partial \mathbf{E} / \partial t$ největší, tj. na půl cesty mezi maximem a minimem \mathbf{E} . Uzavřené magnetické indukční čáry budou ležet rovnoběžně s rovinou xz mezi vrchy a doly pole \mathbf{E} (obr. 24.6).

24.3 MEZNÍ FREKVENCE

Je-li rovnice (24.16) řešena vzhledem ke k_z , musí vlastně existovat dva kořeny – jeden kladný a jeden záporný. Měli bychom psát, že

$$k_z = \pm \sqrt{(\omega^2/c^2) - (\pi^2/a^2)}. \quad (24.20)$$

Tato dvě znaménka znamenají pouze to, že mohou existovat vlny, které se šíří zápornou fázovou rychlostí (ve směru osy $-z$), jakož i vlny, které se ve vlnovodu šíří v kladném směru. Protože oba druhy vln mohou existovat současně, budou možná i řešení znamenající stojaté vlnění.

Podle našeho vztahu pro k_z , vedou vyšší frekvence k větším hodnotám k_z a tedy kratším vlnovým délkám až po mezní případ velkých ω , kdy se k stává rovným ω/c – hodnotě, která platí pro vlnění ve vakuu. Světlo, které „vidíme“ trubicí, se ještě pohybuje rychlostí c . Ale nyní si všimněme, že postupujeme-li k nízkým frekvencím, stane se cosi podivného. Zpočátku se vlnová délka stále prodlužuje, ale při příliš malém ω se výraz pod odmocninou v (24.20) náhle stává záporným. Toto nastane, jakmile ω klesne pod $\pi c/a$ – nebo když λ_0 překročí hodnotu $2a$. Jinými slovy, když frekvence klesne pod určitou hodnotu $\omega_m = \pi c/a$, vlnové číslo k_z (a také λ_z) se stane imaginárním a žádné řešení nemáme. Nebo máme? Kdo řekl, že k_z musí být reálné? Co když vychází imaginární? Naše rovnice pole jsou stále ještě splněny. Možná že imaginární k_z také představuje vlnění.

Předpokládejme, že ω je menší než ω_m ; pak můžeme psát

$$k_z = \pm i k' \quad (24.21)$$

kde k' je reálné kladné číslo

$$k' = \sqrt{(\pi^2/a^2) - (\omega^2/c^2)}. \quad (24.22)$$

Vrátíme-li se nyní zpět k našemu výrazu (24.12) pro E_y , dostaneme

$$E_y = E_0 \sin k_x x e^{i(\omega t \mp i k' z)}, \quad (24.23)$$

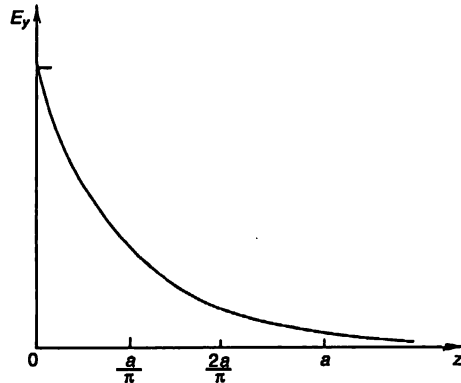
což můžeme napsat ve tvaru

$$E_y = E_0 \sin k_x x e^{\pm k' z} e^{i\omega t}. \quad (24.24)$$

Tento výraz představuje pole \mathbf{E} , které v čase kmitá jako $e^{i\omega t}$, ale mění se se z jako $e^{\pm k' z}$. V závislosti na z hladce klesá a stoupá právě tak jako reálná exponenciální funkce. Při našem odůvodnění jsme se nestarali o zdroje, z nichž vlnění vychází, ale samozřejmě přitom někde ve vlnovodu musí zdrojové místo být. Znaménko u k' má být takové, aby pole klesalo se zvětšující se vzdáleností od zdroje vlnění.

Tak pro frekvence nižší než $\omega_m = \pi c/a$ vlnění vlnovodem nepostupuje; kmitající pole pronikají do vlnovodu pouze na vzdálenost řádu $1/k'$. Z tohoto důvodu se frekvence ω_m nazývá *mezní*

frekvencí vlnovodu. Podíváme-li se na vztah (24.22), vidíme, že pro frekvence pouze trochu nižší než ω_m je číslo k' malé a pole mohou proniknout ve vlnovodu do velké vzdálenosti.



Obr. 24.7 Závislost E_y na z pro $\omega < \omega_m$

Ale je-li ω mnohem menší než ω_m , je exponenciální součinitel k' roven π/a a pole vymizí velmi rychle (obr. 24.7). Pole klesá v poměru $1/e$ na vzdálenosti a/π , tj. pouze asi na třetině šířky vlnovodu. Pole pronikají na velmi malou vzdálenost od zdroje.

Chceme zdůraznit zajímavý rys naší analýzy vedených vln – výskyt imaginárního vlnového čísla k_z . Obvykle, když ve fyzice řešíme rovnici a dostaneme imaginární číslo, neznamená to nic fyzikálního. V případě vlnění však imaginární vlnové číslo *cosi znamená*. Vlnová rovnice je stále splněna a imaginární číslo k_z pouze znamená, že příslušné řešení poskytuje exponenciálně klesající pole místo postupných vln. V každé úloze o vlnění, v níž se k stává imaginárním při nějaké frekvenci, znamená to, že se forma vlnění mění – sinusové vlnění se mění na exponenciální.

24.4 RYCHLOST ŠÍŘENÍ VLN VE VLNOVODU

Výše uvedená rychlost vlnění je tzv. fázová rychlost – rychlost uzlu vlny – a je funkcí frekvence. Dosazením vztahu (24.17) do vztahu (24.18) můžeme dostat vyjádření

$$v_f = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_m/\omega)^2}}. \quad (24.25)$$

Pro frekvence nad mezní frekvencí, při nichž existuje postupné vlnění, je ω_m/ω menší než 1 a v_f je reálná hodnota, větší než rychlost světla. V kapitole 48 dříve jsme už viděli, že fázové rychlosti větší než rychlost světla jsou možné, protože jsou to pouze uzly vlny, co se pohybuje, a ne energie nebo informace. Abychom se dověděli, jakou rychlostí budou postupovat *signály*, musíme vypočítat rychlost impulzů nebo modulací vyvolaných interferencí vlny o určité frekvenci s jednou nebo více vlnami odlišných frekvencí (kapitola 48, díl 1). Rychlost obálky takové skupiny vln jsme nazvali grupovou rychlostí; je rovna ne ω/k , ale $d\omega/dk$:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}. \quad (24.26)$$

Derivujeme-li (24.17) podle ω a napíšeme převrácenou hodnotu výsledku (abychom dostali $d\omega/dk$), dostaneme

$$v_g = c\sqrt{1 - (\omega_m/\omega)^2}, \quad (24.27)$$

což je méně, než rychlost světla ve vakuu.

Geometrický průměr hodnot v_f a v_g je přesně roven rychlosti světla c :

$$v_f v_g = c^2. \quad (24.28)$$

To je pozoruhodné, neboť s podobným vztahem jsme se setkali v kvantové mechanice. Hybnost p a energie E částice při jakékoliv rychlosti – i relativistické – souvisejí podle vztahu

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (24.29)$$

Ale v kvantové mechanice je energie rovna $\hbar\omega$ a hybnost \hbar/λ , tj. $\hbar k$, takže vztah (24.29) lze napsat ve tvaru

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \quad (24.30)$$

resp.

$$k = \sqrt{(\omega^2/c^2) - (m^2 c^2/\hbar^2)}, \quad (24.31)$$

který je velmi podobný vztahu (24.17)... Zajímavé!

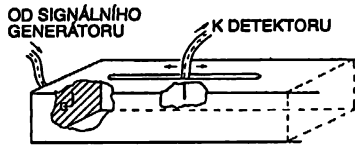
Grupová rychlost vlnění je i rychlostí, kterou je vlnovodem přenášena energie. Potřebujeme-li zjistit tok energie vlnovodem, můžeme jej najít jako součin hustoty energie a grupové rychlosti. Je-li efektivní hodnota elektrického pole E_0 , je střední hustota elektrické energie rovna $\epsilon_0 E_0^2/2$. I s magnetickým polem je spojena určitá energie. Tu zde dokazovat nebudeme, ale v každé dutině nebo vlnovodu jsou elektrická a magnetická energie stejné, takže celková hustota elektromagnetické energie je rovna $\epsilon_0 E_0^2$. Vlnovodem přenášený výkon dW/dt je pak

$$\frac{dW}{dt} = \epsilon_0 E_0^2 a b v_g. \quad (24.32)$$

(Později probereme jiný obecnější způsob výpočtu toku energie.)

24.5 DETEKCE VEDENÝCH VLN

Energii lze do vlnovodu přivádět pomocí nějaké „antény“. Postačí k tomu například vislý drátek nebo „kolík“. Existenci vedených vln lze detekovat odebráním části elektromagnetické energie pomocí malé přijímací „antény“, která může být opět drátěným kolíkem nebo malou smyčkou. Aby bylo vidět budící kolík a snímací sondu, je na *obr. 24.8* ukázán vlnovod s výřezy. Napájecí kolík můžeme koaxiálním kabelem připojit k signálnímu generátoru a snímací sondu lze podobným kabelem spojit s detektorem. Obvykle je výhodné vsunout snímací sondu do vlnovodu dlouhou tenkou štěrbinou (*obr. 24.8*). Pak lze posouváním sondy podél vlnovodu měřit pole v různých místech.



Obr. 24.8 Vlnovod s budícím kolíkem a snímací sondou

Je-li signální generátor nastaven na frekvenci ω , která je vyšší než mezní frekvence ω_m , bude se z napájecího kolíku šířit vlnovodem vlnění. Je-li vlnovod nekonečně dlouhý – čehož prakticky lze docílit jeho uzavřením pomocí pečlivě zkonstruovaného absorbátoru, aby se zamezilo odrazům od vzdáleného konce vlnovodu – bude toto vlnění jediné. Pak nebude signál snímáný detektorem záviset na poloze podél vlnovodu, neboť detektor měří střední časovou hodnotu pole ve svém okolí; jeho výstupní signál bude přímo úměrný přenášenému výkonu.

Je-li však zakončení vlnovodu na vzdáleném konci realizováno tak, že vytváří odraženou vlnu – jako krajní případ, uzavřeme-li jej kovovou destičkou – bude kromě postupující původní vlny existovat i odražená vlna. Tyto dvě vlny budou interferovat a vytvoří ve vlnovodu stojatou vlnu podobnou stojatým vlnám struny, o nichž jsme hovořili v kapitole 49 dříve. Budeme-li sondu posouvat podél vlnovodu, budeme údaj detektoru periodicky stoupat a klesat, přičemž maximální bude v poloze každé kmitny stojaté vlny a minimální v každém jejím uzlu. Vzdálenost mezi dvěma po sobě následujícími uzly (nebo kmitnami) bude rovna $\lambda_p/2$. Z toho vyplývá pohodlný způsob měření vlnové délky ve vlnovodu. Když se frekvence přibližuje k ω_m , vzdálenosti mezi uzly se zvětšují, přičemž se ukáže, že vlnová délka ve vlnovodu roste podle vztahu (24.19).

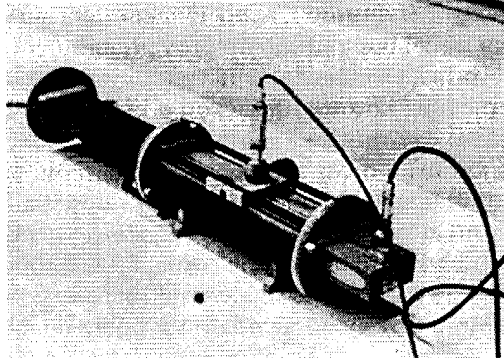
Nechť je náš signální generátor nastaven na frekvenci těsně pod ω_m . Pak se při posouvání snímací sondy ke vzdálenému konci vlnovodu bude údaj detektoru postupně zmenšovat. Sníží-li se frekvence ještě trochu, bude intenzita pole klesat prudce, souhlasně s grafem na obr. 24.7. To je svědectví, že vlny se nešíří.

24.6 SPOJOVÁNÍ VLNOVODŮ

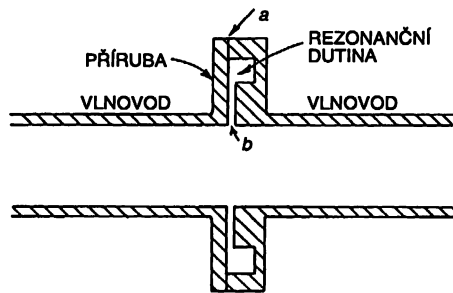
Vlnovody nacházejí důležité praktické použití při přenosu vysokofrekvenčního výkonu, např. při spojení vysokofrekvenčního oscilátoru nebo výstupního zesilovače radiolokační soupravy s anténou. Ve skutečnosti se sama anténa obvykle skládá z parabolického reflektoru, napájeného v ohnisku vlnovodem, na konci se rozšiřujícím do tvaru „trychtýře“, který vyzářuje vlny přicházející vlnovodem. Ačkoliv vysoké frekvence lze přenášet pomocí koaxiálního kabelu, je pro přenos velkých výkonů vlnovod lepší. Zprvu, maximální výkon, který lze přenášet vedením, je ohraničen průrazným napětím izolace (pevné nebo plynné) mezi vodiči. Ve vlnovodu jsou intenzity polí při daném výkonu obvykle menší než v případě koaxiálního kabelu, takže se jím dají přenášet větší výkony bez vyvolání průrazu. Za druhé, v koaxiálním kabelu jsou obvykle větší ztráty výkonu než ve vlnovodu. Koaxiální kabel musí obsahovat izolační látku, která drží středový vodič a v této látce dochází ke ztrátám energie – zvláště při vysokých frekvencích. Kromě toho jsou ve středovém vodiči dost vysoké proudové hustoty a protože ztráty rostou s druhou mocninou proudové hustoty, menší proudy, které se objevují na stěnách vlnovodu, způsobují nižší ztráty energie. Aby se tyto ztráty udržely na minimu, vnitřní povrchy vlnovodů se často pokrývají látkou o vysoké vodivosti, například stříbrem.

Problém zapojení obvodu s vlnovody je úplně jiný než odpovídající problém obvodu při nízkých frekvencích. Pro tento účel bylo vyvinuto mnoho speciálních zařízení tzv. mikrovlánek

techniky. Například dva vlnové dílce se spolu obvykle spojují pomocí přírub, jak je vidět na *obr. 24.9*. Taková spojení však mohou vést k velkým ztrátám energie, neboť povrchové proudy musí procházet přes spoj, který může mít relativně vysoký odpor. Jeden způsob zamezení takových ztrát je zhotovovat příruby tak, jak je ukázáno v řezu *obr. 24.10*. Mezi sousedními dílci vlnovodu je ponechán malý prostor a na lícové ploše jedné z přírub je vyhloubena drážka tak, aby vznikla malá dutina toho typu, který znázorňuje *obr. 23.16 c*. Její rozměry jsou voleny tak, aby dutina byla rezonanční při frekvenci, pro kterou se bude používat. Pro proudy představuje tato rezonanční dutina velkou „impedanci“, takže kovovým stykem (v *a* na *obr. 24.10*) teče poměrně malý proud. Velké proudy ve vlnovodu jen nabíjejí a vyběžejí kapacitu štěrbiny (v *b* na obrázku), kde dochází pouze k malé disipaci energie.



Obr. 24.9 Dílce vlnovodu spojené pomocí přírub

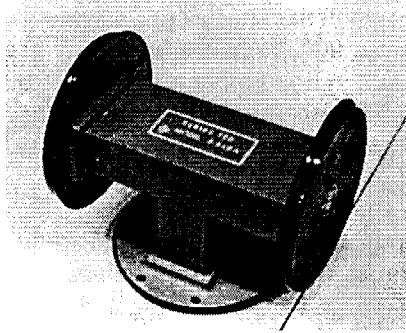


Obr. 24.10 Spoj mezi dvěma vlnovodnými dílci vyznačující se nízkými ztrátami

Dejme tomu, že chcete vlnovod zakončit takovým způsobem, který nepovede ke vzniku odražených vln. Pak musíte na konec dát něco, co imituje nekonečnou délku vlnovodu. Potřebujete „zakončení“, které působí na vlnovod tak, jako charakteristická impedance na přenosové vedení – něco, co pohlcuje přicházející vlny bez jejich odrazu. Vlnovod se pak bude chovat tak, jakoby byl nekonečně dlouhý. Taková zakončení se dělají tak, že se dovnitř vlnovodu vkládají křídlovité destičky z odporového materiálu. Jsou pečlivě zkonstruovány tak, aby absorbovaly energii vlny a téměř negenerovaly odražené vlny.

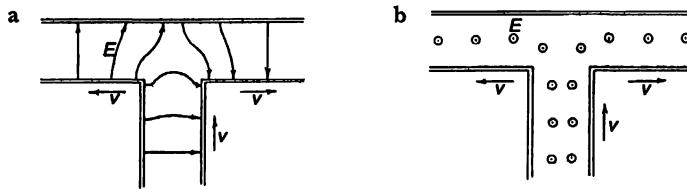
Chcete-li spojit tři součásti, například jeden zdroj připojit ke dvěma různým anténám, pak můžete použít rozdějku tvaru *T* (*obr. 24.11*). Výkon přiváděný do střední sekce rozdějky se bude štěpit a rozcházet do obou bočních ramen (a také přitom mohou vznikat odražené vlny). Z náčrt-

ků na *obr. 24.12* se můžete kvalitativně přesvědčit, že pole se budou rozdvíjet, když se dostanou na konec vstupní sekce. Vytvoří se taková elektrická pole, která budou počátkem vln vycházejících do obou ramen.



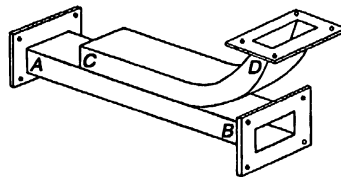
Obr. 24.11 Rozdvojka tvaru T (Na přírubách jsou nasazena plastická víčka, aby se nitro udržovalo čisté, pokud se rozdvojka nepoužívá.)

Pole v rozdvojce budou zhruba taková, jako je vyznačeno v *a* nebo *b* na *obr. 24.12*, a to podle toho, zda jsou elektrická pole ve vlnovodu rovnoběžná nebo kolmá na „stříšku“ rozdvojky.



Obr. 24.12 Elektrická pole v rozdvojce tvaru T při dvou možných orientacích pole

Nakonec bychom rádi popsali zařízení nazvané směrová odbočka, které je velmi užitečné při zjišťování, co se děje potom, když jste zapojili složité schéma vlnovodů. Představte si, že potřebujete vědět, jakým směrem se pohybují vlny v nějakém dílci vlnovodu; například můžete být zvědaví, zda existuje silná odražená vlna nebo ne. Směrová odbočka odeberá z vlnovodu malou část výkonu, když vlna postupuje jedním směrem, ale nic, když postupuje směrem opačným. Po připojení směrové odbočky k detektoru můžete měřit „jednosměrný“ výkon ve vlnovodu.



Obr. 24.13 Směrová odbočka

Obr. 24.13 představuje náčrt směrové odbočky; k jedné stěně vlnovodného dílce AB je přiletován jiný vlnovodný díleček CD , vychýlený do strany, aby vznikl prostor pro spojovací příruby. Předtím než se k sobě vlnovody přiletují, provrtají se do každého z nich dva nebo více otvorů

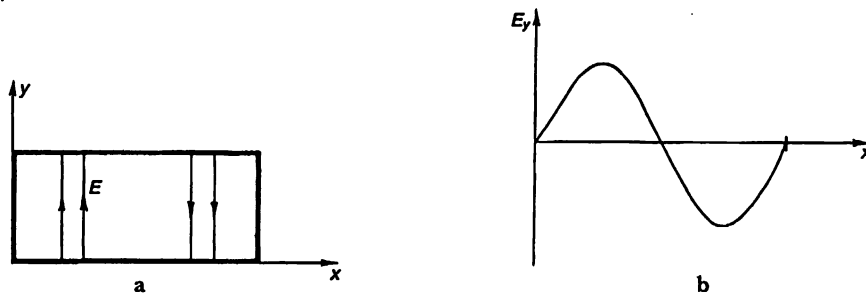
navzájem se kryjících, takže něco z polí v hlavním vlnovodu AB může projít do sekundárního vlnovodu CD . Každý z otvorů působí jako malá anténa, která vytváří vlnu v sekundárním vlnovodu. Kdyby byl jen jeden otvor, vlny by se z ní rozcházely na obě strany a byly by obě stejné bez ohledu na to, kterým směrem by postupovala vlna v primárním vlnovodu.

Ale jsou-li vyvrtány dva otvory vzdálené od sebe čtvrtinu vlnové délky ve vlnovodu, budou vytvářet dva zdroje s fázovým posunem 90° . Vzpomínáte si, že v kapitole 29 dříve jsme rozebrali interferenci vln dvou antén se vzájemnou vzdáleností $\lambda/4$ a vybuzených s časovým zpožděním, představujícím fázový posun 90° ? Zjistili jsme, že v tom případě se vlny v jednom směru odečítají a v druhém směru sčítají. Právě to se stane zde. Vlna vybuzeaná ve vlnovodu CD bude postupovat stejným směrem jako vlna v AB .

Pohybuje-li se v primárním vlnovodu vlna z A směrem k B , objeví se vlna i na výstupu D ze sekundárního vlnovodu. Postupuje-li vlna v primárním vlnovodu z B směrem k A , bude existovat pouze jedna vlna jdoucí ke konci C sekundárního vlnovodu. Tento konec je však opatřen přizpůsobeným zakončovacím členem, který tuto vlnu pohltí a na výstupu z odbočky se žádná vlna neobjeví.

24.7 MODY VLNOVODU

Vlna, kterou jsme zvolili při naší analýze, představuje speciální řešení rovnic pole. Existují i mnohá jiná řešení. Každé řešení se nazývá mod vlnovodu. Například v případě pole, které jsme vybrali, se ve směru osy x uložila polovina cyklu sinusoidy. Existuje stejně dobré řešení s plným cyklem; na obr. 24.14 je graf závislosti E_y na x v tomto případě. Pro takový mod je k_x dvojnásobné, takže mezní frekvence je mnohem vyšší. Kromě toho ve vlně, kterou jsme zkoumali, mělo pole E pouze y -ovou složku. Existují však mody s komplikovanějšími elektrickými poli. Má-li elektrické pole pouze složky ve směru x a ve směru y , tj. je stále kolmé na směr osy z , nazývá se tento mod „transverzálně elektrický“ (nebo TE) mod. Magnetické pole takových modů bude mít z -ovou složku vždy.



Obr. 24.14 Další možná závislost E_y na x

Ukazuje se, že má-li E složku ve směru osy z ; tj. ve směru šíření vlny, magnetické pole bude mít vždy jen příčné složky. Taková pole se nazývají transverzálně magnetické (TM) mody. V případě obdélníkového vlnovodu mají všechny jiné mody vyšší frekvenci než jednoduchý TE mod, který jsme popsali. Proto je možné – a obvyklé – používat vlnovod při frekvenci právě převyšující mezní frekvenci pro tento nejnižší mod, ale ležící ještě pod mezní frekvencí všech ostatních modů, takže vlnovodem se šíří pouze jeden mod. Jinak se vlastnosti vlnovodu stávají komplikovanějšími a těžko kontrolovatelnými.

24.8 JINÝ POHLED NA VLNOVODY

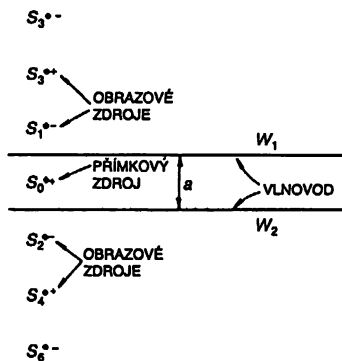
Nyní vám chceme ukázat jiný způsob chápání, proč vlnovod prudce zeslabuje pole o frekvencích pod mezní frekvencí ω_m . Získáte tím „fyzikálnější“ představu o tom, proč se jeho chování tak drasticky liší při nízkých a vysokých frekvencích. V případě obdélníkového vlnovodu to můžeme provést analýzou polí pomocí odrazů (nebo obrazů) na stěnách vlnovodu. Tento přístup lze uplatnit jen pro obdélníkové vlnovody; proto jsme začali matematictější analýzou, která v principu platí pro vlnovody jakéhokoliv tvaru.

V popsaném modu neměl vertikální rozměr (ve směru osy y) žádný účinek, takže vršek a spodek vlnovodu můžeme zanedbat a myslet si, že ve vertikálním směru se vlnovod táhne do nekonečna. Proto si představujeme, že vlnovod se skládá pouze ze dvou vertikálních desek o vzájemné vzdálenosti a .

Řekněme, že zdrojem polí je vertikální drát umístěný ve středu vlnovodu a napájený proudem, který kmitá s frekvencí ω . Kdyby nebylo stěn vlnovodu, vyzařoval by takový drát válcové vlny.

Nyní si představme, že stěny vlnovodu jsou dokonale vodivé. Pak, přesně jako v elektrostatice, budou podmínky na jeho povrchu splněny, přidáme-li k poli drátu pole jednoho nebo více vhodných zrcadlových obrazů drátu. Představa elektrických zrcadel se uplatňuje v elektrodynamice stejně dobře jako v elektrostatice, samozřejmě za předpokladu, že započteme i časové zpoždění. Víme, že je to pravda, neboť jsme často viděli zrcadlo vytvářející obraz světelného zdroje a obyčejné zrcadlo je právě dokonalým vodičem pro elektromagnetické vlny o optických frekvencích.

Vezměme horizontální řez, nakreslený na obr. 24.15, kde W_1 a W_2 jsou dvě stěny vlnovodu a S_0 je zdrojový drát. Směr proudu v drátu označme jako kladný. Kdyby existovala pouze jedna stěna, řekněme W_1 , mohli bychom ji prostě odstranit, kdybychom do polohy označené S_1 umístili zrcadlový obraz zdroje (o opačné polaritě). Ale v přítomnosti obou stěn bude existovat také obraz S_0 vzhledem ke stěně W_2 – u nás obraz S_2 . Tento zdroj bude také mít obraz v W_1 , který označíme S_3 .



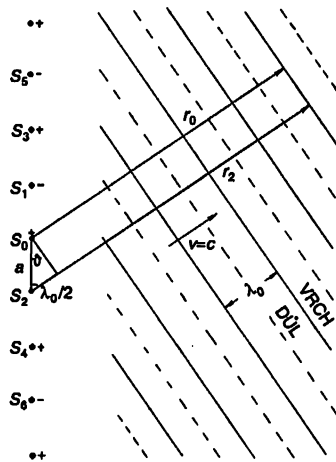
Obr. 24.15 Přímkový zdroj S_0 mezi vodivými rovinnými stěnami W_1 a W_2 . Tyto stěny lze zaměnit nekonečnou posloupností zrcadlových zdrojů

Dále jak S_1 , tak i S_3 budou mít své obrazy vzhledem k W_2 v polohách označených S_4 a S_6 atd. V případě našich dvou rovinných vodičů se zdrojem v poloviční vzdálenosti mezi nimi jsou tedy pole stejná jako pole vytvářená nekonečnou posloupností zdrojů, z nich každý je vzdálen o a od předcházejícího zdroje. (Je to vlastně totéž, co byste viděli, kdybyste se dívali na drát nacházející

se v poloviční vzdálenosti mezi dvěma rovnoběžnými zrcadly.) Aby byla pole na stěnách nulová, musí se polarita proudů od jednoho obrazu k druhému střídát. Jinými slovy, proudy v nich kmitají s fázovým posunem 180° . Pole vlnovodu je přesně rovno superpozici polí v takové nekonečné množině přímkových zdrojů.

Víme, že v blízkosti zdrojů je pole velmi podobné statickému poli. V článku 7.5 jsme zkoumali statické pole mřížky z přímkových zdrojů a zjistili jsme, že je podobné poli nabitě desky s výjimkou členů, které klesají se vzdáleností od mřížky exponenciálně. Střední intenzita zdrojů je zde rovna nule, protože znaménko se od zdroje ke zdroji mění. Jakákoliv pole, která existují, musí klesat se vzdáleností exponenciálně. Těsně u zdroje pozorujeme hlavně pole nejbližšího zdroje; ve velkých vzdálenostech k poli přispívají mnohé zdroje a jejich střední účinek je roven nule. Nyní vidíme, proč vlnododává pod mezní frekvencí exponenciálně klesající pole. Obzvláště při nízkých frekvencích je statické přiblížení dobré a předpovídá prudké zeslabení polí se vzdáleností.

Nyní stojíme před opačnou otázkou: proč se vlny vůbec šíří? To je záhadná věc. Důvod spočívá v tom, že při vysokých frekvencích může zpoždění polí vyvolat dodatečné změny fáze, což může vést k tomu, že pole fázově posunutých zdrojů se místo vzájemného rušení budou sčítat. Vlastně už v kapitole 29 dříve jsme právě kvůli této úloze studovali pole generovaná soustavou antén nebo optickou mřížkou. Tam jsme zjistili, že je-li několik rádiových antén vhodně uspořádáno, mohou vytvořit takový interferenční obrazec, který v nějakém směru dává silný signál a v jiných směrech signál žádný.



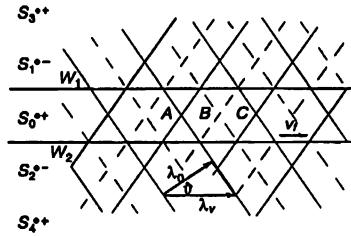
Obr. 24.16 Jedna soustava koherentních vln řady přímkových zdrojů

Vraťme se k obr. 24.15 a všimněme si pole ve velké vzdálenosti od řady zrcadlových zdrojů. Pole budou silná pouze v určitých směrech, které závisejí na frekvenci – pouze v těchto směrech, v nichž pole všech zdrojů přicházejí ve fázi a sčítají se. Při určité vzdálenosti od zdrojů se pole šíří v těchto speciálních směrech jako rovinné vlny. Na obr. 24.16 jsme takovou vlnu znázornili. Plné čáry představují vrchy a čárkované čáry představují doly vlny. Směr vlnění bude ten, pro nějž rozdíl vzdáleností vln dvou sousedních zdrojů po hřeben vlny odpovídá polovině periody oscilace vlny. Jinými slovy, rozdíl mezi r_2 a r_0 na obrázku je roven jedné polovině vlnové délky ve volném prostoru:

$$r_2 - r_0 = \frac{\lambda_0}{2}.$$

Úhel ϑ (theta) pak vyjadřuje vztah
$$\sin \vartheta = \frac{\lambda_0}{2a}. \quad (24.33)$$

Samozřejmě existuje i jiná soustava vln, postupujících symetricky dolů pod stejným úhlem vzhledem k řadě zdrojů. Úplné pole ve vlnovodu (ne příliš blízko u zdroje) je rovno superpozici těchto dvou soustav vln (obr. 24.17). Skutečná pole opravdu tak vypadají, ale ovšem jen v prostoru mezi oběma stěnami vlnovodu.



Obr. 24.17 Na pole ve vlnovodu se můžeme dívat jako na superpozici dvou soustav rovinných vln

V takových bodech jako A a C, v nichž se vrchy obou obrazců překrývají, bude mít pole maximum; v takových bodech jako B, kde mají obě vlny své záporné vrcholy, bude mít pole svou minimální (největší zápornou) hodnotu. Pole ve vlnovodu se bude jevit jako v čase postupující podél vlnovodu s vlnovou délkou λ_v , která je rovna vzdálenosti z A do C. Tato vzdálenost souvisí s ϑ podle vztahu

$$\cos \vartheta = \frac{\lambda_0}{\lambda_v}. \quad (24.34)$$

Vyjádříme-li ϑ ze vztahu (24.33), dostaneme

$$\lambda_v = \frac{\lambda_0}{\cos \vartheta} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0/2a)^2}}, \quad (24.35)$$

což se shoduje s tím, co jsme našli ve vztahu (24.19).

Nyní vidíme, proč k vlnění dochází pouze při frekvencích vyšších, než je mezní frekvence ω_m . Je-li vlnová délka ve volném prostoru větší než $2a$, neexistuje úhel, pod kterým se mohou vlny nakreslené na obr. 24.16 objevit. Konstruktivní interference, která je k tomu potřebná, vzniká tehdy, poklesne-li λ_0 pod $2a$, tj. když ω překročí hodnotu $\omega_m = \pi c/a$.

Je-li frekvence dostatečně vysoká, mohou existovat dva nebo i více přípustných směrů, v nichž se vlny objeví. V našem případě je to tehdy, kdy $\lambda_0 < 2a/3$. Obecně to však může nastat i když $\lambda_0 < a$. Tyto dodatkové vlny přísluší vyšším modům vlnovodu, o nichž jsme se zmínili dříve.

Tato naše analýza také ozřejmila, proč je fázová rychlost vedených vln větší než c a proč závisí na ω . Mění-li se ω , mění se úhel šíření volných vln na obr. 24.16, a proto se mění i jejich rychlost ve vlnovodu.

Ačkoliv jsme vedenou vlnu popsali jako superpozici polí nekonečného seskupení lineárních zdrojů, můžete se přesvědčit, že ke stejnému výsledku bychom dospěli, i kdybychom si dvě soustavy vln ve volném prostoru představili jako kdyby se střídavě odrážely mezi dvěma dokonalými zrcadly – a měli přitom na paměti, že každý odraz znamená změnu znaménka fáze. Tyto množiny mnohonásobně odrážených vln se vždy vzájemně ruší s výjimkou případu, kdy se pohybují právě pod úhlem ϑ , daným vztahem (24.33). Na tutéž věc se můžeme dívat z mnoha hledisek.

PŘÍKLADY A CVIČENÍ

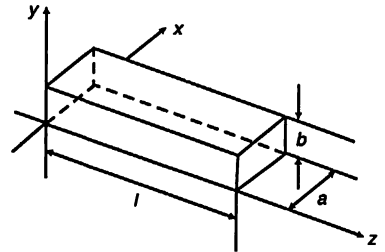
- 24.1** ■ U přenosového vedení připadá na jednotku délky indukčnost L_0 a kapacita C_0 . Ukažte, že když se napětí U a proud I v přenosovém vedení mění v čase pomalu (což odpovídá přenosu signálů o vlnové délce mnohem větší než je vzdálenost mezi jednotlivými články vedení), splňují U a I rovnice $\frac{\partial U}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t}$, $\frac{\partial I}{\partial x} = -C_0 \frac{\partial U}{\partial t}$, tj. vyhovují vlnové rovnici $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}$, kde $v^2 = \frac{1}{L_0 C_0}$.

Ve skutečnosti není předpoklad o pomalé změně signálů nutný, ale důkaz tohoto tvrzení vybočuje z rámce kapitoly 24.

- 24.2** ■ Charakteristická impedance je rovna $Z_0 = \sqrt{L_0/C_0}$, kde L_0 je indukčnost a C_0 kapacita na jednotku délky vedení. Ukažte, že přenosové vedení tvořené dvěma rovnoběžnými tenkými pásky šířky b rozmístěnými ve vzájemné vzdálenosti $a < b$ má charakteristickou impedanci $Z_0 \approx \frac{1}{\epsilon_0 c} \frac{a}{b}$.

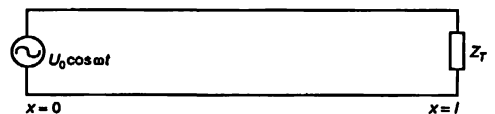
- 24.3** ■ Úsek válcového koaxiálního vedení je z obou stran uzavřen kovovými destičkami. Délka takto vzniklé dutiny je l . Pro základní mod s radiálním elektrickým polem najděte a) frekvenci; b) výraz pro E . c) Porovnejte nalezenou frekvenci s $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, kde L je indukčnost a C kapacita připadající na délku l nekonečného koaxiálního vedení.

- 24.4** ■ Obdélníkový vlnovod se stranami průřezu a a b je vyroben z ideálně vodivého materiálu. Konce jednoho úseku vlnovodu délky l jsou uzavřeny vodivými destičkami, takže vzniká rezonátor (viz obrázek). Je-li elektrické pole v dutině dáno výrazem $E(x, y, z, t) = E_0(x, z) e_y e^{i\omega t}$, čemu je rovna amplituda $E_0(x, z)$ kmitů na nejnižší rezonanční frekvenci? Čemu je rovna tato frekvence?



- 24.5** ■ Koaxiální kabel je tvořen dvěma souosými vodivými válci. Jeden konec kabelu ($x = 0$) je připojen ke generátoru střídavého napětí $U(t) = U_0 \cos \omega t$. Druhý konec ($x = l$) je uzavřen vodivou destičkou. Indukčnost a kapacita kabelu na jednotku délky jsou L_0 a C_0 . Pole v takovém kabelu si můžeme představit jako superpozici dvou vln: dopadající a odražené od zkratovaného konce. Amplitudy a fáze těchto vln musí být zvoleny tak, aby výsledné napětí mezi vodiči bylo nulové při $x = l$ a $U_0 \cos \omega t$ při $x = 0$.
- Najděte výraz pro dopadající a odraženou vlnu.
 - Nakreslete křivku závislosti napětí mezi vodiči na vzdálenosti x , je-li délka kabelu l rovna $5\pi c/2\omega$ (c je rychlost světla ve vakuu). Najděte hodnoty x , pro které je napětí maximální.
 - Čemu je roven proud v bodech $x = 0$, $x = l/2$ a $x = l$ pro délku kabelu uvedenou v bodě b).
 - Za předpokladu, že zdroj napětí je ideální, určete střední moment síly, který musí být přiložen k jeho rotoru, aby se otáčel s úhlovou frekvencí ω .

- 24.6** ■ Ukažte, že je-li přenosové vedení při $x = l$ ukončeno impedancí Z_T (viz obrázek), bude vstupní impedance (při $x = 0$) rovna $Z_s = i Z_0 \frac{tg(\omega\sqrt{LC}l) - i Z_T/Z_0}{1 + i Z_T/Z_0 tg(\omega\sqrt{LC}l)}$, kde $Z_0 = \sqrt{L/C}$ je



charakteristická impedance vedení. Čemu je rovna Z_s , je-li a) $Z_T = 0$, b) $Z_T = \infty$, c) $Z_T = Z_0$?

24.7 ■ Přenosové vedení s charakteristickou impedancí Z_1 je napojeno na druhé vedení s charakteristickou impedancí Z_2 . Ukažte, že je-li generátor připojen ke vstupu prvního vedení, bude koeficient odrazu roven $\frac{U_o}{U_d} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}$ a koeficient propustnosti $\frac{U_p}{U_d} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$, kde U_d , U_o a U_p je napětí dopadající, odražené a prošlé vlny.

24.8 ■ Elektrické pole ve vlnovodech popsaných v kapitole 24 je příčné, tj. složka intenzity pole ve směru šíření vlny je nulová. Kromě toho však mohou existovat postupné vlny s příčným magnetickým polem. V obdélníkovém vlnovodu má vektorový potenciál příčné magnetické vlny tvar

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_z \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i(\omega t - k_z z)}, \text{ kde } k_z = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}.$$

a) Přesvědčte se, že magnetické pole tohoto potenciálu je skutečně příčné a ukažte, že elektrické pole \mathbf{E} a magnetické pole \mathbf{B} vyhovují vlnové rovnici s příslušnými okrajovými podmínkami. Poznámka: Předpokládáme, že $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, kde $\nabla \cdot \mathbf{A} = -(1/c)(\partial\phi/\partial t)$.

b) Ukažte, že příčná magnetická vlna se nešíří, je-li $\omega < c \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$.

Elektrodynamika v relativistickém zápisu

25.1 ČTYŘVEKTORY

25.2 SKALÁRNÍ SOUČIN

25.3 ČTYŘROZMĚRNÝ GRADIENT

25.4 ELEKTRODYNAMIKA V ČTYŘROZMĚRNÉM ZÁPISU

25.5 ČTYŘPOTENCIÁL POHYBUJÍCÍHO SE NÁBOJE

25.6 INVARIANCE ROVNIC ELEKTRODYNAMIKY

V této kapitole $c = 1$

Přečtěte si znovu: kapitolu 15, díl 1, Speciální teorie relativity
kapitolu 16, díl 1, Relativistická energie a hybnost
kapitolu 17, díl 1, Prostorčas
kapitolu 13, díl 2, Magnetostatika

25.1 ČTYŘVEKTORY

Nyní se budeme věnovat aplikacím speciální teorie relativity v elektrodynamice. Protože jsme se se speciální teorií relativity seznámili už v kapitolách 15 až 17 1. dílu, v rychlosti si zopakujeme jen základní myšlenky.

Je experimentálně zjištěno, že fyzikální zákony se nemění, pohybujeme-li se stálou rychlostí. Nemůžeme zjistit, zda raketa, v níž se nacházíme se pohybuje rovnoměrně přímočaře, pokud se nepodíváme ven z rakety, nebo nevykonáme nějaká jiná pozorování související s vnějším světem. Každý správný fyzikální zákon musí být formulován tak, aby tuto skutečnost zohlednil.

Vztah mezi prostorem a časem dvou souřadnicových soustav, z nichž jedna, S' se pohybuje rovnoměrnou rychlostí ve směru osy x vzhledem ke druhé soustavě S , je určen *Lorentzovou transformací*

$$\begin{aligned}t' &= \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}, & y' &= y, \\x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}, & z' &= z.\end{aligned}\tag{25.1}$$

Fyzikální zákony musí být takové, aby po Lorentzově transformaci měly tutéž formu, jakou měly původně. Je to stejné jako princip, který říká, že zákony fyziky nezávisí na *orientaci* souřadnicové soustavy. V 11. kapitole 1. dílu jsme viděli, že nejlepší způsob, jak matematicky popsat invariantnost fyziky vzhledem k rotaci, byl *vektorový* zápis rovnic.

Když jsme například měli dva vektory

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z), \quad \mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$$

zjistili jsme, že kombinace

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

se nezměnila, jestliže jsme provedli transformaci do pootočené soustavy. Víme tedy, že máme-li skalární součin typu $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ na obou stranách rovnice, bude mít rovnice přesně tentýž tvar ve všech pootočených souřadnicových soustavách. Také jsme našli operátor (viz kapitola 2)

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

který při aplikaci na skalární funkci dává tři veličiny, jež se transformují jako vektor. Tímto operátorem jsme definovali gradient a v kombinaci s jinými vektory divergenci a laplasián. Nakonec jsme zjistili, že sestrojíme-li součet určitých součinů dvojic složek dvou vektorů, můžeme dostat tři nové veličiny, které se chovají jako nový vektor. Nazvali jsme jej *vektorový součin* dvou vektorů. Když jsme provedli vektorový součin našeho operátoru ∇ s vektorem, definovali jsme tím rotaci vektoru.

Jelikož se budeme často odvolávat na výsledky vektorové algebry, uvádíme v *tab. 25.1* souhrn všech důležitých trojrozměrných vektorových operací, které jsme v minulosti používali. Zdůrazňujeme, že ve fyzice musí být rovnice formulovány tak, aby se obě strany při rotacích transformovaly stejným způsobem. Je-li jednou stranou rovnice vektor, musí být druhá strana také vektorem a obě se při rotaci souřadnicové soustavy mění stejným způsobem. Podobně je-li jedna strana skalárem, musí být druhá strana také skalárem, takže ani jedna strana rovnice se nemění, pootočíme-li souřadnice, atd.

Nyní, v případě speciální teorie relativity, jsou prostor a čas „nerozmotatelně“ promíchány a musíme postupovat analogicky ve čtyřech rozměrech. Chceme, aby naše rovnice zůstávaly stejné nejen při rotacích, ale i v *libovolné* inerciální soustavě. To znamená, že naše rovnice mají být invariantní při Lorentzově transformaci (25.1). Cílem této kapitoly je ukázat, jak to lze udělat. Ale, dříve než začneme, chceme udělat něco, co nám naši práci velmi zjednoduší (a zabrání

některým nedorozuměním). Je to výběr našich jednotek délky a času tak, aby rychlost světla c byla rovna 1. Můžeme si to představit tak, že za jednotku času zvolíme čas, za který světlo urazí jeden metr (což je přibližně $3 \cdot 10^{-9}$ s). Dokonce bychom tuto jednotku mohli nazývat „jeden metr“. Při jejím použití bude ve všech našich rovnicích jasněji zřetelná prostorově časová symetrie. Zároveň zmizí všechna „céčka“ z relativistických rovnic. (Kdyby to vadilo, můžeme do libovolné rovnice vrátit všechna c tak, že t nahradíme ct nebo obecně, vložíme c do rovnic tak, aby rozměry vycházely správně.) S těmito základy jsme připraveni začít. Naším programem je udělat ve čtyřrozměrném prostoru vše, co jsme s vektory dělali při třech rozměrech. Je to skutečně docela jednoduchá hra, postupujeme analogicky. Jedinými komplikacemi bude značení (vektorový symbol už je rezervován pro tři rozměry) a jedna malá změna znamének.

Tabulka 25.1 Důležité veličiny a operace vektorové analýzy ve třech rozměrech

Definice vektoru	$A = (A_x, A_y, A_z)$
Skalární součin	$A \cdot B$
Vektorový diferenciální operátor	∇
Gradient	$\nabla\phi$
Divergence	$\nabla \cdot A$
Laplasian	$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \nabla^2$
Vektorový součin	$A \times B$
Rotace	$\nabla \times A$

Nejdříve, analogicky s vektory ve třech rozměrech, definujeme *čtyřvektor* jako soubor čtyř veličin a_ρ, a_x, a_y, a_z , které se transformují jako t, x, y, z , přecházíme-li do pohybující se soustavy. Čtyřvektory bývají označovány různými způsoby. My budeme používat zápis a_μ , čímž rozumíme čtveřici čísel (a_ρ, a_x, a_y, a_z) – jinými slovy index μ může nabývat čtyř hodnot t, x, y, z . Občas bude vhodné označovat tři prostorové složky vektorem takto $a_\mu = (a_\rho, \mathbf{a})$.

Už jsme se setkali s čtyřvektorem, který se skládal z energie a hybnosti částice (17. kapitola, 1. díl). V našem označení píšeme

$$\mathbf{p}_\mu = (E, \mathbf{p}), \quad (25.2)$$

což znamená, že čtyřvektor \mathbf{p}_μ se skládá z energie E a tří složek vektoru \mathbf{p} částice.

Vypadá to opravdu jako jednoduchá hra – potřebujeme jen najít ve fyzice ke každému vektoru zbývající čtvrtou složku a máme čtyřvektor. Abychom viděli, že tomu tak ve skutečnosti není, uvažujme vektor rychlosti se složkami

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Ptejme se: jak vypadá časová složka? Instinkt by nám měl správně poradit. Jelikož čtyřvektory jsou typu t, x, y, z , hádali bychom, že časová složka je

$$v_t = \frac{dt}{dt} = 1,$$

ale *není to pravda*. Důvodem je, že t v každém jmenovateli není invariantem vzhledem k Lorentzově transformaci. Čitatelé se chovají jako složky čtyřvektoru, ale dt ve jmenovateli vše zkaží: celé je to nesympetrické a různé ve dvou soustavách.

Ukazuje se, že čtyři složky „rychlosti“, které jsme napsali, se stanou složkami čtyřvektoru, když je prostě vydělíme výrazem $\sqrt{1 - v^2}$. Ukáže se, že je to pravda, neboť uvažujeme-li čtyřvektor energie – hybnosti

$$p_\mu = (E, \mathbf{p}) = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2}}, \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \quad (25.3)$$

a vydělíme jej klidovou hmotností m_0 , která je invariantním skalárem ve čtyřech rozměrech, dostaneme

$$\frac{p_\mu}{m_0} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2}} \right), \quad (25.4)$$

což je stále ještě čtyřvektor. (Když dělíme *invariantním skalárem*, transformační vlastnosti se nemění.) Čtyřvektor rychlosti u_μ tedy můžeme definovat takto:

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, & u_y &= \frac{v_y}{\sqrt{1 - v^2}}, \\ u_x &= \frac{v_x}{\sqrt{1 - v^2}}, & u_z &= \frac{v_z}{\sqrt{1 - v^2}}. \end{aligned} \quad (25.5)$$

Čtyřrychlost je užitečná veličina, můžeme například psát

$$p_\mu = m_0 u_\mu. \quad (25.6)$$

To je typická forma relativisticky korektní rovnice: obě strany jsou čtyřvektor. (Pravá strana rovnice je invariant krát čtyřvektor, což je stále čtyřvektor.)

25.2 SKALÁRNÍ SOUČIN

Můžete to považovat, chcete-li, za náhodu, ale faktem je, že při rotaci soustavy se vzdálenost bodu od počátku souřadnicové soustavy nemění. Matematicky to znamená, že výraz $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ je invariant. Jinými slovy, po rotaci $r'^2 = r^2$, nebo

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Ptáme se: Existuje podobná veličina, která je invariantní při Lorentzově transformaci? Odpověď zní ano, existuje. Z rovnice (25.1) je vidět, že

$$t'^2 - x'^2 = t^2 - x^2.$$

To je velmi pěkné, ale závisí to na výběru směru x . Můžeme to napravit tím, že odečteme y^2 a z^2 . Pak se tato veličina při libovolné Lorentzově transformaci plus rotaci nezmění. Takže čtyřrozměrným analogem k trojrozměrnému r^2 bude veličina

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Je to invariant vzhledem k úplné „Lorentzově grupě“, která zahrnuje oba druhy transformací: translaci s konstantní rychlostí a rotaci.

Jelikož tato invariance je algebraickou záležitostí závisící jen na transformačních pravidlech daných rovnicí (25.1) a na rotaci, musí platit stejně pro libovolný čtyřvektor (podle definice se všechny čtyřvektory transformují stejně). Takže pro čtyřvektor a_μ máme

$$a_t'^2 - a_x'^2 - a_y'^2 - a_z'^2 = a_t^2 - a_x^2 - a_y^2 - a_z^2.$$

Tuto veličinu budeme nazývat druhou mocninou „délky“ čtyřvektoru a_μ . (Někdy je zvykem měnit znaménko všech členů a délkou je pak nazýván výraz $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 - a_t^2$. Na to je třeba si dávat pozor.)

Máme-li dva čtyřvektory a_μ a b_μ , budou se jejich příslušné složky transformovat stejně, takže kombinace

$$a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z$$

je také invariantní (skalární) veličinou. (Ve skutečnosti jsme to už dokázali v 17. kapitole 1. dílu). Tento výraz je zřejmě analogický skalárnímu součinu dvou vektorů. Skutečně jej budeme nazývat *skalárním součinem* dvou čtyřvektorů. Zdálo by se, že je logické psát jej jako $a_\mu \cdot b_\mu$, aby skutečně vypadal jako skalární součin. Ale konvence je, bohužel, taková, že je psán bez tečky. Budeme se tedy držet konvence a psát skalární součin prostě jako $a_\mu b_\mu$. Definujeme tedy

$$a_\mu b_\mu = a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z. \quad (25.7)$$

Vždy, když někde uvidíte dva stejné indexy vedle sebe (občas budeme používat ν nebo nějaké jiné písmeno místo μ), bude to znamenat, že musíte sčítat čtyři součiny, a *nezapomenout* přitom na *znaménko minus* pro součiny prostorových složek. Při takovéto konvenci lze invarianci skalárního součinu vzhledem k Lorentzově transformaci psát jako

$$a'_\mu b'_\mu = a_\mu b_\mu.$$

Jelikož poslední tři členy v (25.7) představují skalární součin v trojrozměrném prostoru, bývá vhodnější psát

$$a_\mu b_\mu = a_t b_t - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

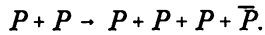
Také je zřejmé, že čtyřrozměrnou délku, kterou jsme popsali, můžeme zapsat jako $a_\mu a_\mu$:

$$a_\mu a_\mu = a_t^2 - a_x^2 - a_y^2 - a_z^2 = a_t^2 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}. \quad (25.8)$$

Někdy je vhodné psát tuto veličinu jako a_μ^2 :

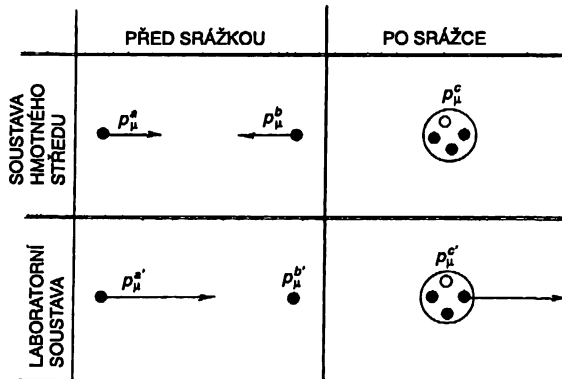
$$a_\mu^2 \equiv a_\mu a_\mu.$$

Nyní budeme názorně ilustrovat užitečnost čtyřvektorového skalárního součinu. Antiprotony (\bar{P}) jsou produkovány ve velkých urychlovačích reakcích



Znamená to, že proton s velkou energií se sráží s protonem, který je v klidu (například vodík slouží jako terč) a má-li nalétávající proton dostatek energie, může se kromě dvou původních protonů produkovat ještě proton-antiprotonový pár³⁵⁾. Ptáme se: Jakou energii musí mít nalétávající proton, aby se reakce mohla uskutečnit?

Nejjednodušší způsob, jak získat odpověď, je uvažovat, jak vypadá reakce v soustavě hmotného středu (HS) (obr. 25.1). Nalétávající proton budeme nazývat a a jeho čtyřrozměrnou hybnost p_μ^a . Podobně budeme terčový proton nazývat b a jeho čtyřhybnost p_μ^b . Měl-li nalétávající proton energii pouze na to, aby reakce proběhla, bude se výsledný stav (situace po srážce) skládat z trojice protonů a antiprotonu, které budou v klidu v soustavě (HS). Bude-li energie srážky o trochu větší, budou mít částice ve výsledném stavu určitou kinetickou energii a rozletí se; bude-li energie srážky trochu nižší, nebude postačovat k tomu, aby se vyprodukovaly čtyři částice.



Obr. 25.1. Reakce $P + P \rightarrow 3P + \bar{P}$ v laboratorní soustavě a soustavě hmotného středu. Dopadající proton má právě jen tolik energie, aby mohla reakce proběhnout. Protony jsou označeny plnými kroužky, antiprotony prázdnými kroužky

Budeme-li čtyřhybnost celého systému v konečném stavu nazývat p_μ^c , vyplne nám ze zákona zachování energie a hybnosti, že

$$p^a + p^b = p^c$$

³⁵⁾ Mohli byste se ptát: Proč neuvažujeme reakce $P + P \rightarrow P + P + \bar{P}$, nebo dokonce $P + P \rightarrow P + \bar{P}$, které zřejmě vyžadují méně energie? Je to proto, že princip nazývaný *zachování baryonů* nám říká, že veličina „počet protonů minus počet antiprotonů“ se nesmí měnit. Tato veličina má na levé straně naší rovnice hodnotu dva. Proto chceme-li mít na pravé straně antiproton, musíme tam mít i tři protony (nebo jiné baryony).

a

$$E^a + E^b = E^c.$$

Zkombinujeme-li tyto dvě rovnice, můžeme psát

$$\hat{p}_\mu^a + \hat{p}_\mu^b = \hat{p}_\mu^c. \quad (25.9)$$

Nyní je důležité, že je to rovnice pro čtyřvektory, a proto platí v libovolné inerciální soustavě. Tuto skutečnost můžeme využít ke zjednodušení našich výpočtů tím, že uvažujeme „délky“ čtyřvektorů na obou stranách rovnice (25.9). Tyto jsou, samozřejmě, stejné. Dostaneme

$$(\hat{p}_\mu^a + \hat{p}_\mu^b)(\hat{p}_\mu^a + \hat{p}_\mu^b) = \hat{p}_\mu^c \hat{p}_\mu^c.$$

Jelikož $\hat{p}_\mu^c \hat{p}_\mu^c$ je invariant, můžeme jej vypočítat v libovolné souřadnicové soustavě. V soustavě (HS) je časovou složkou čtyřvektoru \hat{p}_μ^c klidová energie čtyř protonů, a to je $4M$, zatímco prostorová část \hat{p} je rovna nule, takže $\hat{p}_\mu^c = (4M, 0)$. Využili jsme skutečnost, že klidová hmotnost antiprotonu je rovna klidové hmotnosti protonu, a tuto společnou hmotnost jsme označili M .

Rovnici (25.10) lze tedy upravit na tvar

$$\hat{p}_\mu^a \hat{p}_\mu^a + 2\hat{p}_\mu^a \hat{p}_\mu^b + \hat{p}_\mu^b \hat{p}_\mu^b = 16 M^2. \quad (25.11)$$

S $\hat{p}_\mu^a \hat{p}_\mu^a$ a $\hat{p}_\mu^b \hat{p}_\mu^b$ si snadno poradíme, jelikož „délka“ čtyřhybnosti libovolné částice je právě druhá mocnina hmotnosti této částice:

$$\hat{p}_\mu \hat{p}_\mu = E^2 - \hat{p}^2 = M^2.$$

To lze dokázat přímo výpočtem nebo šikovněji tím, že si všimneme, že pro částici v klidu platí $\hat{p}_\mu = (M, 0)$, takže $\hat{p}_\mu \hat{p}_\mu = M^2$. Jelikož je to invariantní veličina, je rovna M^2 v libovolné soustavě. Využijeme-li tyto výsledky v rovnici (25.11), dostaneme

$$2\hat{p}_\mu^a \hat{p}_\mu^b = 14 M^2$$

nebo

$$\hat{p}_\mu^a \hat{p}_\mu^b = 7 M^2. \quad (25.12)$$

Nyní můžeme vypočítat $\hat{p}_\mu^a \hat{p}_\mu^b$ v laboratorní soustavě. Čtyřvektor \hat{p}_μ^a můžeme psát jako (E^a, \hat{p}^a) , zatímco $\hat{p}_\mu^b = (M, 0)$, protože se vztahuje k protonu v klidu. Potom $\hat{p}_\mu^a \hat{p}_\mu^b$ musí být rovno ME^a a jelikož víme, že skalární součin je invariant, musí být numericky roven výsledku, který jsme našli v (25.12). Takže máme

$$E^a = 7M,$$

což je výsledek, který jsme hledali. Celková energie počátečního protonu musí být alespoň $7M$ (přibližně 6,6 GeV, jelikož $M=938$ MeV), nebo odečtáme-li klidovou hmotnost M , musí být kinetická energie alespoň $6M$ (přibližně 5,6 GeV). Urychlovač zvaný „bevatron“ v Berkeley byl projektován na urychlování protonů tak, aby jejich kinetická energie byla 6,2 GeV, a to právě za účelem získání antiprotonů.

Protože skalární součiny jsou invarianty, jejich hodnoty jsou vždy zajímavé. Uvažujme například „délku“ čtyřvektoru rychlosti

$$u_{\mu} u_{\mu} = u_t^2 - \mathbf{u}^2 = \frac{1}{1-v^2} - \frac{v^2}{1-v^2} = 1.$$

u_{μ} je tedy jednotkový čtyřvektor.

25.3 ČTYŘROZMĚRNÝ GRADIENT

Další věc, kterou musíme prodiskutovat, je čtyřrozměrný analog *gradientu*. Připomeňme si (14. kapitola, 1. díl) že trojice diferenciálních operátorů $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ se transformuje jako vektor a nazývá se gradient. Se stejným schématem bychom měli pracovat ve čtyřech rozměrech: na prvním pohled by se zdálo, že čtyřrozměrný gradient by mohl být $\partial/\partial t$, $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$. *Není to ale tak.*

Abychom zjistili, kde je chyba, uvažujme skalární funkci Φ , která závisí jen na x a t . Zvětšme-li t o Δt při konstantním x , změní se funkce Φ o

$$\Delta \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Delta t. \quad (25.13)$$

Z hlediska pohybujícího se pozorovatele

$$\Delta \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x'} \Delta x' + \frac{\partial \Phi}{\partial t'} \Delta t'.$$

$\Delta x'$ a $\Delta t'$ můžeme vyjádřit pomocí Δt použitím rovnice (25.1). Nezapomeňme, že x je konstantní, tj. $\Delta x = 0$, a můžeme psát

$$\Delta x' = -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \Delta t, \quad \Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}}$$

takže

$$\Delta \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x'} \left(-\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \Delta t \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial t'} \left(\frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}} \right) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t'} - v \frac{\partial \Phi}{\partial x'} \right) \frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Porovnáme-li tento výsledek s rovnicí (25.13), zjistíme, že

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t'} - v \frac{\partial \Phi}{\partial x'} \right). \quad (25.14)$$

Podobným výpočtem dostaneme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x'} - v \frac{\partial \Phi}{\partial t'} \right). \quad (25.15)$$

Nyní vidíme, že s gradientem není něco v pořádku. Vzorce, které vyjadřují x a t pomocí x' a t' (získané řešením rovnice (25.1)), mají tvar

$$t = \frac{t' + vx'}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

To je způsob, jakým se čtyřvektor musí transformovat. Ale rovnice (25.14) a (25.15) mají pár znamének nesprávných.

Odpověď je, že místo *nesprávného* $(\partial/\partial t, \nabla)$ musíme definovat *čtyřrozměrný gradientový operátor*, který budeme označovat ∇_μ , jako

$$\nabla_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (25.16)$$

Při takové definici zmizí znaménkové problémy, s nimiž jsme se už setkali, a ∇_μ se chová tak, jak se čtyřvektor chovat má. (Ta znaménka minus jsou dost nehezka, ale nedá se nic dělat.) Samozřejmě, řekáme-li, že ∇_μ se chová jako čtyřvektor, máme tím prostě na mysli, že čtyřgradient skaláru je čtyřvektorem. Je-li Φ skalární invariantní pole (Lorentzovsky invariantní), je $\nabla_\mu \Phi$ čtyřvektorové pole.

Nyní, když máme vektory, gradienty a skalární součiny, bude dalším krokem hledání invariantu, který by byl analogem k divergenci v trojrozměrné vektorové analýze. Analogickou formou bude zřejmě výraz $\nabla_\mu b_\mu$, kde b_μ je čtyřvektorové pole, jehož složky jsou funkcemi prostoru a času. *Divergenci* čtyřvektoru definujeme jako skalární součin ∇_μ a b_μ :

$$\nabla_\mu b_\mu = \frac{\partial}{\partial t} b_t - \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right) b_x - \left(-\frac{\partial}{\partial y} \right) b_y - \left(-\frac{\partial}{\partial z} \right) b_z = \frac{\partial}{\partial t} b_t + \nabla \cdot \mathbf{b}, \quad (25.17)$$

kde $\nabla \cdot \mathbf{b}$ je obyčejná divergence vektoru \mathbf{b} . Všimněme si, že musíme dávat pozor na znaménka. Některá minusová znaménka pocházejí z definice skalárního součinu (25.7), jiná jsou tam proto, že prostorové složky ∇_μ jsou $-\partial/\partial x$ atd., jako je tomu v rovnici (25.16). Divergence definovaná rovnicí (25.17) je invariantem a dává stejný výsledek ve všech souřadnicových soustavách, které se navzájem odlišují Lorentzovou transformací.

Podívejme se na fyzikální příklad, v němž se objevuje čtyřdivergence. Můžeme ji využít při určování pole v okolí pohybujícího se vodiče. V článku 13.7 jsme viděli, že hustota elektrického náboje ρ a proudová hustota \mathbf{j} tvoří čtyřvektor $\mathbf{j}_\mu = (\rho, \mathbf{j})$. Prochází-li nenabitým vodičem proud \mathbf{j}_x , v soustavě, která se vedle něj pohybuje rychlostí v (podél x), bude mít vodič následující nábojovou a proudovou hustotu (podle Lorentzovy transformace (25.1)):

$$\rho' = \frac{-vj_x}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad j'_x = \frac{j_x}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

To je právě to, co jsme našli v kapitole 13. Tyto zdroje můžeme dosadit do Maxwellových rovnic pro *pohybující se soustavu* a najdeme příslušná pole.

Zákon zachování náboje z článku 13.2 také získává v čtyřvektorovém zápisu jednoduchý tvar.

Uvažujme čtyřdivergenci

$$\nabla_{\mu} j_{\mu} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}.$$

Zákon zachování náboje říká, že tok proudu z jednotkového objemu musí být roven poklesu hustoty náboje. Jinými slovy

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Dosadíme-li do rovnice (25.18), získá zákon zachování náboje jednoduchý tvar

$$\nabla_{\mu} j_{\mu} = 0. \quad (25.19)$$

Jelikož $\nabla_{\mu} j_{\mu}$ je invariantní skalár, zůstává roven nule ve všech soustavách, je-li nulový v jedné soustavě. Zjistili jsme tedy, že zachovává-li se náboj v jedné souřadnicové soustavě, zachovává se ve všech souřadnicových soustavách, které se pohybují vzájemně rovnoměrnou rychlostí.

Jako poslední příklad budeme uvažovat skalární součin operátoru čtyřgradientu ∇_{μ} se sebou samým. V třech rozměrech vede takový součin k Laplaceovu operátoru

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Co dostaneme ve čtyřech rozměrech? To je jednoduché. Postupujeme-li podle pravidel pro skalární součiny a gradienty, dostaneme

$$\nabla_{\mu} \nabla_{\mu} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} - \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right) \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right) - \left(-\frac{\partial}{\partial y} \right) \left(-\frac{\partial}{\partial y} \right) - \left(-\frac{\partial}{\partial z} \right) \left(-\frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2.$$

Tento operátor, který je analogem trojrozměrného Laplaceova operátoru, se nazývá *d'Alembertův operátor* a má speciální označení

$$\square^2 = \nabla_{\mu} \nabla_{\mu} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (25.20)$$

Z definice vyplývá, že je to invariantní skalární operátor, který působí-li na čtyřvektorové pole, vytváří nové čtyřvektorové pole. (Někdy bývá d'Alembertův operátor definován s opačným znaménkem, než je v rovnici (25.20); na to je třeba dávat při čtení odborné literatury pozor.)

Našli jsme tedy čtyřvektorové ekvivalenty většiny trojrozměrných veličin, jež jsme uvedli v *tab. 25.1*. (Dosud nemáme ekvivalenty vektorového součinu a operace rotace – dostaneme se k nim až v následující kapitole.) Možná si snáze zapamatujete všechny důležité definice a výsledky, uvedeme-li je souhrnně na jednom místě. Proto jsme takový přehled udělali v *tab. 25.2*.

Tabulka 25.2 Důležité veličiny vektorové analýzy ve třech a čtyřech rozměrech

	Tři rozměry	Čtyři rozměry
Vektor	$A = (A_x, A_y, A_z)$	$a_\mu = (a_t, a_x, a_y, a_z) = (a_t, \mathbf{a})$
Skalární součin	$A \cdot B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$	$a_\mu b_\mu = a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z = a_t b_t - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
Vektorový operátor	$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$	$\nabla_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right)$
Gradient	$\nabla \psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)$	$\nabla_\mu \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, -\nabla \varphi \right)$
Divergence	$\nabla \cdot A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\nabla_\mu a_\mu = \frac{\partial a_t}{\partial t} + \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial a_t}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{a}$
Laplasián a d'Alembertián	$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$	$\nabla_\mu \nabla_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \square^2$

25.4 ELEKTRODYNAMIKA V ČTYŘROZMĚRNÉM ZÁPISU

S d'Alembertovým operátorem jsme se už setkali, aniž bychom mu dávali jméno. V článku 18.6; diferenciální rovnice pro potenciály, které jsme tehdy našli, mohou mít v novém zápisu tvar

$$\square^2 \varphi = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \square^2 A = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}. \quad (25.21)$$

Čtyři veličiny na pravých stranách rovnic (25.21) jsou ρ, j_x, j_y, j_z , dělené konstantou ϵ_0 . Tato univerzální konstanta je stejná ve všech souřadnicových soustavách, používáme-li ve všech soustavách stejnou jednotku náboje. Proto čtyři veličiny $\rho/\epsilon_0, j_x/\epsilon_0, j_y/\epsilon_0, j_z/\epsilon_0$ se transformují jako čtyřvektor. Můžeme je psát jako j_μ/ϵ_0 . D'Alembertův operátor se nemění při změně souřadnicové soustavy; proto veličiny φ, A_x, A_y, A_z se musí také transformovat jako čtyřvektor – to znamená, že jsou složkami čtyřvektoru. V krátkosti

$$A_\mu = (\varphi, \mathbf{A})$$

je čtyřvektor. To, co nazýváme skalární a vektorový potenciál, jsou ve skutečnosti různé aspekty téže fyzikální veličiny. Patří k sobě. Držíme-li je pohromadě, je relativistická invariance světa zřejmá. A_μ nazýváme *čtyřpotenciál*, j_μ *čtyřproud*.

V čtyřvektorovém zápisu získají rovnice (25.21) jednoduchý tvar

$$\square^2 A_\mu = \frac{j_\mu}{\epsilon_0}. \quad (25.22)$$

Fyzikální význam těchto rovnic je tentýž jako význam Maxwellových rovnic. To, že se nám podařilo přepsat Maxwellovy rovnice do takového elegantního tvaru, nás jistě těší. Pěkná forma má však také svůj smysl – přímo ukazuje invarianci elektrodynamiky vzhledem k Lorentzově transformaci.

Nezapomeňme, že rovnice (25.21) mohly být odvozeny z Maxwellových rovnic jen tehdy, jestliže jsme kladli kalibrační podmínku

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (25.23)$$

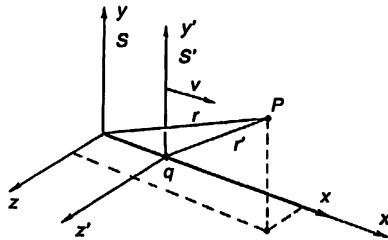
kteřá říká jen to, že $\nabla \cdot \mathbf{A}_\mu = 0$. Vyjádřeno slovy, divergence čtyřpotenciálu \mathbf{A}_μ je rovna nule. Tato podmínka se nazývá Lorentzova podmínka. Je velmi výhodná, protože je invariantní, a tedy Maxwellovy rovnice zůstávají ve tvaru rovnice (25.22) ve všech soustavách.

25.5 ČTYŘPOTENCIÁL POHYBUJÍCÍHO SE NÁBOJE

Ačkoliv je to zřejmé z předcházejícího, napíšeme si transformační zákony, které vyjadřují, φ a \mathbf{A} v pohybující se soustavě, pomocí φ a \mathbf{A} v nehybné soustavě. Jelikož $\mathbf{A}_\mu = (\varphi, \mathbf{A})$ je čtyřvektor, musí mít příslušné rovnice tvar (25.1) s tím rozdílem, že t nahradíme φ a \mathbf{x} nahradíme \mathbf{A} . Takže

$$\begin{aligned} \varphi' &= \frac{\varphi - v A_x}{\sqrt{1 - v^2}}, & A'_y &= A_y, \\ A'_x &= \frac{A_x - v \varphi}{\sqrt{1 - v^2}}, & A'_z &= A_z. \end{aligned} \quad (25.24)$$

Předpokládáme, že čárkovaná souřadnicová soustava se z hlediska nečárkované soustavy pohybuje rychlostí v v kladném směru osy x .



Obr. 25.2. Soustava S' se pohybuje rychlostí v (ve směru osy x) vzhledem k S . Náboj, který je v klidu v počátku soustavy S' , má v soustavě S polohu $x = vt$. Potenciály v bodě P se mohou vypočítat v obou soustavách

Ukážeme na jednom příkladu užitečnost zavedení čtyřpotenciálu. Jaký je vektorový a skalární potenciál náboje q , který se pohybuje rychlostí v podél osy x ? Úloha je jednoduchá v souřadnicové soustavě, která se pohybuje společně s nábojem, protože v této soustavě je náboj v klidu. Řekněme, že náboj se nachází v počátku soustavy S' , jak je to ukázáno na obr. 25.2. Skalární potenciál v pohybující se soustavě je

$$\varphi' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'}, \quad (25.25)$$

kde r' je vzdálenost od q k bodu pole, měřená v pohybující se soustavě. Vektorový potenciál A' je, samozřejmě, nulový.

Nyní je jednoduché najít potenciály φ a A , měřené v nehybných souřadnicích. Inverzní vztahy k rovnicím (25.24) jsou

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\varphi' + vA'_x}{\sqrt{1-v^2}}, & A_y &= A'_y \\ A_x &= \frac{A'_x + v\varphi'}{\sqrt{1-v^2}}, & A_z &= A'_z. \end{aligned} \quad (25.26)$$

Dosadíme-li φ' z rovnice (25.25) a $A' = 0$, dostaneme

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1-v^2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

To nám dává skalární potenciál φ , který bychom viděli v S , ale, bohužel, vyjádřený pomocí souřadnic v S' . Můžeme ho vyjádřit pomocí t, x, y, z , dosadíme-li za t', x', y', z' z rovnic (25.1). Dostaneme

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \frac{1}{\sqrt{[(x-vt)/\sqrt{1-v^2}]^2 + y^2 + z^2}}. \quad (25.27)$$

Stejným postupem můžeme pro složky vektoru A ukázat, že

$$A = v\varphi. \quad (25.28)$$

Jsou to tytéž vzorce, které jsme odvodili jinou metodou v kapitole 21.

25.6 INVARIANCE ROVNIC ELEKTRODYNAMIKY

Zjistili jsme, že potenciály φ a A spolu vytvářejí čtyřvektor, který nazýváme čtyřpotenciál A_μ , a že vlnové rovnice (úplné rovnice, které určují A_μ pomocí j_μ) lze napsat jako rovnici (25.22). Tato rovnice, spolu se zákonem zachování náboje (25.19), nám dává základní zákon elektromagnetického pole

$$\square^2 A_\mu = \frac{1}{\epsilon_0} j_\mu, \quad \nabla_\mu j_\mu = 0. \quad (25.29)$$

Zde, na malém prostoru v jednom řádku, jsou všechny Maxwellovy rovnice krásné a jednoduché. Naučili jsme se něco z rovnic napsaných tímto způsobem kromě toho, že jsou krásné a jednoduché? Máme na mysli, zda je tu nějaký rozdíl v porovnání s předcházejícím zápisem, kdy

jsme všechno vypisovali v různých složkách. Můžeme z této rovnice odvodit něco, co by nemohlo být odvozeno z vlnových rovnic pro potenciály vyjádřené pomocí nábojů a proudů? Odpověď je, že rozhodně ne. Jediná věc, kterou jsme dokázali, byla změna názvů použitím nového značení. Napsali jsme čtverečkový symbol, abychom vyjádřili derivace, ale stále to neznamenal nic víc ani nic méně než druhá derivace podle t , minus druhá derivace podle x , minus druhá derivace podle y , minus druhá derivace podle z . Jaký význam pak měla skutečnost, že rovnice se mohou psát v takovém jednoduchém tvaru? Z hlediska nějakých přímých důsledků to neznamená nic. Ačkoliv jednoduchost rovnic může znamenat, že příroda má také určitou jednoduchost.

Ukážeme si něco zajímavého, co jsme objevili nedávno: *Všechny zákony fyziky mohou být obsaženy v jediné rovnici.* Touto rovnicí je

$$U = 0. \quad (25.30)$$

Jak jednoduchá rovnice! Samozřejmě, je třeba vědět, co znamená ten symbol. U je fyzikální veličina, kterou budeme nazývat „univerzalita“ dané situace. A máme pro ni vzorec. Ukážeme si, jak počítáme univerzalitu. Vezmeme všechny fyzikální zákony a zapíšeme je ve speciálním tvaru. Jako příklad vezmeme zákon mechaniky $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ a přepíšeme jej na $\mathbf{F} - m\mathbf{a} = 0$. Dále vezmeme druhou mocninu výrazu $\mathbf{F} - m\mathbf{a}$ a nazveme jej U_1 , což bychom mohli nazývat „univerzalita mechanických jevů“. Jinými slovy definujeme

$$U_1 = (\mathbf{F} - m\mathbf{a})^2. \quad (25.31)$$

Nyní napíšeme jiný fyzikální zákon, například $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ a definujeme

$$U_2 = \left(\nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right)^2,$$

což můžeme nazývat „gaussovskou univerzalitou elektrických jevů“. Pokračujeme zapsáním U_3 , U_4 atd. po jednom pro každý fyzikální zákon.

Nakonec *celkovou univerzalitu* světa U nazveme sumu různých univerzalit U_i pocházejících od všech jevů, které jsme zahrnuli; to znamená, že $U = \sum_i U_i$. Velký „zákon přírody“ je pak

$$\boxed{U = 0.} \quad (25.32)$$

Tento „zákon“, samozřejmě, znamená, že suma druhých mocnin je rovna nule, a to je možné jedině tehdy, rovná-li se nule každý jednotlivý člen.

Takže „krásně jednoduchý“ zákon, daný rovnicí (25.32), je ekvivalentní celé sérii rovnic, které jsme získali původně. Je tedy zcela jasné, že jednoduchý zápis ve skutečnosti není jednoduchý, protože jeho složitost je ukryta v definici jednotlivých symbolů. *Je to jen trik.* Krása, která se objevuje v rovnici (25.32) je jen z toho důvodu, že je v ní ukryto více rovnic, není nic víc než jen trik. Když celou věc rozšiřujete, dostanete se tam, kde jste byli předtím.

Přece je však v jednoduchosti zákonů elektromagnetizmu psaných ve tvaru (25.29) skryto něco víc. Něco víc v tom smyslu, v němž i teorie čtyřvektorové analýzy znamená víc. Skutečnost, že elektromagnetické rovnice mohou být zapsány ve speciálním tvaru, *ktej byl navržen* pro čtyřrozměrnou geometrii Lorentzových transformací, jinými slovy jako vektorové rovnice v čtyřrozměrném prostoru. Znamená to, že jsou invariantní vzhledem k Lorentzově transformaci. Právě proto, že jsou invariantní vzhledem k této transformaci, mohou se Maxwellovy rovnice psát v krásném tvaru.

Není to žádná náhoda, že rovnice elektrodynamiky se mohou psát v krásném tvaru rovnic (25.29). Teorie relativity byla vypracována, *protože se experimentálně zjistilo, že jevy, předpovězené Maxwellovými rovnicemi, byly stejné ve všech inerciálních soustavách*. A právě studium transformačních vlastností vedlo Lorentze k objevu jeho transformace, která zanechává rovnice invariantní.

Existuje však i další důvod pro zápis rovnic tímto způsobem. Poté, kdy Einstein vyslovil domněnku, že by to tak mohlo být, bylo zjištěno, že *všechny zákony fyziky jsou invariantní vzhledem k Lorentzově transformaci*. To je princip relativity. Když jsme tedy objevili zápis, při němž je ihned po napsání zákona vidět, zda je invariantní nebo ne, můžeme při vypracování nových teorií s jistotou psát jen rovnice, které jsou konzistentní s principem relativity.

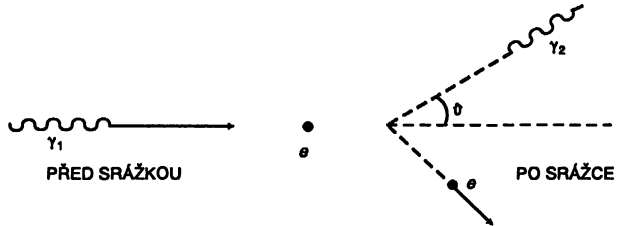
Skutečnost, že Maxwellovy rovnice vypadají jednoduše právě v tomto zápisu, není zázrak, protože tento druh zápisu byl vymyšlen pro ně. Fyzikálně zajímavé je však to, že *každý fyzikální zákon* – šíření mezonových vln nebo chování neutrin při beta rozpadu a podobně – musí být stejně invariantní při stejné transformaci. Proto polybujete-li se rovnoměrnou rychlostí v kosmické lodi, transformují se společně všechny přírodní zákony takovým způsobem, že nepozorujete žádný nový jev. Rovnice popisující svět vypadají v čtyřrozměrném zápisu jednoduše právě z toho důvodu, že princip relativity je vlastností přírody.

PŘÍKLADY A CVIČENÍ

(Jednotky měření jsou vybrány tak, že $c = 1$)

25.1 ■ Zapište ve čtyřvektorové formě výrazy $\varphi^2 - A^2$, $A \cdot J - \rho\varphi$.

25.2 ■ Comptonův jev spočívá v tom, že foton se na klidovém elektronu rozptýluje jako částice na částici. Vyjádřete energii rozptýleného fotonu pomocí energie dopadajícího fotonu a úhlu rozptylu (viz obrázek).



25.3 ■ Pozitron může vzniknout jako výsledek bombardování klidového elektronu fotonem: $\gamma + e^- \rightarrow e^- + (e^+ + e^-)$. Jaká je minimální energie fotonu pro uskutečnění tohoto procesu? Při řešení používejte podle možnosti čtyřvektory a jejich invarianty.

25.4 ■ Na klidovou částici o hmotnosti m dopadá jiná částice, která má hmotnost M a hybnost p . Srážka je dokonale nepružná a obě částice se slévají za vzniku nové částice. Jaká bude její hmotnost a hybnost? Porovnejte tento výsledek s řešením v nerelativistickém případě.

Lorentzovy transformace polí

26.1 ČTYŘPOTENCIÁL POHYBUJÍCÍHO SE NÁBOJE

26.2 POLE BODOVÉHO NÁBOJE POHYBUJÍCÍHO SE KONSTANTNÍ RYCHLOSTÍ

26.3 RELATIVISTICKÉ TRANSFORMACE POLÍ

26.4 POHYBOVÉ ROVNICE V RELATIVISTICKÉM OZNAČENÍ

V této kapitole $c = 1$

Přečtěte si znovu: kapitolu 20, díl 2, Řešení Maxwellových rovnic ve volném prostoru

26.1 ČTYŘPOTENCIÁL POHYBUJÍCÍHO SE NÁBOJE

V předcházející kapitole jsme viděli, že potenciál $A_\mu = (\varphi, \mathbf{A})$ je čtyřvektorem. Skalární potenciál φ je časovou složkou a vektorový potenciál \mathbf{A} tvoří tři prostorové složky. Použitím Lorentzovy transformace jsme také určili potenciály částice, která se pohybovala přímočaře, rovnoměrnou rychlostí. (Pomocí jiné metody jsme je našli už v kapitole 21.) Pro bodový náboj, jehož poloha v čase t je $(vt, 0, 0)$, jsou potenciály v bodě (x, y, z) takovéto:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}\left[\frac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2\right]^{1/2}} \quad A_x = \frac{qv}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}\left[\frac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2\right]^{1/2}}$$

$$A_y = A_z = 0.$$

(26.1)

v bodě (x, y, z) . Nejdříve najdeme retardovanou polohu P a příslušnou rychlost v' v tomto bodě. Pak si představíme, že náboj by se dále pohyboval touto rychlostí po dobu $(t' - t)$, takže by se dostal do myšlené polohy P_{proj} , kterou budeme nazývat projektovaná poloha, a dospěl by tam rychlostí v' . (Samozřejmě, ve skutečnosti se to neděje. Reálná poloha v čase t je P). Pak jsou potenciály v bodě (x, y, z) právě takové, jaké by nám vyšly z rovnic (26.1) pro myšlený náboj v projektované poloze P_{proj} . Chceme tím říci, že protože potenciály závisí jen na tom, co náboj dělá v retardovaném čase, budou potenciály stejné, ať už se náboj pohybuje konstantní rychlostí, nebo změnil-li svou rychlost po okamžiku t' , tj. potom, jsou-li už potenciály, které se objeví v bodě (x, y, z) , určeny.

Už jste zřejmě poznali, že v okamžiku, kdy získáme výraz pro potenciály náboje, který se pohybuje libovolným způsobem, máme kompletní elektrodynamiku; potenciály libovolného nábojového rozdělení můžeme dostat superpozicí. Všechny elektrodynamické jevy tedy můžeme obsáhnout buď Maxwellovými rovnicemi, nebo následující sérií tvrzení. (Pamatujte si je pro případ, že byste se někdy ocitli na opuštěném ostrově. Můžete z nich vše rekonstruovat. Musíte ovšem znát Lorentzovu transformaci, tu není dovoleno zapomenout nikdy. Ani na opuštěném ostrově, ani nikde jinde.)

Za prvé, A_{μ} je čtyřvektor. Za druhé, Coulombův potenciál náboje v klidu je $q/4\pi\epsilon_0 r$. Za třetí, potenciály náboje, který se pohybuje libovolným způsobem, závisí jen na rychlosti a poloze v retardovaném čase. V těchto třech tvrzeních máme všechno. Ze skutečnosti, že A_{μ} je čtyřvektor, dostaneme potenciály pro pohyb konstantní rychlostí transformací Coulombova potenciálu, který známe. Dále z posledního výroku, že potenciály závisí jen na rychlosti v retardovaném čase, můžeme najít potenciály pomocí projektovaných poloh. Není to zvláště vhodný způsob odvozování, ale někdy je zajímavé ukázat, jak lze zákony fyziky prezentovat různými způsoby.

Občas někteří povrchní lidé tvrdí, že celou elektrodynamiku lze odvodit jen z Lorentzovy transformace a z Coulombova zákona. To je úplně nesprávné. Za prvé musíme předpokládat, že existuje skalární potenciál a vektorový potenciál, které spolu tvoří čtyřvektor. To nám říká, jak se potenciály transformují. Dále, proč máme brát v úvahu jen působení v retardovaném čase? Nebo ještě lépe: Proč potenciály závisí jen na poloze a rychlosti, a ne například na zrychlení? *Pole E a B na zrychlení závisí. Pokud byste chtěli stejným způsobem argumentovat i pro pole, řekli byste, že závisí jen na poloze a rychlosti v retardovaném čase. Jenže pak by pole zrychleného náboje byla tatáž jako pole náboje v projektované poloze, což není pravda. Pole závisí nejen na poloze a rychlosti podél dráhy, ale i na zrychlení. „Velký“ výrok, že vše může být odvozeno z Lorentzovy transformace tedy obsahuje řadu dodatečných zamlčených předpokladů. (Kdykoliv se setkáte s výrokem, že velmi mnoho lze dostat z velmi malého množství předpokladů, vždy zjistíte, že to není pravda. Obvykle je v tom velký počet zamlčených předpokladů, jež, pokud se nad nimi dostatečně zamyslíte, nejsou zdaleka tak zřejmé.)*

26.2 POLE BODOVÉHO NÁBOJE POHYBUJÍCÍHO SE KONSTANTNÍ RYCHLOSTÍ

Nyní, když už známe potenciály bodového náboje, který se pohybuje konstantní rychlostí, měli bychom z praktických důvodů najít i intenzity polí. S částicemi, které se pohybují rovnoměrnou rychlostí, se setkáváme velmi často – je to například kosmické záření procházející mlžnou komorou nebo pomalu se pohybující náboj ve vodiči. Podívejme se tedy, jak vypadají pole pro různé rychlosti, dokonce i pro rychlosti blízké světelným, za předpokladu, že zrychlení je nulové. Je to zajímavá otázka.

Intenzity polí dostaneme z potenciálů obvyklým způsobem

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Nejdříve vypočteme E_z :

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}.$$

Jenže A_z je rovno nule, proto derivováním φ v rovnicích (26.1) dostaneme

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}} \frac{z}{\left[\frac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2\right]^{3/2}}. \quad (26.2)$$

Podobně pro E_y platí

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}} \frac{y}{\left[\frac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2\right]^{3/2}}. \quad (26.3)$$

S x -ovou složkou budeme mít trochu více práce. Derivace φ je komplikovanější a A_x není rovno nule. Nejdříve vypočteme

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}} \frac{\frac{(x-vt)}{1-v^2}}{\left[\frac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2\right]^{3/2}}. \quad (26.4)$$

Potom derivováním A_x podle t dostaneme

$$-\frac{\partial A_x}{\partial t} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}} \frac{-v^2 \frac{(x-vt)}{1-v^2}}{\left[\frac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2\right]^{3/2}}. \quad (26.5)$$

A nakonec, když to sečteme

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}} \frac{(x-vt)}{\left[\frac{(x-vt)^2}{1-v^2} + y^2 + z^2\right]^{3/2}}. \quad (26.6)$$

Na fyzikální podstatu \mathbf{E} se podíváme později, nejdříve najdeme \mathbf{B} . Pro složku z máme

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Jelikož A_y je rovno nule, stačí nám provést jednu derivaci. Všimněte si však, že A_x je právě $v\varphi$ a $\partial/\partial y$ výrazu $v\varphi$ je právě $-vE_y$. Proto

$$B_z = vE_y. \quad (26.7)$$

Podobně

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = v \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

a

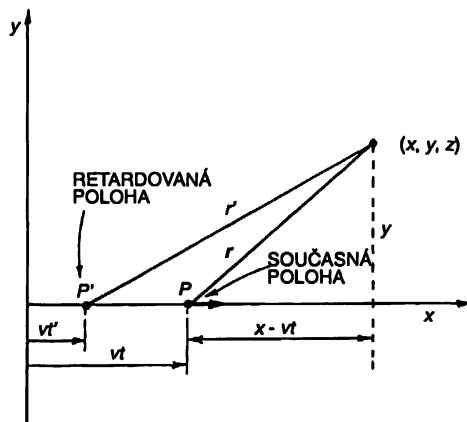
$$B_x = -vE_z. \quad (26.8)$$

Konečně B_x je rovno nule, protože i A_x a A_y jsou nulová. Magnetickou indukci můžeme snadno zapsat jako

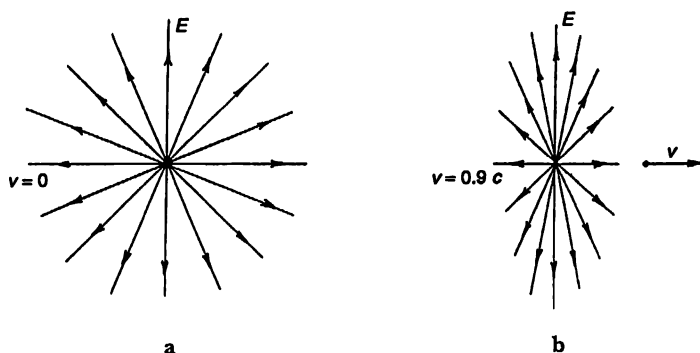
$$\mathbf{B} = \mathbf{v} \times \mathbf{E}. \quad (26.9)$$

Nyní se podívejme, jak pole vypadají. Pokusíme se nakreslit průběh intenzity elektrického pole v různých bodech v okolí náboje v daném okamžiku. Je pravda, že v určitém smyslu má působení náboje svůj původ v retardované poloze, ale protože je pohyb přesně určen, lze retardovanou polohu jednoznačně určit z polohy současné. Pro rovnoměrné rychlosti je vhodnější vyjadřovat pole vzhledem k současné poloze, protože složky pole v bodě (x, y, z) závisí jen na $(x - vt)$, y a z , což jsou složky polohového vektoru \mathbf{r} ze současné polohy P do (x, y, z) (viz obr. 26.3).

Nejdříve uvažujme bod, pro nějž $z=0$. Pak má \mathbf{E} jen složky x a y . Z rovnic (26.3) a (26.6) vyplývá, že poměr těchto složek je roven právě poměru x -ové a y -ové složky polohového vektoru. To znamená, že \mathbf{E} má stejný směr jako \mathbf{r} , jak je znázorněno na obr. 26.3. Jelikož E_z je úměrné z , platí tento výsledek i pro tři rozměry. Stručně řečeno, intenzita elektrického pole je radiální vzhledem k náboji a siločáry vycházejí přímo z náboje právě tak jako v případě náboje v klidu. Je zřejmé, že intenzita pole není přesně taková jako v případě nehybného náboje, protože navíc jsou tu faktory $(1 - v^2)$. Lze však ukázat něco velmi zajímavého. Celý rozdíl je v tom, že jsme jakoby zapsali Coulombův zákon ve zvláštních souřadnicích se souřadnicí x zmenšenou faktorem $\sqrt{1 - v^2}$. Provedeme-li to, siločáry před a za nábojem se nám navzájem rozestupují a po stranách se zhušťují, jak vidíme na obr. 26.4.



Obr. 26.3. Pro náboj pohybující se konstantní rychlostí má elektrické pole směr polohového vektoru vzhledem k současné poloze náboje



Obr. 26.4. Elektrické pole náboje pohybujícího se konstantní rychlostí $v=0,9c$ (obr. b), v porovnání s polem náboje v klidu (obr. a)

Vezmeme-li v úvahu známý vztah mezi hustotou siločar a velikostí E , zjistíme, že intenzita pole je větší po stranách a menší před a za nábojem, což je právě to, co nám říkají rovnice. Podívejme se nejdříve na intenzitu pole ve směru kolmém na směr pohybu, tj. pro $(x - vt) = 0$. Vzdálenost od náboje je $y^2 + z^2$. Celková hodnota intenzity pole je pak $\sqrt{E_y^2 + E_z^2}$, a to je rovno

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}} \frac{1}{y^2 + z^2}. \quad (26.10)$$

Intenzita pole je nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti – přesně jako Coulombovo pole násobené konstantou $1/\sqrt{1-v^2}$, která je vždy větší než jedna. Proto je elektrické pole *po stranách* pohybujícího se náboje silnější, než udává Coulombův zákon. Ve skutečnosti je toto zvětšení v porovnání s Coulombovým potenciálem rovno poměru energie částice a její klidové hmotnosti.

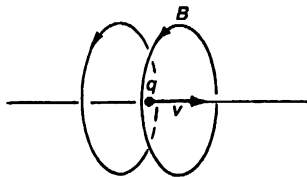
Před (a za) nábojem jsou y a z rovny nule, a proto

$$E = E_x = \frac{q(1-v^2)}{4\pi\epsilon_0(x-vt)^2}. \quad (26.11)$$

Intenzita pole je opět nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti od náboje, ale nyní je zmenšena násobením faktorem $(1-v^2)$ souhlasně s obrázkem a siločárami. Je-li v/c malé, je v^2/c^2 ještě menší, efekt související s členem $(1-v^2)$ je velmi malý a dostáváme opět Coulombův zákon. Pohybuje-li se částice rychlostí blízkou rychlosti světla, pole před ní prudce klesne a pole po stranách nesmírně narůstá.

Naše výsledky o elektrickém poli náboje bychom mohli prezentovat i následujícím způsobem: Předpokládejme, že máme na kousku papíru nakreslené siločáry náboje v klidu a tento obrázek se začne pohybovat rychlostí v . V důsledku Lorentzovy kontrakce se, samozřejmě, celý obrázek zkrátí, jakoby jednotlivá zrnka uhlíku na papíru byla na jiném místě. Zázrak je v tom, že siločáry na letícím obrázku nadále zobrazují siločáry bodového náboje. Kontrakce je zhušťuje po stranách a rozšiřuje před a za nábojem přesně tak, jak to má být. Kdysi jsme zdůrazňovali, že siločáry nejsou skutečné, že je to jen jeden ze způsobů zobrazování pole. Zde se však zdají být téměř reálné. V tomto speciálním případě, budete-li si mylně představovat, že siločáry v prostoru skutečně

někde existují, a budete je transformovat, dostanete správné intenzity polí. Tím se, samozřejmě, siločáry nestávají o nic reálnějšími. Chcete-li si připomenout, že opravdu nejsou skutečné, stačí si vzpomenout na elektrické pole vytvořené nábojem a magnetem společně. Když se magnet pohybuje, vznikají nová elektrická pole a celý krásný obraz se nám pokazí. Takže pěkný nápad s kontrahujícím obrázkem obecně neplatí. Je to však šikovný způsob, jak si pamatovat, jak vypadá pole elektrického náboje, který se pohybuje velkou rychlostí.



Obr. 26.5. Magnetické pole v okolí pohybujícího se náboje je $\mathbf{v} \times \mathbf{E}$ (porovnej s obr. 26.4).

Magnetické pole je $\mathbf{v} \times \mathbf{E}$ (z rovnice (26.9)). Provedete-li vektorový součin rychlosti a radiálního pole \mathbf{E} , dostanete \mathbf{B} , jehož siločáry tvoří kružnice kolem směru pohybu tak, jak je znázorněno na obr. 26.5. Vráťme-li nyní do rovnice všechna c , vidíme, že jsme dostali tentýž výsledek, jaký jsme dostali kdysi pro náboje pohybující se malou rychlostí. Dobrý způsob, jak zjistit, kam se mají „céčka“ dosadit, je odvolat se na výraz pro sílu:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Vidíme, že rychlost krát magnetická indukce má tentýž rozměr jako intenzita elektrického pole. Proto pravá strana rovnice (26.9) musí obsahovat faktor $1/c^2$:

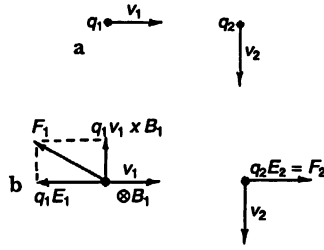
$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2}. \quad (26.12)$$

Pro náboj, který se pohybuje pomalu ($v \ll c$), můžeme za \mathbf{E} dosadit Coulombovo pole. Potom

$$\mathbf{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (26.13)$$

Tento vzorec odpovídá rovnicím pro magnetické pole proudu, které jsme našli v článku 14.7.

Mimochodem, mám pro vás zajímavé téma na přemýšlení. (Později se k němu opět vrátíme.) Představte si dva elektrony s navzájem kolmými rychlostmi. Jejich dráhy se protínají, ale ke srážce nedojde, neboť elektrony se navzájem minou. V určitém okamžiku bude jejich vzájemná poloha taková, jakou vidíme na obr. 26.6a. Všimněme si sil, jimiž působí q_2 na q_1 a opačně. Na q_2 působí ze strany q_1 jen elektrická síla, protože q_1 nevytváří žádné magnetické pole podél své dráhy. Ale na q_1 působí kromě elektrického pole ještě magnetické pole, jelikož q_1 se pohybuje v magnetickém poli, které pochází od q_2 . Síly jsou zakresleny na obr. 26.6b. Elektrické síly působící na q_1 a q_2 mají stejnou velikost a opačné znaménko. Ale na q_1 působí boční (magnetická) síla, zatímco na q_2 žádná taková síla nepůsobí. Znamená to, že akce není rovna reakci? S odpovědí na tuto otázku se trpte sami.



Obr. 26.6. Síly působící mezi dvěma pohybujícími se náboji nejsou vždy stejně velké a opačné: Ukazuje se, že akce není vždy rovna reakci.

26.3 RELATIVISTICKÉ TRANSFORMACE POLÍ

V předcházejícím článku jsme určili elektrická a magnetická pole z transformovaných potenciálů. Pole jsou důležitá i přes argumenty, které jsme uvedli ve prospěch reálnosti a fyzikálního významu potenciálů dříve. Intenzity polí jsou taktéž reálné. Z mnoha důvodů by bylo výhodné mít návod k počítání intenzit polí v pohybující se soustavě. Známe transformační zákony pro φ a A , protože A_μ je čtyřvektor. Nyní bychom chtěli znát transformační zákony pro E a B . Budeme-li znát E a B v jedné soustavě, jak budou vypadat v druhé soustavě, která se vzhledem k první pohybuje? Taková transformace by se nám hodila. Samozřejmě, vždy bychom to uměli udělat pomocí potenciálů, ale někdy by se nám hodilo, kdybychom uměli intenzity polí transformovat přímo. Ukážeme si, jak na to.

Jak lze najít transformační zákony pro intenzitu polí? Známe transformační zákony pro φ a A a víme, jak se intenzity polí pomocí φ a A vyjadřují. Najít transformace pro B a E by proto nemělo být těžké. (Možná, že si myslíte, že ke každému vektoru lze najít něco dalšího, co z něj udělá čtyřvektor – že k E přidáme „něco“ dalšího, a to bude jeho čtvrtá komponenta. A podobně B . Jenže to tak není. Je to úplně jinak, než byste očekávali.) Začneme s magnetickým polem B , které, jak víme je rovno $\nabla \times A$. Víme, že složky x , y a z z vektorového potenciálu tvoří jen část čtyřvektoru – je tu ještě také složka t . Zkusme zjistit, co se stane, zaměníme-li y za t nebo z za t , nebo něco v tom smyslu.

Nejdříve si všimněme, jak vypadá $\nabla \times A$, když jej rozepíšeme na složky

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \quad (26.14)$$

Ve výrazu pro x -ovou složku B vystupují pouze složky vektorového potenciálu z a y . Takovou kombinaci složek budeme nazývat kombinací zy , zkráceně F_{zy} . Znamená to prostě, že

$$F_{zy} \equiv \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}. \quad (26.15)$$

Analogicky B_y je rovno nějaké podobné kombinaci, ale tentokrát je to kombinace xz ; B_z je samozřejmě rovno kombinaci yx . Máme tedy

$$B_x = F_{zy}, \quad B_y = F_{xz}, \quad B_z = F_{yx}. \quad (26.16)$$

Dále se podíváme, co bychom dostali, kdybychom se pokusili zkonstruovat i kombinace typu t jako F_{xt} a F_{tx} (protože příroda by měla být pěkná a symetrická vzhledem k x, y, z a t)? Čemu je například rovno F_{tz} ? Zřejmě je to

$$\frac{\partial A_t}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}.$$

Ale vzpomeňme si, že $A_t = \varphi$, proto lze totéž psát jako

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}.$$

S něčím takovým jsme se už setkali. Je to z -ová složka E . Ne docela, protože znaménko je jiné. Zapomněli jsme však, že do čtyřrozměrného gradientu vstupuje derivace ts opačným znaménkem než derivace podle x, y, z . Ve skutečnosti bychom měli brát rozumnější zobecnění pro F_{tz} :

$$F_{tz} = \frac{\partial A_t}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial t}. \quad (26.17)$$

Pak je to přesně rovno $-E_z$. Stejně můžeme zkonstruovat F_{tx} a F_{ty} a pro všechna tři vyjádření dostaneme

$$F_{tx} = -E_x, \quad F_{ty} = -E_y, \quad F_{tz} = -E_z. \quad (26.18)$$

Co se stane, jsou-li oba indexy t ? Nebo jsou-li oba x ? Dostaneme výrazy typu

$$F_{tt} = \frac{\partial A_t}{\partial t} - \frac{\partial A_t}{\partial t}$$

a

$$F_{xx} = \frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial x},$$

kteřé jsou ovšem rovny nule.

Máme tedy šest nenulových kombinací F . Šest dalších dostaneme, když zaměníme indexy, ale to nám ve skutečnosti nedává nic nového, protože

$$F_{xy} = -F_{yx}$$

atd. Proto ze šestnácti možných kombinací dvojic indexů, které nabývají čtyř hodnot, dostáváme jen šest různých fyzikálních objektů, které představují složky vektorů B a E .

K vyjádření obecného tvaru F budeme používat indexy μ a ν , které nabývají hodnot 0, 1, 2 nebo 3, což v naše čtyřvektorovém označení znamená t, x, y, z . Vše bude v soulase s naším čtyřvektorovým označením, definujeme-li $F_{\mu\nu}$ jako

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu, \quad (26.19)$$

máme-li na paměti, že $\nabla_\mu = (\partial/\partial t, -\partial/\partial x, -\partial/\partial y, -\partial/\partial z)$ a $A_\mu = (\varphi, A_x, A_y, A_z)$.

Z toho, co jsme zjistili, nám vyplývá, že v přírodě máme šest veličin, které patří k sobě – představují různé stránky téže věci. Elektrická a magnetická pole, jež jsme považovali za oddělené vektory v našem světě malých rychlostí (kde nás velikost rychlosti světla netrápí), nejsou vektory v čtyřrozměrném prostoru. Jsou částí něčeho nového. Naše fyzikální „pole“ je ve skutečnosti šesti-komponentový objekt $F_{\mu\nu}$. Tak se na něj musíme dívat v relativistickém chápání. Přehled složek $F_{\mu\nu}$ je uveden v tab. 26.1.

Tabulka 26.1 Složky $F_{\mu\nu}$

$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$	
$F_{\mu\mu} = 0$	
$F_{xy} = -B_z$	$F_{xt} = E_x$
$F_{yz} = -B_x$	$F_{yt} = E_y$
$F_{zx} = -B_y$	$F_{zt} = E_z$

Vidíme, že to, co jsme zde právě udělali, je vlastně zobecnění vektorového součinu. Vycházeli jsme z operátoru rotace a ze skutečnosti, že transformační vlastnosti operátoru jsou tytéž jako transformační vlastnosti dvou vektorů – obyčejného trojrozměrného vektoru A a gradientového operátoru, který, jak víme, se také chová jako vektor. Na chvíli se zastavme u obyčejného vektorového součinu v třech rozměrech, například u momentu hybnosti částice. Když se nějaký objekt pohybuje v rovině, hraje důležitou úlohu veličina $(xv_y - yv_x)$. Pro pohyb ve třech rozměrech máme tři takové důležité veličiny a nazýváme je moment hybnosti

$$L_{xy} = m(xv_y - yv_x), \quad L_{yz} = m(yv_z - zv_y), \quad L_{zx} = m(zv_x - xv_z).$$

Ve 20. kapitole 1. dílu jsme objevili (ačkoliv jste na to možná už zapomněli) něco podivuhodného: tyto tři veličiny jsou složkami vektoru. Přišli jsme na to pomocí umělého pravidla pravé ruky. Měli jsme štěstí, a to proto, že L_{ij} (kde i a j jsou rovny x , y nebo z) bylo antisymetrickým objektem

$$L_{ij} = -L_{ji} \quad L_{ii} = 0.$$

Z devíti možných veličin jsou jen tři nezávislé. Ukazuje se, že změníme-li souřadnicovou soustavu, transformují se tyto tři veličiny přesně tak jako složky vektoru.

Stejně tak i plošný element lze definovat pomocí vektoru. Plošný element má dvě části, dx a dy , které můžeme reprezentovat vektorem $d\mathbf{S}$ kolmým na povrch. Ale ve čtyřech rozměrech to provést nedokážeme. Co je „kolmice“ k $dx dy$? Je ve směru z nebo ve směru t ?

Pro tři rozměry dostáváme šťastnou náhodou kombinací dvou vektorů typu L_{ij} opět jiný vektor, protože dostaneme jen tři členy a ty se transformují jako složky vektoru. Ale ve čtyřech rozměrech je to zjevně nemožné, protože tam máme šest nezávislých členů a nelze reprezentovat šest věcí věcmi čtyřmi.

Ve třech rozměrech také existují kombinace vektorů, které nelze reprezentovat vektory. Předpokládejme, že máme dva vektory $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ a provedeme různé kombinace jejich složek jako $a_x b_x$, $a_x b_y$ apod. Dostaneme devět možných veličin:

$$\begin{array}{ccc} a_x b_x, & a_x b_y, & a_x b_z \\ a_y b_x, & a_y b_y, & a_y b_z \\ a_z b_x, & a_z b_y, & a_z b_z. \end{array}$$

Tyto veličiny nazvěme T_{ij} .

Přejdeme-li nyní do pootočené soustavy (například otočené kolem osy z), změní se složky vektorů \mathbf{a} a \mathbf{b} . V naší soustavě bude například a_x nahrazené složkou

$$a'_x = a_x \cos \vartheta + a_y \sin \vartheta$$

a b_y složkou

$$b'_y = b_y \cos \vartheta - b_x \sin \vartheta.$$

A podobně pro jiné složky. Všech devět složek naší součinnové veličiny T_{ij} , kterou jsme zavedli, se, samozřejmě, změní také. Například $T_{xy} = a_x b_y$ se změní na

$$T'_{xy} = a_x b_x (\cos^2 \vartheta) - a_x b_x (\cos \vartheta \sin \vartheta) + a_y b_y (\sin \vartheta \cos \vartheta) - a_y b_x (\sin^2 \vartheta)$$

neboli

$$T'_{xy} = T_{xy} \cos^2 \vartheta - T_{xx} \cos \vartheta \sin \vartheta + T_{yy} \sin \vartheta \cos \vartheta - T_{yx} \sin^2 \vartheta.$$

Každá složka T_{ij} je lineární kombinací složek T_{ij} .

Objevíli jsme tedy, že je možné získat nejen „vektorový součin“ typu $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, jehož tři komponenty se transformují jako vektor. Uměle lze vyrobit jiný druh „součinu“ dvou vektorů T_{ij} s devíti složkami. Ty se při rotaci transformují složitými pravidly, která umíme určit. Takový objekt, který potřebuje ke svému popisu dva indexy místo jednoho, se nazývá *tenzor*. Je to tenzor druhého řádu, protože podobnou hru bychom mohli hrát se třemi vektory a dostat tenzor třetího řádu, nebo se čtyřmi vektory a dostat tenzor čtvrtého řádu atd. Tenzorem prvního řádu je vektor.

Pointa toho všeho spočívá v tom, že naše elektromagnetická veličina $F_{\mu\nu}$ je také tenzorem druhého řádu, neboť má dva indexy. Je to však tenzor ve čtyřech rozměrech. Transformuje se speciálním způsobem, který hned uvedeme – je to právě způsob, jakým se transformuje součin dvou vektorů. $F_{\mu\nu}$ má tu vlastnost, že když zaměníme jeho indexy, změní se znaménko. Jde o speciální případ – *antisymetrický tenzor*. Můžeme tedy říci, že elektrická i magnetická pole jsou součástí antisymetrického tenzoru druhého řádu ve čtyřech rozměrech.

Už jsme prošli pěkný kus cesty. Ještě si pamatujete, jak jsme začali definicí rychlosti? A dnes už hovoříme o antisymetrickém tenzoru druhého řádu ve čtyřech rozměrech.

Nyní potřebujeme najít zákony transformace $F_{\mu\nu}$. Není to vůbec těžké, jen pracné – mozek se moc namáhat nemusí, ale nadřeme se dost. To, co chceme najít, je Lorentzova transformace výrazu $\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$. Jelikož ∇_μ je jen speciální případ vektoru, budeme pracovat s obecnou antisymetrickou kombinací vektorů, kterou nazveme $G_{\mu\nu}$:

$$G_{\mu\nu} = a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu. \quad (26.20)$$

(V našem případě místo a_μ píšeme ∇_μ a b_μ je nahrazeno potenciálem A_μ .) Složky a_μ a b_μ jsou transformovány pomocí Lorentzových vzorců takto:

$$\begin{aligned}
 a'_t &= \frac{a_t - v a_x}{\sqrt{1 - v^2}}, & b'_t &= \frac{b_t - v b_x}{\sqrt{1 - v^2}} \\
 a'_x &= \frac{a_x - v a_t}{\sqrt{1 - v^2}}, & b'_x &= \frac{b_x - v b_t}{\sqrt{1 - v^2}} \\
 a'_y &= a_y, & b'_y &= b_y \\
 a'_z &= a_z, & b'_z &= b_z.
 \end{aligned} \tag{26.21}$$

Nyní transformujme složky $G_{\mu\nu}$. Začneme s G_{tx} :

$$\begin{aligned}
 G'_{tx} &= a'_t b'_x - a'_x b'_t \\
 &= \left(\frac{a_t - v a_x}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \left(\frac{b_x - v b_t}{\sqrt{1 - v^2}} \right) - \left(\frac{a_x - v a_t}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \left(\frac{b_t - v b_x}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \\
 &= a_t b_x - a_x b_t
 \end{aligned}$$

Ale to je právě G_{tx} . Dostali jsme tedy jednoduchý výsledek

$$G'_{tx} = G_{tx}.$$

Transformujme ještě jednu složku:

$$G'_{ty} = \frac{a_t - v a_x}{\sqrt{1 - v^2}} b_y - a_y \frac{b_t - v b_x}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{(a_t b_y - a_y b_t) - v(a_x b_y - a_y b_x)}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Dostáváme tedy

$$G'_{ty} = \frac{G_{ty} - v G_{xy}}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

A stejným způsobem, pochopitelně, dostaneme

$$G'_{tz} = \frac{G_{tz} - v G_{xz}}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Je jasné, jak bude vypadat zbytek. Udělejme si tabulku všech šesti členů. Nyní je můžeme psát přímo pro veličiny $F_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
 F'_{tx} &= F_{tx}, & F'_{xy} &= \frac{F_{xy} - vF_{ty}}{\sqrt{1-v^2}} \\
 F'_{ty} &= \frac{F_{ty} - vF_{xy}}{\sqrt{1-v^2}}, & F'_{yx} &= F_{yz} \\
 F'_{tz} &= \frac{F_{tz} - vF_{xz}}{\sqrt{1-v^2}}, & F'_{zx} &= \frac{F_{zx} - vF_{zt}}{\sqrt{1-v^2}}.
 \end{aligned} \tag{26.22}$$

Samozřejmě, stále platí $F'_{\nu\nu} = -F'_{\nu\nu}$ a $F'_{\mu\mu} = 0$.

Máme tedy transformace intenzit elektrického a magnetického pole. Stačí jen podívat se do *tab. 26.1* a zjistit, jak se $F'_{\mu\nu}$ vyjadřuje pomocí E a B . Je to jen otázka odvozování. Abychom viděli, jak to vypadá v obvyklých symbolech, přepíšeme naše transformace složek do *tab. 26.2*. Rovnice v *tab. 26.2* nám říkají, jak se změň E a B , přejdme-li z jedné inerciální soustavy do druhé. Známe-li E a B v jedné soustavě, můžeme zjistit, čemu jsou rovna v druhé, jež se pohybuje rychlostí v .

Tabulka 26.2 Lorentzova transformace elektrických a magnetických polí ($c = 1$)

$E'_x = E_x$	$B'_x = B_x$
$E'_y = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1-v^2}}$	$B'_y = \frac{B_y + vE_z}{\sqrt{1-v^2}}$
$E'_z = \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1-v^2}}$	$B'_z = \frac{B_z - vE_y}{\sqrt{1-v^2}}$

Tyto rovnice lze napsat v jednodušší formě, kterou si snáze zapamatujeme. Všimněme si, že protože v je ve směru osy x , jsou všechny členy, které obsahují v , složkami vektorových součinů $v \times E$ a $v \times B$. Naše transformace tedy můžeme přepsat na tvar, jaký je v *tab. 26.3*

Tabulka 26.3 Jiná možná forma transformace polí ($c = 1$)

$E'_x = E_x$	$B'_x = B_x$
$E'_y = \frac{(E + v \times B)_y}{\sqrt{1-v^2}}$	$B'_y = \frac{(B - v \times E)_y}{\sqrt{1-v^2}}$
$E'_z = \frac{(E + v \times B)_z}{\sqrt{1-v^2}}$	$B'_z = \frac{(B - v \times E)_z}{\sqrt{1-v^2}}$

Nyní si snáze zapamatujeme, jak se jednotlivé složky transformují. Ve skutečnosti lze transformace psát ještě jednodušeji, definujeme-li průměty pole do směru x jako „paralelní“ složky E_{\parallel} a B_{\parallel} (protože jsou rovnoběžné s relativní rychlostí soustav S a S') a celkovou příčnou složku (vektorový součet složek y a z) jako kolmé složky E_{\perp} a B_{\perp} . Dostaneme rovnice uvedené v tab. 26.4. (Opět jsme se vrátili k „céčkům“, protože později budeme takovou formu potřebovat.)

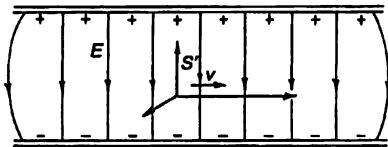
Tabulka 26.4 Další forma Lorentzovy transformace E a B

$$\begin{array}{ll}
 E'_{\parallel} = E_{\parallel} & B'_{\parallel} = B_{\parallel} \\
 E'_{\perp} = \frac{(E + v \times B)_{\perp}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} & B'_{\perp} = \frac{\left(B - \frac{v \times E}{c^2} \right)_{\perp}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}
 \end{array}$$

Transformace pole nám poskytují další možnost řešení některých úloh, které jsme řešili předtím – například nalezení polí pohybujícího se náboje. Předtím jsme počítali pole pomocí derivace potenciálů. Ale nyní to můžeme provést transformací Coulombova pole. Bodový náboj v klidové soustavě S budí jen izotropní radiální pole E . V soustavě S' se nám bude zdát, že náboj má rychlost u , pohybuje-li se S' vzhledem k S rychlostí $v = -u$.

Sami dokážete, že transformace podle tab. 26.3 a 26.4 dají tatáž elektrická a magnetická pole, jaká jsme dostali v článku 26.2.

Transformace podle tab. 26.2 nám dává zajímavou a jednoduchou odpověď na to, co uvidíme, budeme-li se pohybovat vzhledem k libovolné soustavě nehybných nábojů. Například předpokládejme, že chceme vědět, jaká jsou pole v naší soustavě S' , pohybuje-li se mezi deskami kondenzátoru v podélném směru, jak je to ukázáno na obr. 26.7. (Je to, samozřejmě totéž, jako kdybychom řekli, že nabitý kondenzátor se pohybuje vzhledem k nám.) Co uvidíme? V tomto případě je transformace jednoduchá, protože pole B je v původní soustavě rovno nule. Nejdříve předpokládejme, že náš pohyb je kolmý na E . Pak dostaneme, že $E' = E / \sqrt{1 - v^2/c^2}$, tj. pole je stále transverzální. Navíc zjistíme, že magnetické pole $B' = -v \times E' / c^2$. (Faktor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ se ve výrazu pro B' neobjevuje. Je to tím, že B' vyjadřujeme pomocí E' , a ne pomocí E .) Můžeme tedy říci, že při pohybu kolmém na směr statického elektrického pole pozorujeme zeslabené E a navíc ještě příčné B . Kdyby náš pohyb nebyl kolmý na E , rozložili bychom si E na E_{\parallel} a E_{\perp} . Rovnoběžná část by se nezměnila, $E'_{\parallel} = E_{\parallel}$, a kolmá složka by se změnila tak, jak jsme právě popsali.



Obr. 26.7. Souřadnicová soustava S' pohybující se v homogenním elektrostatickém poli

Vezměme opačný případ a představme si, že se pohybuje v čistě statickém magnetickém poli. Tentokrát bychom pozorovali elektrické pole E' rovno $v \times B'$ a magnetické pole změněné

faktorem $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (za předpokladu, že jde o příčné pole). Je-li rychlost v mnohem menší než c , můžeme změnu magnetického pole zanedbat a hlavním efektem bude objevení elektrického pole. Jako příklad takového efektu budeme uvažovat svého času známý problém určování rychlosti letadla. Dnes už tolik známý není, neboť pro určování rychlosti používáme odraz radarového signálu od Země, ale dlouhá léta bylo velkým problémem určit rychlost letadla ve špatném počasí. Nevěděli jste na zem a nevěděli jste, kudy letíte. A vědět, jak rychle se vzhledem k zemi pohybujete, bylo velmi důležité. Jak to lze provést, aniž bychom viděli zem? Ti, co znají transformační vzorce, přišli na myšlenku využít skutečnosti, že letadlo se pohybuje v magnetickém poli Země. Předpokládejme, že letadlo se pohybuje v oblasti, v níž magnetické pole přibližně známe. Uvažujeme jednoduchý případ, kdy je magnetické pole vertikální. Uctíme-li polem horizontální rychlostí v , podle našeho vzorce bychom měli pozorovat elektrické pole, které je $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, tj. je kolmé na směr pohybu. Zavěsíme-li napříč letadlem izolovaný vodič, bude elektrické pole indukovat na koncích vodiče náboje. To není nic nového. Z hlediska někoho, kdo je na zemi, se vodič pohybuje v poli a v důsledku síly $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ se náboje pohybují ke koncům vodiče. Transformační rovnice nám říkají totéž, jen jiným způsobem. (Skutečnost, že jednu věc lze říci několika způsoby, neznamená, že jeden způsob je lepší než druhý. Známe tolik různých metod a pomůcek, že tentýž výsledek můžeme dostat i 65 různými způsoby.)

Chceme-li tedy změřit v , stačí nám změřit napětí mezi konci vodiče. Voltmetrem to udělat nemůžeme, protože totéž pole působí i na vodiče uvnitř voltmetru, ale lze najít způsoby, jak taková pole změřit. O některých z nich jsme hovořili v kapitole 9, když jsme probírali atmosférickou elektrinu. Rychlost letadla by se měla dát změřit.

Ve skutečnosti se však tento důležitý problém nikdy neřešil tímto způsobem. Je to z toho důvodu, že elektrické pole, které takto vzniká, má velikost řádově několik milivoltů na metr. Takové pole by bylo možné změřit, ale problém je v tom, že toto pole se, bohužel, ničím neliší od jiného libovolného elektrického pole. Pole produkované pohybem v magnetickém poli nelze odlišit od nějakého elektrického pole, které už ve vzduchu bylo z jiných příčin (například pole elektrostatických nábojů ve vzduchu nebo v oblacích). V 9. kapitole jsme tvrdili, že obvykle nad povrchem Země existují elektrická pole, jejichž intenzita je přibližně 100 voltů na metr. Navíc jsou velmi nepravidelná. Proto letadlo při svém letu vzduchem vidí fluktuace atmosférických polí, která jsou obrovská v porovnání s malíčkými poli pocházejícími z členu $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Z čistě praktických důvodů tedy nelze rychlost letadla změřit, pokud vycházíme z jeho pohybu v magnetickém poli Země.

26.4 POHYBOVÉ ROVNICE V RELATIVISTICKÉM ZNAČENÍ³⁷⁾

Nalezení elektrických a magnetických polí z Maxwellových rovnic ještě nic neznamená, pokud nevíme, jak se pole chovají. Možná, že si vzpomínáte, že pole potřebujeme k určení sil, které působí na náboje, a že tyto síly určují pohyb náboje. Proto vztah mezi pohybem nábojů a silami je součástí elektrodynamiky.

Na náboj v polích \mathbf{E} a \mathbf{B} působí síla

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (26.23)$$

Pro malé rychlosti je tato síla rovna hmotnosti krát zrychlení, ale přesný zákon platný pro

³⁷⁾ V této části opět dosadíme všechna c .

libovolné rychlosti říká, že síla je rovna $d\mathbf{p}/dt$. Přšeme-li $\mathbf{p} = m_0 \mathbf{v} / \sqrt{1 - v^2/c^2}$, dostaneme relativisticky přesnou pohybovou rovnici

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (26.24)$$

Podívejme se na tuto rovnici z hlediska teorie relativity. Jelikož máme Maxwellovy rovnice napsány v relativistickém tvaru, bylo by zajímavé vidět, jak rovnice pohybu vypadají v relativistickém zápisu. Podíváme se, zda lze rovnici (26.24) přepsat na čtyřvektorový tvar.

Víme, že hybnost je částí čtyřvektoru \mathbf{p}_μ , jehož časovou složkou je energie $m_0 c \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Napadne nás tedy, že levou stranu rovnice (26.24) bychom mohli nahradit $d\mathbf{p}_\mu/dt$. Pak nám zbývá jen najít čtvrtou složku F . Ta by měla být rovna změně energie nebo rychlosti konání práce, tj. $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$. Pak bychom pravou stranu rovnice (26.24) psali jako čtyřvektor $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}, F_x, F_y, F_z)$. Jenže to není čtyřvektor.

Časová derivace čtyřvektoru už není čtyřvektorem, neboť d/dt vyžaduje nějakou speciální soustavu, v níž měříme t . Tyto problémy jsme už jednou měli, když jsme chtěli z rychlosti \mathbf{v} udělat čtyřvektor. Náš první odhad byl, že časová složka bude $c dt/dt = c$. Ale veličiny

$$\left(c, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \quad (26.25)$$

nejsou složkami čtyřvektoru. Mohly by být, kdybychom každou složku vynásobili $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. „Čtyřrychlost“ u_μ je čtyřvektor

$$u_\mu = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \quad (26.26)$$

Hlavní trik, jak se zdá, je v tom, že chceme-li z derivací udělat čtyřvektor, musíme d/dt vynásobit výrazem $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Náš druhý odhad je, že

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} (\mathbf{p}_\mu) \quad (26.27)$$

by měl být čtyřvektorem. Ale co je v ? Je to rychlost částice, ne souřadnicové soustavy! Pak je veličina f_μ definovaná jako

$$f_\mu = \left(\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{F}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \quad (26.28)$$

zobecněním síly na čtyřrozměrný prostor a budeme ji nazývat „čtyřsilou“. Je to skutečně čtyřvektor a jeho prostorové složky jsou složkami vektoru $F/\sqrt{1-v^2/c^2}$, a ne F .

Zůstává otázkou, proč je f_μ čtyřvektorem. Nejdříve bychom měli lépe porozumět našemu faktoru $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$. Jelikož se s ním setkáváme už podruhé, je načase zjistit, proč d/dt vždy vystupuje s tímtož faktorem. Odpověď je následující: Hledáme-li časovou derivaci nějaké funkce x , počítáme přírůstek Δx na malém intervalu Δt proměnné t . Ale v jiné soustavě může interval Δt odpovídat změně jak v t' , tak i v x' a pokud bychom měnili jen t' , byla by změna v x jiná. Pro naše derivování potřebujeme najít proměnnou, která by byla mfrou „intervalu“ v časoprostoru a byla by stejná ve všech souřadnicových soustavách. Pohybuje-li se částice v čtyřprostoru, mění se Δt , Δx , Δy , Δz . Můžeme z nich vyrobit invariantní interval? Jsou to složky přírůstků čtyřvektoru $x_\mu = (ct, x, y, z)$, proto definujeme-li veličinu Δs pomocí

$$(\Delta s)^2 = \frac{1}{c^2} \Delta x_\mu \Delta x_\mu = \frac{1}{c^2} (c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2) \quad (26.29)$$

(což je čtyřrozměrný skalární součin), dostáváme vhodný čtyřskalár jako mfrou čtyřrozměrného intervalu. Pomocí Δs nebo jeho limity ds můžeme definovat parametr $s = \int ds$. Derivace podle s , d/ds bude vhodným čtyřrozměrným operátorem, neboť je invariantem vzhledem k Lorentzově transformaci.

Vztah mezi ds a dt pro pohybující se částici lze snadno najít. Pro pohyb bodové částice platí

$$dx = v_x dt, \quad dy = v_y dt, \quad dz = v_z dt \quad (26.30)$$

a

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dt^2}{c^2}\right) (c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2)} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (26.31)$$

Proto operátor

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt}$$

je invariantní operátor. Působíme-li jím na libovolný čtyřvektor, dostaneme zase čtyřvektor. Působíme-li jím například na (ct, x, y, z) , dostaneme čtyřrychlost u_μ :

$$\frac{dx_\mu}{ds} = u_\mu.$$

Nyní vidíme, proč faktor $\sqrt{1-v^2/c^2}$ dává věci do pořádku.

Invariantní proměnná s je užitečná fyzikální veličina. Nazývá se vlastní čas částice podél její dráhy, protože v soustavě, která se pohybuje spolu s částicí, je ds rovno časovému intervalu v libovolném okamžiku. (V takové soustavě $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$ a $\Delta s = \Delta t$.) Představte-li si hodiny, které nejsou ovlivněny zrychlením, a pohybují-li se spolu s částicí, budou vždy ukazovat čas s .

Vraťme se nyní k našim rovnicím a zapišme Newtonův zákon (opravený Einsteinem) ve tvaru

$$\frac{dp_\mu}{ds} = f_\mu, \quad (26.32)$$

kde f_μ je určeno rovnicí (26.28). I hybnost p_μ můžeme psát jako

$$p_\mu = m_0 u_\mu = m_0 \frac{dx_\mu}{ds}, \quad (26.33)$$

kde souřadnice $x_\mu = (ct, x, y, z)$ popisují trajektorii částice. Nakonec nám čtyřrozměrné značení dává jednoduchou formu pohybových rovnic

$$f_\mu = m_0 \frac{d^2 x_\mu}{ds^2}, \quad (26.34)$$

kteřá připomíná rovnici $F = ma$. Je důležité si všimnout, že rovnice (26.34) *není* tatáž jako $F = ma$, protože čtyřvektorový vzorec (26.34) v sobě obsahuje relativistickou mechaniku a ta je pro velké rychlosti jiná než newtonovská. Není to jako s Maxwellovými rovnicemi, které jsme mohli přepsat na relativistický tvar jen změnou označení *aniž bychom jen trochu změnili jejich smysl*.

Vraťme se nyní k rovnici (26.24) a podívejme se, jak by se dala její pravá strana psát ve čtyřvektorovém značení. Tři složky F vydělené výrazem $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ jsou složkami f_μ , a proto

$$f_x = \frac{q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = q \left[\frac{E_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{v_y B_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v_z B_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right]. \quad (26.35)$$

Nyní musíme všechny veličiny zapsat v relativistickém tvaru. V první řadě $c/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, $v_y/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ a $v_z/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ jsou komponenty u_μ a z čtyřrychlosti u_μ . Složky vektorů \mathbf{E} a \mathbf{B} jsou složkami tenzoru druhého řádu polí $F_{\mu\nu}$. V tab. 26.1 si najdeme složky $F_{\mu\nu}$, které odpovídají E_x , B_z a B_y , a dostaneme

$$f_x = q(u_t F_{xt} - u_y F_{xy} - u_z F_{xz}).$$

Začíná to vypadat zajímavě. V každém členu se nachází index x , což je rozumné, neboť hledáme x -ovou složku. Dále všechny ostatní indexy se vyskytují v párech: tt , yy , zz kromě členu xx , který chybí. Tak ho tam prostě doplníme a napíšeme

$$f_x = q(u_t F_{xt} - u_x F_{xx} - u_y F_{xy} - u_z F_{xz}). \quad (26.36)$$

Nic jsme nezměnili, neboť výraz $F_{\mu\nu}$ je antisymetrický a F_{xx} je nulový. Člen s xx jsme přidali z toho důvodu, abychom mohli rovnici (26.36) psát ve „zkrácené formě“

$$f_\mu = q u_\nu F_{\mu\nu}. \quad (26.37)$$

Je to tatáž rovnice jako (26.36), jen musíme zavést následující pravidla: vždy, když se nějaký index objeví *dvakrát* (jako v tomto případě ν), automaticky sčítáme přes příslušné členy, stejně jako v případě skalárního součinu, s *toutéž znaménkovou konvencí*.

Není těžké uvěřit, že (26.37) platí právě tak i pro $\mu = y$ nebo $\mu = z$, ale jak je to s $\mu = t$? Podívejme se jen tak pro zajímavost, jaký výsledek bychom dostali:

$$f_t = q(u_t F_{tt} - u_x F_{tx} - u_y F_{ty} - u_z F_{tz}).$$

Nyní to musíme vyjádřit znovu pomocí \mathbf{E} a \mathbf{B} . Dostaneme

$$f_i = q \left(0 + \frac{v_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} E_x + \frac{v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} E_y + \frac{v_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} E_z \right), \quad (26.38)$$

neboli

$$f_i = \frac{q \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Ale v rovnici (26.28) se předpokládalo, že f_i je rovno

$$\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

To je totéž jako rovnice (26.38), protože $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}$ je nula. Takže je všechno tak, jak má být.

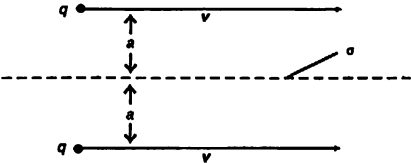
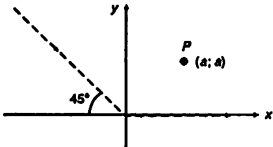
Když to shrneme, pohybové rovnice lze psát v elegantním tvaru

$$m_0 \frac{d^2 x_\mu}{ds^2} = f_\mu = q u_\nu F_{\mu\nu}. \quad (26.39)$$

Ačkoli je příjemné vidět, že rovnice lze psát takovýmto pěkným způsobem, nelze říci, že by tato forma byla příliš užitečná. Hledáme-li pohyb částice, bývá obvykle pohodlnější začít původními rovnicemi (26.24) a tak to budeme v budoucnosti dělat i my.

PŘÍKLADY A CVIČENÍ

(Jednotky měření jsou vybrány tak, že $c = 1$)

- 26.1** ■ Podrobně rozepište a vypočítejte výraz $\nabla_{\mu} F_{\mu\nu}$.
- 26.2** ■ Najděte čtyřvektor, jehož prostorové složky odpovídají složkám vektoru $\rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$. Jaký je fyzikální smysl časové a prostorových složek tohoto čtyřvektoru?
- 26.3** ■ Ukažte, že $E^2 - B^2$ a $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ jsou invariantní vzhledem k Lorentzově transformaci. Přesvědčte se, že svírají-li vektory \mathbf{E} a \mathbf{B} v nějaké vztažné soustavě ostrý úhel, bude tento úhel ostrý ve všech vztažných soustavách. U jakého důležitého fyzikálního jevu jsou oba tyto invarianty nulové?
- 26.4** ■ Nechť \mathbf{E} a \mathbf{B} jsou intenzita elektrického pole a magnetická indukce v nějakém bodě prostoru v dané vztažné soustavě. Najděte rychlost takové vztažné soustavy, v níž budou elektrické a magnetické pole rovnoběžná. Takových vztažných soustav je mnoho. Najdete-li alespoň jednu z nich, budou tyto vektory rovnoběžné i ve všech vztažných soustavách, které se vzhledem k ní pohybují konstantní rychlostí ve společném směru obou vektorů \mathbf{E} , \mathbf{B} . Proto je vhodné a stačí uvažovat vztažnou soustavu, jejíž vektor rychlosti je kolmý k vektorům \mathbf{E} a \mathbf{B} .
- 26.5** ■ Najděte \mathbf{E} a \mathbf{B} nabitě částice pohybující se konstantní rychlostí vycházející ze známého výrazu pro tato pole v soustavě, v níž je náboj v klidu.
- 26.6** ■ Ukážete, že elektrické a magnetické pole náboje pohybujícího se konstantní rychlostí může být vyjádřeno ve tvaru $\mathbf{E} = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{1-v^2}{(1-v^2\sin^2\vartheta)^{3/2}}$, $\mathbf{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3} \frac{1-v^2}{(1-v^2\sin^2\vartheta)^{3/2}}$, kde \mathbf{r} je polohový vektor vedený z bodu, v němž se v daném okamžiku nachází náboj, do pozorovacího bodu a ϑ je úhel mezi vektory \mathbf{r} a \mathbf{v} .
- 26.7** ■ Dlouhým přímým vodičem s nulovým odporem teče proud I vytvářený elektrony, které se pohybují rychlostí \mathbf{v} . Celková hustota náboje v každém bodě vodiče je nulová díky přítomnosti nehybných kladně nabitých iontů.
- a) Najděte pole vně vodiče ve vztažné soustavě, v níž je vodič v klidu.
b) Najděte tato pole ve vztažné soustavě pohybující se spolu s elektrony (viz též rovnici 13.28).
- 26.8** ■ Dva elektrony o téže rychlosti \mathbf{v} se pohybují rovnoběžně po obou stranách nekonečné roviny kladně nabitě s plošnou hustotou σ ve vzdálenosti a od roviny (viz obrázek).
- a) Při jaké hodnotě σ bude vzdálenost mezi elektrony zůstat rovna $2a$?
b) Porovnejte hodnotu σ , která odpovídá elektronům o energii 500 MeV, s hodnotou pro pomalu se pohybující elektrony.
- 
- 26.9** ■ Nechť f_{μ} je čtyřvektor síly, která působí na částici, a u_{μ} čtyřvektor její rychlosti. Ukažte, že $f_{\mu} u_{\mu} = 0$.
- 26.10** ■ Částice s nábojem q se pohybuje konstantní rychlostí v rovině xy po trajektorii znázorněné na obrázku čárkovaně. V počátku souřadnic dochází k rozptylu částice. Velikost rychlosti částice zůstává podél celé trajektorie konstantní. V okamžiku $t = t_1$ se částice nachází v bodě $x = a, y = 0$.
- a) Najděte elektrické pole v bodě $P(a, a)$ v okamžiku $t = t_1$, je-li $v/c = 0,5$ (c je rychlost světla ve vakuu).
b) Jak by se změnila vaše odpověď, kdyby se před rozptylem v počátku souřadnic částice pohybovala podél osy y ?
- 

Energie pole a hybnost pole

27.1 LOKÁLNÍ ZÁKONY ZACHOVÁNÍ

27.2 ZÁKON ZACHOVÁNÍ ENERGIE A ELEKTROMAGNETIZMUS

27.3 HUSTOTA ENERGIE A HUSTOTA TOKU ENERGIE ELEKTROMAGNETICKÉHO POLE

27.4 NEJEDNOZNAČNOST ENERGIE POLE

27.5 PŘÍKLADY HUSTOTY TOKU ENERGIE

27.6 HYBNOST POLE

27.1 LOKÁLNÍ ZÁKONY ZACHOVÁNÍ

Je nám jasné, že energie látky se nezachovává. Vyzařuje-li nějaký objekt světlo, ztrácí přitom energii. Ztracenou energii však můžeme vyjádřit v jiné formě, řekněme ve formě světelné energie. Proto zákon zachování energie není úplný, neuvažujeme-li i energii, která je spojená se světlem, přesněji s elektromagnetickým polem. Nyní se podívejme na zákon zachování energie pro pole spolu se zákonem zachování hybnosti. Tyto věci nemůžeme uvažovat odděleně, protože v teorii relativity jsou to různé stránky téhož čtyřvektoru.

Už na začátku, v prvním díle, když jsme hovořili o zákonu zachování energie, jsme si řekli, že celková energie na světě je konstantní. Nyní chceme myšlenku zákona zachování energie zobecnit takovým způsobem, abychom *detailně* věděli, jak se energie zachovává. Nový zákon nám bude říkat, že ztrácí-li se energie v dané oblasti, je to proto, že vytéká ven přes hranice této oblasti. Je to silnější tvrzení než prosté zachování energie bez podobných ohraničení.

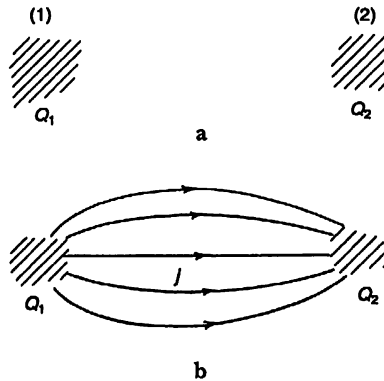
Abychom lépe pochopili význam našeho tvrzení, podívejme se, jak je to se zákonem zachování náboje. Při popisu zachování náboje jsme řekli, že existuje proudová hustota \mathbf{j} a nábojová hustota

ρ a že pokles velikosti náboje v nějaké oblasti musí být provázen tokem náboje ven z této oblasti. Nazývali jsme to zachováním náboje. Matematická formulace zákona zachování je

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (27.1)$$

Důsledkem tohoto zákona je konstantnost celkového náboje na světě – náboj nikdy nevzniká ani nezaniká.

Celkový náboj se však může zachovávat i jiným způsobem. Předpokládejme, že v okolí nějakého bodu (1) je náboj Q_1 , zatímco v nedalekém bodě (2) není žádný náboj (obr. 27.1). Nechť se začne náboj Q_1 postupně zmenšovat a zároveň s poklesem Q_1 se v okolí bodu (2) objevuje náboj Q_2 takovým způsobem, že suma Q_1 a Q_2 je v každém okamžiku konstantní. Jinými slovy, v libovolném okamžiku množství náboje, které ubyl z Q_1 , přibude v Q_2 . Pak bude celkové množství náboje na světě zachováno. Je to „celosvětové“ zachování, a ne to, čemu se říká „lokální“ zachování, protože k tomu, aby se náboj dostal z (1) do (2), se nemusel objevovat někde v prostoru mezi body (1) a (2). Lokálně se náboj prostě „ztratil“.



Obr. 27.1. Dva způsoby zachování náboje: a) $Q_1 + Q_2$ je konstantní, b) $dQ_1/dt = \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = -dQ_2/dt$

S takovýmto „celosvětovým“ zákonem zachování jsou však v teorii relativity problémy. Pojem „současného okamžiku“ v navzájem vzdálených bodech není stejný pro různé soustavy. Dvě události, které jsou současné v jedné soustavě, nejsou současné v druhé soustavě, která se vzhledem k první pohybuje. V „celosvětovém“ zachování, jak jsme jej popsali, je důležité, že náboj, který ubyl z Q_1 , se zároveň objevil v Q_2 . Jinak by existovaly určité okamžiky, v nichž by se náboj nezachovával. Zdá se, že jediný způsob, jak udělat zákon zachování relativisticky invariantním, je udělat z něj „lokální“ zákon zachování. Ve skutečnosti požadavek Lorentzovy relativistické invariantnosti překvapujícím způsobem omezuje různé zákony přírody. Například v moderní kvantové teorii pole se lidé často snažili pozmenit teorii zavedením „nelokální“ interakce, při níž něco *zde* přímo ovlivnilo něco *tam* – vždy však narazili na problémy spojené s principem relativity.

„Lokální“ zachování je založeno na jiné myšlence. Ta říká, že náboj se může dostat z jednoho místa do druhého jen tehdy, kdy se stane něco v prostoru mezi těmito místy. K formulaci takového zákona potřebujeme nejen hustotu ρ , ale i veličinu jiného druhu, jmenovitě vektor \mathbf{j} , který udává rychlost protékání náboje povrchem. Pak je vztah mezi tokem a časovou změnou

hustoty určen rovnicí (27.1). Je to silnější formulace zákona zachování. Říká, že náboj se zachovává speciálním způsobem – zachovává se „lokálně“.

Ukazuje se, že zachovávání energie je také *lokální* proces. V dané prostorové oblasti definujeme kromě hustoty energie ještě i vektor, který představuje rychlost toku energie nějakým povrchem. Například zář-li nějaký zdroj světla, můžeme najít energii, která z něj vychází. Představíme-li si nějaký matematický povrch, který obklopuje světelný zdroj, energie, která se ztratí z tohoto ohraničeného prostoru, musí být rovna energii, která proteče příslušným povrchem.

27.2 ZÁKON ZACHOVÁNÍ ENERGIE A ELEKTROMAGNETIZMUS

Nyní bychom chtěli kvantitativně popsat zákon zachování energie v elektromagnetizmu. Abychom to mohli udělat, potřebujeme vědět, kolik energie obsahuje libovolný elementární objem a jaká je rychlost toku energie. Uvažujme nejdříve jen energii elektromagnetického pole. Nechť w představuje *hustotu energie pole* (tj. množství energie v jednotce objemu) a dále vektor S *hustotu toku energie pole*, tj. množství energie procházející za jednotku času jednotkovou plochou kolmou na směr toku). Pak můžeme v úplné analogii se zákonem zachování náboje (viz rovnici (27.1)) psát „lokální“ zákon zachování energie pole ve tvaru

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\nabla \cdot S. \quad (27.2)$$

Samozřejmě, obecně to neplatí, není pravda, že energie pole se zachovává. Představte si, že jste v tmavé místnosti a náhle rozsvítíte světlo. V okamžiku je místnost plná světla, tj. objevila se energie pole, která tu předtím nebyla. Rovnice (27.2) nepředstavuje úplný zákon zachování, neboť se nezachovává energie samotného pole, ale jen celková energie na světě, neboť je tu také energie látky. Energie pole se změní, vykonává-li se práce působením látky na pole nebo opačně.

Je-li však v objemu, kteří nás zajímá, nějaká látka, víme, kolik energie představuje: každá částice má energii $m_0 c^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Celková energie látky je součtem energií všech částic a tok této energie povrchem je součtem energií částic, které povrchem procházejí. Nyní chceme hovořit jen o energii elektromagnetického pole. Proto hledáme rovnice, které říkají, že celková energie pole v daném objemu se zmenšuje *bud'* proto, že energie teče ven z objemu, *nebo* proto, že pole odevzdává energii látce (nebo ji od něj získává, což je vlastně záporná ztráta). Energie pole uvnitř objemu V je

$$\int_V w dV$$

a rychlost jejího poklesu je rovna časové derivaci tohoto integrálu se záporným znaménkem. Tok energie z objemu V je roven integrálu kolmé složky S povrchem Σ , který ohraničuje objem V :

$$\int_{\Sigma} S \cdot n d\Sigma.$$

Proto

$$-\frac{d}{dt} \int_V w dV = \int_{\Sigma} S \cdot n d\Sigma + (\text{práce vykonaná na látce uvnitř } V). \quad (27.3)$$

Ukázali jsme si, že práce, kterou pole koná na jednotkovém objemu látky za jednotku času, je $\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$ (síla působící na částici je $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ a práce za jednotku času je $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$. Máme-li v jednotkovém objemu N částic, bude práce připadající na jednotku objemu za jednotku času $Nq\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$, kde však $Nq\mathbf{v} = \mathbf{j}$). Proto energie, kterou pole ztrácí v jednotce objemu za jednotku času, je rovna $\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$. Rovnici (27.3) lze přepsat jako

$$-\frac{d}{dt} \int_V w dV = \int_\Sigma \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} d\Sigma + \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dV. \quad (27.4)$$

To je náš zákon zachování energie v poli. Mohli bychom ho přepsat na diferenciální tvar podobně jako rovnici (27.2), kdybychom druhý člen uměli vyjádřit jako integrál přes objem. To lze snadno udělat díky Gaussově větě. Plošný integrál kolmé složky \mathbf{S} je roven integrálu divergence \mathbf{S} přes příslušný objem. Takže rovnice (27.3) je ekvivalentní rovnici

$$-\int_V \frac{\partial w}{\partial t} dV = \int_V \nabla \cdot \mathbf{S} dV + \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dV,$$

v níž jsme časovou derivaci prvního členu vložili do integrálu. Jelikož tato rovnice platí pro libovolný objem, můžeme integrály odstranit a máme rovnici pro elektromagnetická pole

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}. \quad (27.5)$$

Tato rovnice nám je však k ničemu, pokud nevíme, co je w a \mathbf{S} . Asi bychom měli zjistit, jak se tyto veličiny vyjadřují pomocí \mathbf{E} a \mathbf{B} , neboť to je to, co nás zajímá. Raději však ukážeme způsob odvozování, který roku 1884 použil Poynting pro získání vzorců pro \mathbf{S} a w , abyste viděli, odkud se vzaly. (Toto odvození však pro naši další práci nepotřebujete znát.)

27.3 HUSTOTA ENERGIE A HUSTOTA TOKU ENERGIE ELEKTROMAGNETICKÉHO POLE

Hlavní myšlenka spočívá v předpokladu, že existuje hustota energie w a tok \mathbf{S} , které závisí jen na polích \mathbf{E} a \mathbf{B} . (Víme na příklad, že v elektrostatice lze hustotu energie psát ve tvaru $(1/2)\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$.) Samozřejmě, že w a \mathbf{S} by mohly záviset na potenciálech nebo na něčem jiném, ale podívejme se nejdříve, zda je to ve shodě s naším předpokladem. Pokusíme se přepsat veličinu $\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$ takovým způsobem, aby se stala soumou dvou členů: jeden by byl časovou derivací nějaké veličiny a druhý by byl divergencí jiné veličiny. První takovou veličinu bychom nazvali w a druhou \mathbf{S} (s příslušným znaménkem). Obě veličiny musí být možné vyjádřit jen pomocí polí, tj. chceme naši rovnici psát ve tvaru

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial w}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{S}, \quad (27.6)$$

přičemž levá strana má být vyjádřena jen pomocí polí. Jak to udělat? Samozřejmě, že použitím Maxwellových rovnic. Z Maxwellovy rovnice pro rotaci \mathbf{B} dostaneme

$$\mathbf{j} = \epsilon_0 c^2 (\nabla \times \mathbf{B}) - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Dosadíme-li do (27.6), máme jen pole E a B :

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (27.7)$$

Částečně jsme už hotovi. Poslední člen je časovou derivací $(\partial/\partial t)((1/2)\varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E})$. Proto je $(1/2)\varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$ přinejmenším částí w . Je to totéž, co jsme našli v elektrostatice. Jediné, co nám nyní zbývá udělat, je vyjádření druhého členu jako divergence čehosi.

Všimněme si, že první člen na pravé straně rovnice (27.7) je totéž jako

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E}. \quad (27.8)$$

Z vektorové algebry víte, že $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ je rovno $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, proto náš výraz lze také psát jako

$$\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) \quad (27.9)$$

a máme divergenci „něčeho“, tak jak jsme chtěli. Ale není to správně. Už jsme vás upozorňovali, že ∇ je „jakoby“ vektor, ale ne „docela“. Je to z toho důvodu, že v diferenciálním počtu platí dodatečně *pravidla*: operátor derivace, který stojí před součinem, působí na každý člen napravo od něj. V rovnici (27.7) působí ∇ jen na B , a ne na E . Ale v zápisu (27.9) by nám pravidlo říkalo, že působí na B i na E . Takže to *není* totéž. Ve skutečnosti, rozepíšeme-li si všechny složky výrazu $\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E})$, uvidíme, že je roven výrazu $\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$ plus nějaké další členy. Je to jako při derivování součinu v matematické analýze. Například

$$\frac{d}{dx}(fg) = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}.$$

Místo vypisování všech složek ve výrazu $\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E})$ vám raději ukážeme jeden trik, který je velmi užitečný pro problémy tohoto druhu. Je to trik, který nám dovolí používat pravidla vektorové algebry pro výrazy s operátorem ∇ , aniž bychom se dostali do problémů. Trik spočívá v tom, že zapomeneme – alespoň na chvíli – pravidla diferenciálního počtu o působení operátoru derivace. Víte, že pořadí činitelů je důležité ze dvou důvodů. První vyplývá z diferenciálního počtu: $f(d/dx)g$ není totéž jako $g(d/dx)f$. Druhý důvod je ve vektorové algebře: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ je různé od $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$. Když se nám zachce, můžeme na chvíli zapomenout na pravidla derivování. Místo tvrzení, že derivace působí na všechno, co je napravo, zavedeme nové pravidlo, které nezávisí na pořadí, v jakém jsou jednotlivé členy zapsány. Pak je můžeme bez obav přehazovat, jak chceme.

Zde je naše nové pravidlo: Pomocí indexu ukážeme, na který člen působí operátor derivace: *pořadí* není důležité. Předpokládejme, že operátor D označuje derivaci $\partial/\partial x$. Potom D_f znamená, že máme derivovat jen proměnnou veličinu f , tj.

$$D_f f = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Ale píšeme-li $D_f fg$, znamená

$$D_f fg = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) g.$$

Všimněme si, že podle našeho nového pravidla je $fD_f g$ totéž. Tutéž věc můžeme psát libovolným z následujících způsobů:

$$D_f f g = g D_f f = f D_f g = f g D_f$$

Vidíte, že D_f můžeme dát dokonce *za všechno*. (Je zarážející, že takové šikovné označení se nikdy nezavádí v matematických nebo ve fyzikálních učebnicích.)

Mohli byste se zeptat: Co když *chci* napsat derivaci výrazu fg ? Chci mít derivaci *obou* členů. To je jednoduché, stačí říct; napíšete $D_f(fg) + D_g(fg)$. Je to právě $g(\partial f/\partial x) + f(\partial g/\partial x)$, což ve starém označení znamená $\partial(fg)/\partial x$.

Uvidíte, že tentokrát půjde velice snadno napsat nový výraz pro $\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E})$. Začneme tím, že přejdeme na nové označení a napíšeme

$$\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) = \nabla_B \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) + \nabla_E \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}). \quad (27.10)$$

Jen co jsme to udělali, nemusíme už zachovávat pořadí. Vždy víme, že ∇_E působí jen na \mathbf{E} a ∇_B působí jen na \mathbf{B} . Za takovýchto okolností můžeme s ∇ zacházet jako s obyčejným vektorem. (Samozřejmě, až skončíme, vrátíme se k „standardnímu“ označení, které se obvykle používá.) Nyní tedy můžeme dělat různé věci – vzájemně zaměňovat tečky za křížky a provádět jiné druhy výměny jednotlivých členů. Například prostřední člen v (27.10) lze přepsat na $\mathbf{E} \cdot (\nabla_B \times \mathbf{B})$. (Vzpomínáte si, že $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})$.) A poslední člen je totéž jako $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{E} \times \nabla_E)$. Vypadá to divně, ale je to v pořádku. Chceme-li se nyní vrátit zpět k obyčejnému značení, musíme to zařídit tak, aby ∇ působil jen na své „vlastní“ funkce. První člen už máme v pořádku, stačí vypustit index. Druhý potřebuje změnit pořadí, abychom dostali ∇ před \mathbf{E} . Toho můžeme dosáhnout změnou pořadí činitelů vektorového součinu a změnou znaménka:

$$\mathbf{B} \cdot (\mathbf{E} \times \nabla_E) = -\mathbf{B} \cdot (\nabla_E \times \mathbf{E}).$$

Nyní je pořadí souhlasné s konvencí a můžeme se vrátit k obvyklému označení. Rovnice (27.10) je ekvivalentní s rovnicí

$$\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}). \quad (27.11)$$

(V tomto speciálním případě by se to dalo udělat rychleji použitím složek, ale vyplatilo se ztrácet čas předváděním matematického triku. Pravděpodobně se s ním jinde nesetkáte, a přitom je to trik velmi užitečný, máte-li se ve vektorové algebře vyмотat z pravidel o pořadí členů s derivacemi.)

Nyní se vraťme k našemu zákonu zachování energie a využijme náš nový výsledek (27.11) k transformaci členu $\nabla \times \mathbf{B}$ v rovnici (27.7). Tato rovnice se změní na

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = \varepsilon_0 c^2 \nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) + \varepsilon_0 c^2 \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right). \quad (27.12)$$

Jak vidíte, jsme téměř hotovi. Máme jeden člen, který je pěknou derivací podle t (to by mohlo být naše w), a další člen, který je překrásnou divergencí a mohl by představovat S . Bohužel, uprostřed

nám zůstává jeden člen, který není ani divergencí, ani derivací podle t . Takže se nám to podařilo jen částečně, ne docela. Když se nad tím trochu zamyslíme a připomeneme si Maxwellovy diferenciální rovnice, zjistíme, že $\nabla \times \mathbf{E}$ je našťástí rovno $-\partial \mathbf{B} / \partial t$, a to by znamenalo, že náš střední člen můžeme přepsat na časovou derivaci čehosi:

$$\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = \mathbf{B} \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{2} \right).$$

Nyní máme přesně to, co jsme chtěli. Naše rovnice pro energii vypadá takto:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = \nabla \cdot (\varepsilon_0 c^2 \mathbf{B} \times \mathbf{E}) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon_0 c^2}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} + \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right). \quad (27.13)$$

A to je přesně rovnice (27.6), *definujeme-li* w a \mathbf{S} jako

$$w = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \quad (27.14)$$

a

$$\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (27.15)$$

(Když obrátíme pořadí ve vektorovém součinu, vyjdou nám znaménka správně.)

Náš program jsme úspěšně splnili. Máme výraz pro hustotu energie, který je součtem „elektrické“ hustoty energie a „magnetické“ hustoty energie a vypadá přesně jako výrazy, které jsme našli ve statice, *když jsme odvozovali výraz pro energii pomocí polí*. Našli jsme i výraz pro vektor toku energie elektromagnetického pole. Tento nový vektor $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ se nazývá *Poyntingův vektor* podle svého objevitele. Udává nám rychlost, jakou se pohybuje energie pole v prostoru. Energie, která protéká malou plochou $d\Sigma$ za sekundu, je $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} d\Sigma$, kde \mathbf{n} je jednotkový vektor kolmý k $d\Sigma$. (Nyní, když máme výrazy pro w a \mathbf{S} , můžete, chcete-li, zapomenout, jak jsme je odvodili.)

27.4 NEJEDNOZNAČNOST ENERGIE POLE

Dřív než se budeme zabývat některými aplikacemi Poyntingových vzorců (rovnice (27.14) a (27.15)), chtěli bychom poznamenat, že jsme je ve skutečnosti nedokázali. Vše, co jsme udělali, bylo nalezení nějakého možného w a možného \mathbf{S} . Jak však můžeme vědět, zda bychom při dalších úpravách jednotlivých členů nedospěli k nějakému novému vyjádření pro w a pro \mathbf{S} ? Nové w a nové \mathbf{S} by se od starých lišila, ale rovnici (27.6) by splňovala. Něco takového je možné. Lze to provést, ale nové formy, které takto získáme, obsahují různé *derivace* pole (přičemž jsou to vždy členy druhého řádu, jako je druhá derivace nebo druhá mocnina první derivace). Ve skutečnosti existuje nekonečný počet různých možných vyjádření pro w a \mathbf{S} , a nikdo nevymyslel experiment (dosud), který by rozhodl, které z nich je to pravé. Obvykle se předpokládá, že nejjednodušší vyjádření je zároveň to nejspřávnější, ale musíme přiznat, že určitě neumíme v prostoru lokalizovat energii elektromagnetického pole. Proto i my se budeme držet nejjednoduššího způsobu a budeme říkat, že energie pole je dána rovnicí (27.14). Tok vektoru \mathbf{S} pak musí být dán rovnicí (27.15).

Je zajímavé, že zdánlivě neexistuje způsob, jak se zbavit nejednoznačnosti v definici energie pole. Občas se tvrdí, že tento problém lze vyřešit pomocí teorie gravitace, a to takto: V teorii gravitace je všechna energie zdrojem gravitační přitažlivé síly. Hustota elektrické energie bychom mohli lokalizovat tak, že bychom určili směr jejího gravitačního působení. Dosud se však nikdo nezabýval tak jemným experimentem, který by přesně lokalizoval působení gravitace elektromagnetického pole. To, že elektromagnetické pole je samo o sobě zdrojem gravitačních sil, je dnes každému jasné. Ve skutečnosti byl pozorován i ohyb světelného paprsku, který procházel v blízkosti Slunce – lze říci, že Slunce k sobě světlo přitahuje. Proč neříci, že světlo přitahuje Slunce stejnou silou? Ať už to je jak chce, jednoduché výrazy pro elektromagnetickou energii a její tok, které jsme našli, se obecně uznávají za správné. Ačkoliv zacházení s nimi vede k zdánlivě divným výsledkům, nikdo nikdy nepochyboval o jejich správnosti, neboť nejsou v rozporu se žádným experimentem. Proto i my se budeme držet toho, čeho všichni ostatní, a my navíc věříme, že je to pravděpodobně naprosto v pořádku.

Ještě jednu věc bychom měli v souvislosti s výrazem pro energii zmínit. Především energie pole, připadající na objemovou jednotku, je velmi jednoduchá. Je to elektrostatická energie plus magnetická energie, *vyjadřujeme-li* elektrostatičnou energii pomocí E^2 a magnetickou pomocí B^2 . Tato dvě vyjádření jsme našli jako *možná* vyjádření pro energii, když jsme uvažovali statické případy. Našli jsme i různá jiná vyjádření pro energii elektrostatičného pole, jako například $\rho\varphi$, což je rovno integrálu $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$ v elektrostatičném případě. Ale v elektrodynamickém případě taková rovnost neplatila a neměli jsme kritérium, podle něhož bychom rozhodli, která rovnost je správná. Nyní už to víme. Podobně i výraz pro magnetickou energii má obecnou platnost. Správný výraz pro hustotu energie *dynamických* polí je dán rovnicí (27.14).

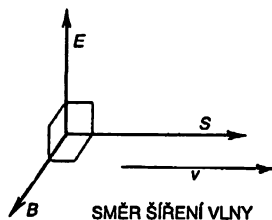
27.5 PŘÍKLADY HUSTOTY TOKU ENERGIE

Náš výraz pro vektor hustoty toku energie S je něčím docela novým. Podívejme se, jak se s ním zachází v některých speciálních případech, a vyzkoušejme si jej na něčem, co už známe. První takový příklad, který si vybereme, je světlo. Ve světelné vlně jsou vektory \mathbf{E} a \mathbf{B} navzájem kolmé a oba jsou kolmé na směr šíření vlny (obr. 27.2). V elektromagnetické vlně je velikost vektoru \mathbf{B} rovna velikosti vektoru \mathbf{E} krát $1/c$ a protože navzájem svírají pravý úhel, platí

$$|\mathbf{E} \times \mathbf{B}| = \frac{E^2}{c}.$$

Proto je pro světlo tok energie plošnou jednotkou za jednotku času

$$S = \varepsilon_0 c E^2. \quad (27.16)$$



Obr. 27.2. Vektory \mathbf{E} , \mathbf{B} a \mathbf{S} pro světelnou vlnu

Pro světelnou vlnu $E = E_0 \cos \omega(t - x/c)$ je střední tok energie plošnou jednotkou $\langle S \rangle_{\text{stř}}$, nazývaný intenzita světla, roven střední hodnotě druhé mocniny elektrického pole krát $\varepsilon_0 c$:

$$\text{Intenzita} = \langle S \rangle_{\text{stř}} = \varepsilon_0 c \langle E^2 \rangle_{\text{stř}}. \quad (27.17)$$

Věříte-li nebo ne, tento výsledek jsme už odvodili v článku 31.3 prvního dílu, když jsme probírali světlo. Dá se mu věřit, neboť je shodný i s něčím jiným. Uvažujeme-li světelný paprsek, je hustota energie v prostoru určena rovnicí (27.14). Využijeme-li toho, že pro světelnou vlnu $cB = E$, dostaneme

$$w = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} \left(\frac{E^2}{c^2} \right) = \varepsilon_0 E^2.$$

Ale E se v prostoru mění, a proto střední hustota energie je

$$\langle w \rangle_{\text{stř}} = \varepsilon_0 c \langle E^2 \rangle_{\text{stř}}. \quad (27.18)$$

Světelná vlna však postupuje rychlostí c , proto můžeme říci, že energie, která prochází plochou o obsahu jednoho metru čtverečního za jednu sekundu, je c -násobkem množství energie, které se nachází v objemu jednoho metru krychlového. Můžeme tedy říci, že

$$\langle S \rangle_{\text{stř}} = \varepsilon_0 c \langle E^2 \rangle_{\text{stř}}.$$

A to platí, je to totéž jako rovnice (27.17).

Dále si vezměme jiný příklad, tentokrát neobvyklý. Podívejme se, jak vypadá tok energie v kondenzátoru, který pomalu nabíjíme. (Nechceme mít frekvence tak vysoké, aby se kondenzátor začal podobat rezonanční dutině, ale také nechceme mít konstantní proud.) Předpokládejme, že použijeme obvyklý typ kondenzátoru s kruhovými paralelními deskami (obr. 27.3). Uvnitř je téměř homogenní elektrické pole, které se mění s časem. V libovolném okamžiku je celková elektromagnetická energie uvnitř rovna w krát objem. Mají-li desky poloměr a a vzdálenost mezi nimi je h , je celková energie mezi deskami

$$W = \left(\frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \right) (\pi a^2 h). \quad (27.19)$$

Se změnou E se mění i energie. Když se kondenzátor nabíjí, vzrůstá energie mezi deskami kondenzátoru rychlostí

$$\frac{dW}{dt} = \varepsilon_0 \pi a^2 h E \cdot \frac{dE}{dt}. \quad (27.20)$$

Musí tedy existovat nějaký tok energie do tohoto prostoru odkudsi zvenku. Myslíte si, že energie musí, pochopitelně, přicházet nabitým vodičem – jenže tak to není. Nemůže vstupovat do prostoru mezi deskami z toho směru, neboť pole E je na desky kolmé, a proto vektor $E \times B$ s nimi musí být *rovnoběžný*.

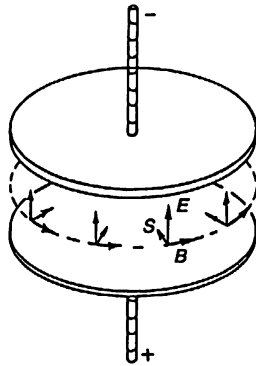
Určitě si vzpomínáte, že při nabíjení kondenzátoru vzniká kolem jeho osy magnetické pole. Hovořili jsme o tom v kapitole 23. Použijeme-li poslední z Maxwellových rovnic, zjistíme, že magnetické pole na okraji kondenzátoru je určeno rovnicí

$$2\pi a c^2 B = \frac{dE}{dt} \pi a^2$$

neboli

$$B = \frac{a}{2c^2} \frac{dE}{dt}.$$

Jeho směr je naznačen na obr. 27.3. Tok energie je úměrný $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ a směřuje od okraje kondenzátoru do jeho nitra tak, jak ukazuje obrázek. Energie tedy nevstupuje do kondenzátoru vodičem, ale vychází z prostoru, který obklopuje kondenzátor.



Obr. 27.3. Poyntingův vektor \mathbf{S} v blízkosti nabitého kondenzátoru směřuje dovnitř k ose kondenzátoru

Nyní si zkontrolujme, zda se celkový tok celou plochou mezi okraji desek shoduje se změnou energie uvnitř. Tento důkaz jsme vlastně provedli při odvozování rovnice (27.15), ale pro jistotu ho prověříme. Plocha povrchu je $2\pi ah$ a velikost vektoru $\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ je

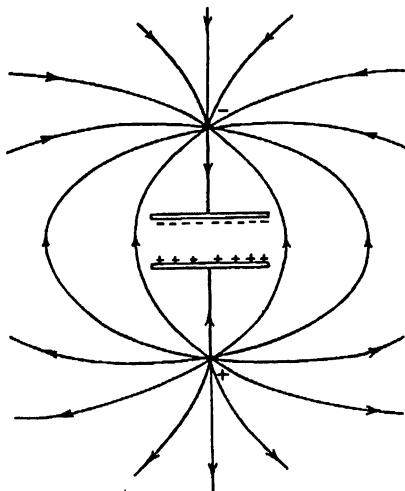
$$\epsilon_0 c^2 E \left(\frac{a}{2c^2} \frac{dE}{dt} \right).$$

Proto je celkový tok energie

$$\pi a^2 h \epsilon_0 E \cdot \frac{dE}{dt}.$$

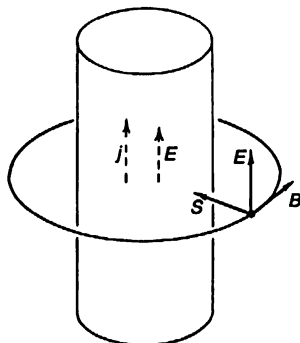
To se shoduje s rovnicí (27.20). Ale je tu jedna zvláštnost: při nabíjení kondenzátoru nepřichází energie vodičem, ale vstupuje okraji prostoru mezi deskami. To vyplývá z teorie.

Jak je to možné? Otázka *není* jednoduchá, ale dalo by se to vysvětlit takovýmto způsobem. Předpokládejme, že nad kondenzátorem a pod ním jsou umístěny náboje v dost velké vzdálenosti. Jsou-li náboje od sebe daleko, existuje mezi nimi pole, které je sice slabé, ale rozprostírá se široko daleko (obr. 27.4). Začnou-li se k sobě náboje přibližovat, stává se pole silnějším a těsněji kondenzátor obemývá. Energie pole, která byla z počátku daleko, se dostává ke kondenzátoru blíže, až nakonec vnikne do prostoru mezi deskami.



Obr. 27.4. Pole v okolí kondenzátoru, který nabijeme dvěma náboji přibližujícími se z velké vzdálenosti

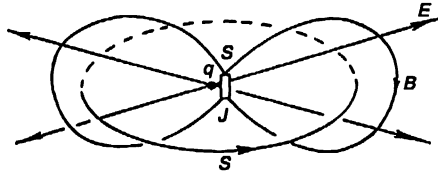
Jako další příklad si vybereme část vodiče s nenulovým odporem, kterým prochází proud. Jelikož má vodič určitý odpor, působí uvnitř v podélném směru elektrické pole. V důsledku poklesu potenciálu existuje elektrické pole i mimo vodič rovnoběžně s jeho povrchem (obr. 27.5). Navíc je tu magnetické pole, které vzniká jako důsledek proudu ve vodiči a má směr kružnic obtáčejících se kolem vodiče. E a B svírají pravý úhel, proto Poyntingův vektor směřuje radiálně dovnitř, jak je ukázáno na obrázku. Je tu tok energie do vodiče ze všech stran. Ten musí být, samozřejmě, roven energii, která se ve vodiči ztrácí ve formě tepla. Takže naše „bláznivá“ teorie říká, že díky energii, kterou vodič získává od okolního pole, získávají elektrony energii, kterou mění na teplo. Intuitivně by se zdálo, že elektrony získávají energii tím, že jsou postrkovány podél vodiče, a že by tedy energie měla téci vodičem dolů (nebo nahoru). Ve skutečnosti nám teorie říká, že elektrony jsou postrkovány elektrickým polem, které pochází od nějakých vzdálených nábojů, a z tohoto pole získávají elektrony energii na generování tepla. Energie jako by tekla ze vzdálených nábojů daleko do prostoru a pak do vodiče.



Obr. 27.5. Poyntingův vektor S v blízkosti vodiče, kterým prochází proud

Konečně, abychom vás docela přesvědčili, že tato teorie je zjevně šléná, vybereme ještě jeden příklad, v němž jsou elektrický náboj a magnet blízko sebe *v klidu* – oba „sedí“ zcela bez pohybu,

Nechť je například bodový náboj umístěn vedle středu tyčového magnetu tak, jak je ukázáno na obr. 27.6. Vše je v klidu, takže energie se s časem nemění, E a B jsou konstantní. Ale Poyntingův vektor nám říká, že tu je tok energie, protože $E \times B$ je nenulové. Když se podíváme, jak ten tok vypadá, zjistíme, že jen obíhá stále dokola. Nikde nedochází ke změně energie – vše, co do nějakého objemu vchází, to z něj i vychází. Je to, jako když nestlačitelná voda teče kolem. Takže v tomto zdánlivě statickém případě probíhá cirkulace energie. Vypadá to absurdně.



Obr. 27.6. Náboj a magnet dávají Poyntingův vektor, který cirkuluje po uzavřených smyčkách

Vlastně to ani záhadné není, připomeneme-li si, že „statický“ magnet je vlastně permanentně cirkulující proud. V permanentním magnetu elektrony uvnitř stále rotují. Proto snad i na té cirkulaci energie nakonec nebude nic zvláštního.

Zajisté začnete mít dojem, že Poyntingova teorie částečně narušila vaše intuitivní představy o lokalizaci energie v elektromagnetickém poli. Možná si myslíte, že si v celé vaší intuici musíte udělat pořádek a v tomto směru vás čeká mnoho práce. Zdá se však, že to nebude třeba. Nemusíte se bát žádných velkých problémů, když občas zapomenete, že energie do vodiče vchází z okolního prostoru a neteče podél vodiče. Při využívání zákona zachování energie není natolik důležité vědět do detailů, kudy se energie ubírá. Cirkulace energie kolem magnetu a náboje se zdá být ve většině případů nepodstatná. Není to životně důležitý detail, ale je z něj zřejmé, že naše běžná intuice bývá často nesprávná.

27.6. HYBNOST POLE

Dále bychom chtěli hovořit o *hybnosti* elektromagnetického pole. Právě tak, jako má pole energii, má i hybnost vztahující se na jednotkový objem. Hustotu hybnosti budeme označovat g . Jelikož hybnost může mít různé směry, musí být g vektorem. Nejdříve budeme hovořit jen o jedné složce tohoto vektoru, například o x -ové. Jelikož každá složka hybnosti se zachovává, musí existovat zákon zachování, který lze napsat přibližně takto

$$-\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \text{hustota} \\ \text{hybnosti} \\ \text{látky} \end{pmatrix}_x = \frac{\partial g_x}{\partial t} + \begin{pmatrix} \text{hustota} \\ \text{toku} \\ \text{hybnosti} \end{pmatrix}_x.$$

Levá strana je zřejmá. Časová změna hybnosti látky je rovna síle, která na ni působí. Pro částici platí $F = q(E + v \times B)$, pro rozdělení nábojů je síla působící na objemovou jednotku rovna $\rho E + j \times B$. Ale člen hustota toku hybnosti vypadá divně. Nemůže to být divergence vektoru, neboť to není skalár. Skoro to vypadá na složku x nějakého vektoru. Snad by to mělo být něco typu

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z},$$

protože x -ová složka hybnosti může téci v libovolném ze tří směrů. V každém případě, ať už jsou a , b , c cokoliv, měla by být takováto jejich kombinace rovna složce x hustoty toku hybnosti.

Dále, v duchu zažitých pravidel, vyjádříme $\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ jen pomocí E a B ; ρ a \mathbf{j} vyloučíme využitím Maxwellových rovnic. Když si trochu pohrajeme s jednotlivými členy a dosadíme, co je kam třeba dosadit, dospějeme k výrazu, který má tvar

$$\frac{\partial g_x}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}.$$

Potom porovnáním příslušných členů zjistíme, čemu je rovno g_x , a , b , c . Je s tím mnoho práce a nemůžeme ji dělat. Místo toho budeme hledat jen výraz pro hustotu hybnosti, a to jiným způsobem.

V mechanice platí jedna důležitá poučka, která zní takto: Pro libovolný tok energie (může to být energie pole nebo nějaký jiný druh energie) je energie, která prochází jednotkovou plochou za jednotku času, násobená $1/c^2$, rovna hybnosti připadající na objemovou jednotku prostoru. V případě elektrodynamiky z této poučky dostáváme, že \mathbf{g} je rovno $1/c^2$ krát Poyntingův vektor

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}. \quad (27.21)$$

Takže Poyntingův vektor nám dává nejen hustotu toku energie, ale po dělení c^2 i hustotu hybnosti. Stejný výsledek bychom dostali použitím analýzy, kterou jsme navrhli, ale tento přístup je zajímavější tím, že je obecnější. Nyní uvedeme několik zajímavých příkladů a argumentů, abychom vás přesvědčili, že obecná poučka je pravdivá.

První příklad: Předpokládejme, že máme krabici a v ní množství částic, dejme tomu N částic na metr krychlový, a že tyto částice se pohybují nějakou rychlostí v . Uvažujme myšlenou rovinu kolmou na v . Tok energie plošnou jednotkou této roviny za jednu sekundu je rovna Nv (tj. počet částic, který prochází plochou za jednu sekundu) krát energie částice. Energie jedné částice je $m_0 c^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$, proto tok energie za sekundu je

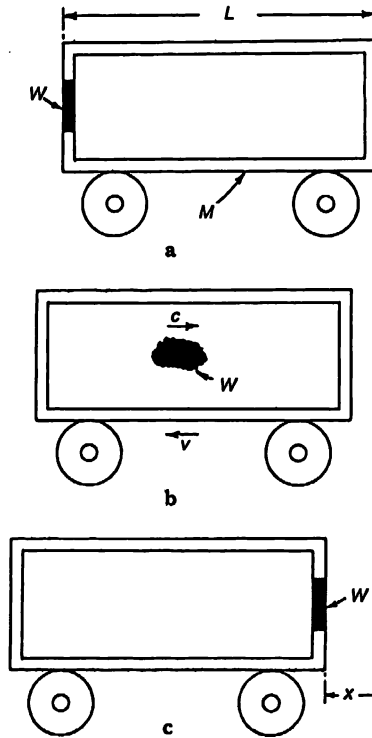
$$N \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Ale hybnost jedné částice je $m_0 v / \sqrt{1 - v^2/c^2}$, proto hustota hybnosti je

$$Nv \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

a to je rovno právě $1/c^2$ krát hustota toku energie, tak jak říká poučka. Proto pro svazek částic poučka platí.

Platí i pro světlo. Když jsme se v prvním dílu zabývali světlem, viděli jsme, že při absorbování energie světelného záření, odevzdává záření látce i určité množství hybnosti. V 34. kapitole 1. dílu jsme ukázali, že hybnost je rovna $1/c$ krát absorbovaná energie (rovnice (34.24), 1. díl). Necht W_0 je energie, která dopadá na jednotku plochy za jednu sekundu. Pak hybnost odevzdaná této příslušné plošné jednotce za sekundu je W_0/c . Hybnost se šíří rychlostí c , proto musí být její hustota před absorbující látkou W_0/c^2 . Poučka opět platí.



Obr. 27.7. Energie W při pohybu rychlostí c s sebou nese hybnost W/c

Nakonec uvedeme jeden Einsteinův argument, který ještě jednou demonstruje totéž tvrzení. Předpokládejme, že máme železniční vůz (tření zanedbáváme) s určitou velkou hmotností M . Na jednom konci je zařízení, jímž vystřelují nějaké částice, nebo vyzařuje světlo (nebo něco jiného, rozdíl je nepodstatný), které je zabrzděno na opačném konci vozu. Původně jsme na jednom konci měli nějakou energii, řekněme W , jak je naznačeno na obr. 27.7a, a potom, později, se tato energie nachází na opačném konci, jak je znázorněno na obr. 27.7c. Energie W se přemístila na vzdálenost L , což je délka vozu. Energie W má hmotnost W/c^2 , což znamená, že v případě nehybného vozu se jeho těžiště přesunulo. Einsteinovi se nelíbila myšlenka, že těžiště nějakého objektu by se mohlo přesunout jen v důsledku manipulací uvnitř tohoto objektu. Proto předpokládal, že není možné změnit polohu těžiště tím, že uděláme něco uvnitř. Ale je-li tomu tak, musí se při přemístění energie W z jednoho konce na druhý celý vůz posunout o nějakou vzdálenost x , jak je znázorněno na obr. 27.7c. Lze ukázat, že celková hmotnost vozu krát x musí být rovna hmotnosti přemístěné energie, W/c^2 krát L . (Předpokládáme, že W/c^2 je mnohem menší než M .)

$$Mx = \frac{W}{c^2} L. \quad (27.22)$$

Nyní se podívejme na speciální případ, kdy se energie přenáší náhlým vyzářením světla. (Úvahu lze provést stejně tak i pro částice, ale budeme se držet Einsteina, jehož zajímala otázka světla.) Co bylo příčinou pohybu vozu? Einstein uvažoval takto: Při vyzářením musí nastat zpětný ráz s hybností p . Právě ten přinutí vůz posunout se dozadu. Rychlost v posunutí vozu bude rovna hybnosti dělené hmotností vozu:

$$v = \frac{p}{M}.$$

Vůz se pohybuje touto rychlostí, dokud se světelná energie nedostane na druhý konec vozu. Jakmile dorazí, odevzdá svou hybnost zpět a zastaví vůz. Je-li x malé, je čas t v němž se vůz pohybuje, přibližně roven L/c , takže dostáváme

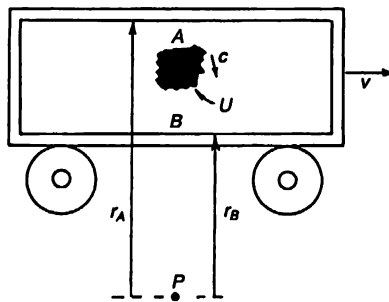
$$x = vt = v \frac{L}{c} = \frac{p}{M} \frac{L}{c}.$$

Když toto x dosadíme do rovnice (27.22), dostaneme

$$p = \frac{W}{c}.$$

Opět jsme dostali vztah mezi energií a hybností světla. Když to ještě vydělíme c , abychom dostali hustotu hybnosti, opět dostáváme

$$g = \frac{W}{c^2}. \quad (27.23)$$



Obr. 27.8. Energie W musí nést hybnost W/c , má-li být zachován moment hybnosti vzhledem k bodu P

Mohli byste se právem divit, proč je poučka o těžišti tak důležitá. Co když je nesprávná? Ale pak bychom se možná museli vzdát i zákona zachování momentu hybnosti. Předpokládejme, že se náš vůz pohybuje po kolejkách nějakou rychlostí v a že vystřeluje nějakou energii ze stropu na podlahu vozu z bodu A do bodu B na obr. 27.8. Nyní se podívejme na moment hybnosti systému vzhledem k bodu P . Předtím, než energie W opouští bod A , má hmotnost $m = W/c^2$ a rychlost v , proto je

příslušný moment hybnosti mvr_A . Při dopadu do bodu B je její hmotnost táž, a pokud se hybnost celého vozu nezměnila, musí být stále rychlost v . Její moment hybnosti vzhledem k bodu P je mvr_B . Moment hybnosti se tedy mění, pokud světlo neodevzdává při vyzáření vozu určitou hybnost, tj. pokud světlo nenese hybnost W/c . Ukazuje se, že zákon zachování momentu hybnosti a poučka o těžišti v teorii relativity navzájem úzce souvisejí. Kdyby tato poučka neplatila, byl by porušen i zákon zachování momentu hybnosti. Je tedy zřejmé, že je to obecný zákon a můžeme jej použít i v elektrodynamice, chceme-li určit hybnost pole.

Uvedeme ještě dva příklady na hybnost elektromagnetického pole. V článku 26.2 jsme poukázali na nedostatky zákona akce a reakce v případě dvou nabitých částic pohybuících se po vzájemně kolmých drahách. Síly působící na obě částice, se vzájemně nevyrovnávaly, takže akce nebyla rovna reakci, proto se musela celková hybnost látky změnit. Nezachovávala se. Ale hybnost pole se v tomto případě také mění. Vypočtete-li množství hybnosti dané Poyntingovým vektorem, zjistíte, že není konstantní. Ale změna hybnosti částice se vyrovnává právě hybností pole, proto se celková hybnost částic a pole zachovává.

Dalším, posledním příkladem, je případ magnetu a náboje, který je znázorněn na obr. 27.6. Trápilo nás zjištění, že energie tekla kolem po kružnicích, ale nyní, když víme, že energetický tok a hybnost jsou úměrné, víme, že i hybnost v prostoru krouží. Ale *cirkulace* hybnosti znamená, že je tu i *moment* hybnosti. Existuje tedy *moment* hybnosti pole. Vzpomínáte si na paradox, který jsme popsali v článku 17.4, když jsme hovořili o solenoidu a nábojích na kotouči? Zdálo se, že když vypneme proud, začne se celý kotouč otáčet. Otázka byla: Odkud se vzal moment hybnosti? Odpověď je, že máme-li magnetické pole a nějaké náboje, musí v poli existovat i nějaký moment hybnosti. Musí se tam dostat, když se pole vytváří. Když se pole vypne, moment hybnosti se odevzdá. Proto se kotouč paradoxně začne otáčet. Mystická cirkulace toku energie, která se zpočátku zdála taková zvláštní, je absolutně nevyhnutelná. Tok hybnosti skutečně existuje. Je nutný, aby platil zákon zachování momentu hybnosti celého světa.

PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 27.1 ■ Postupem, který jsme použili při odvozování výrazu (27.11) vyjádřete v jiném tvar výraz $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, $\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$.
- 27.2 ■ Vypočítejte v megatunách trinitrotoluolu, tj. v jednotkách energie, která se uvolní při výbuchu 1 milionu tun TNT (1 megatuna TNT = $4,2 \cdot 10^{15}$ J) energii magnetického pole Země v celém prostoru vně Země. Předpokládejte, že magnetické pole Země je pole dipólu, které má na rovníku magnetickou indukci přibližně rovnou $B = (2/3) \cdot 10^{-4}$ T. Může podle vašeho názoru vodíková bomba s energií 1 megatuny TNT, která vybuchne vysoko nad zemským povrchem podstatně narušit magnetické pole Země?
- 27.3 ■ Vypočítejte Poyntingův vektor \mathbf{S} procházející povrchem dlouhého přímého vodiče, jehož odpor na jednotku délky je roven R_0 . Porovnejte získaný výsledek s ohmickými ztrátami.
- 27.4 ■ Dlouhý koaxiální kabel je tvořen dvěma ideálně vodivými sousými válci. Jeden konec kabelu je připojen k elektrické baterii, na jejichž svorkách je napětí U . K druhému konci kabelu je připojen odpor R . Proud protékající kabelem je tedy $I = U/R$. Pomocí Poyntingova vektoru určete rychlost toku energie.
- 27.5 ■ Střední výkon rozhlasové vysílačky je přibližně 10 kW.
- a) Čemu je rovna velikost Poyntingova vektoru na povrchu Země v bodech vzdálených od vysílačky o 10 km? Na takové vzdálenosti můžeme považovat rádiové vlny za rovinné. Je rozumné předpokládat, že celý výkon se vyzařuje čtvrtinovou anténou umístěnou nad ideálně vodivým povrchem.
- b) Najděte hodnoty amplitud elektrického a magnetického pole.
- 27.6 ■ Pole odpovídající příčné elektrické vlně o nejnižší frekvenci v obdélníkovém vlnovodu (obr. 24.6) má tvar
- $$E = e_y E_0 \sin \frac{\pi x}{a} \cos(\omega t - k_z z),$$
- $$B = -e_x E_0 \frac{k_z}{\omega} \sin \frac{\pi x}{a} \cos(\omega t - k_z z) - e_z E_0 \frac{\pi}{\omega a} \cos \frac{\pi x}{a} \sin(\omega t - k_z z).$$
- a) Ukažte, že uvedené řešení vyhovuje okrajovým podmínkám úlohy.
- b) Vypočítejte Poyntingův vektor \mathbf{S} a hustotu energie w .
- c) Vypočítejte střední tok energie plochou kolmou k ose z .
- d) Vypočítejte střední hustotu energie ve vlnovodu.
- e) Na základě výsledků c) a d) vypočítejte střední rychlost šíření energie. Ukažte, že tato rychlost je rovna grupové rychlosti (24.27).
- 27.7 ■ a) Najděte hustotu toku energie vyzařované dipólem s oscilujícím dipólovým momentem $p \cos \omega t$. (Stačí uvažovat členy klesající s první mocninou vzdálenosti.)
- b) Integrováním přes kulovou plochu velkého poloměru, v jejímž středu se nachází dipól, ukažte, že střední vyzařovaný výkon je roven $\frac{1}{3} \frac{p^2}{4\pi \epsilon_0 c^2} \frac{\omega^4}{c}$.
- 27.8 ■ Rovinná elektromagnetická vlna dopadá na volný elektron a rozkmitává ho. Najděte poměr energie vyzařované elektronem za jednotku času k hustotě toku energie dopadající elektromagnetické vlny. Frekvence vlny je tak malá, že lze zanedbat vliv magnetického pole vlny na pohyb elektronu.

- 27.9** ■ Částice prachu ve sluneční soustavě je vystavena působení dvou sil: gravitační přitažlivé síly Slunce a planet a síly světelného tlaku, která je úměrná průřezu částice. Existují takové rozměry částice, kdy jsou obě síly vyrovnány. Za předpokladu, že částice má tvar kuličky a pohlcuje všechno světlo, které na ni dopadá, najděte poloměr částice odpovídající rovnováze obou zmíněných sil. Fakt, že ohony komet jsou odvráceny od Slunce se obvykle vysvětluje existencí takové rovnováhy a tím, že tyto ohony jsou tvořeny velmi malými částicemi, možná dokonce jednotlivými molekulami. Je takové vysvětlení věrohodné? Výkon vyzařovaný Sluncem je $P_S = 4 \cdot 10^{26} \text{ W}$, jeho hmotnost $2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.
- 27.10** ■ Na dutý toroid, jehož střední poloměr je roven R a poloměr průřezu $r < R$ je navinuto N závitů drátu. V okamžiku $t = 0$ začne vinutím protékat proud, který narůstá lineárně s časem: $I(t) = Kt$.
- Určete magnetické pole a energii nahromaděnou v toroidu k okamžiku t .
 - Určete směr a velikost Poyntingova vektoru v libovolném vnitřním bodě toroidu v okamžiku t .
 - Pomocí Poyntingova vektoru určete rychlost změny energie elektromagnetického pole s časem uvnitř toroidu v libovolném časovém okamžiku. Přesvědčte se o správnosti své odpovědi porovnáním s řešením bodu a) této úlohy.

Elektromagnetická hmotnost

28.1 ENERGIE POLE BODOVÉHO NÁBOJE

28.2 HYBNOST POLE POHYBUJÍCÍHO SE NÁBOJE

28.3 ELEKTROMAGNETICKÁ HMOTNOST

28.4 SÍLA, KTEROU ELEKTRON PŮSOBÍ SÁM NA SEBE

28.5 POKUSY O MODIFIKACI MAXWELLOVY TEORIE

28.6 POLE JADERNÝCH SIL

28.1 ENERGIE POLE BODOVÉHO NÁBOJE

Nejdůležitější část naší práce na teorii elektromagnetického pole jsme završili tím, že jsme dali do souvislosti teorii relativity a Maxwellovy rovnice. Některé detaily jsme, samozřejmě, přeskočili a jednu důležitou oblast – interakcí elektromagnetického pole s látkou – se budeme zabývat později. Nyní se však na chvíli zastavíme, abychom ukázali, že celá tato obrovská konstrukce, která slavila úspěchy při vysvětlování tolika jevů, nakonec selže. Kdybyste při analýze jakéhokoliv fyzikálního jevu šli do hloubky, zjistili byste, že vždy narazíte na určité těžkosti. Nyní budeme hovořit o vážném problému – o selhání klasické elektromagnetické teorie. Víme, že v důsledku kvantové mechanických efektů selhala celá klasická fyzika. Klasická mechanika je matematicky konzistentní teorie, je jen v nesouladu s experimentem. Je však zajímavé, že klasická teorie elektromagnetismu je neuspokojivá sama o sobě. Jsou tu problémy související s *myslenkami* Maxwellovy teorie, které kvantová mechanika neřeší a ani s ní přímo nesouvisejí. Řeknete si: „Možná si děláme zbytečné starosti. Jelikož kvantová mechanika nám změní zákony elektrodynamiky, měli bychom počkat, zda nám po úpravách nějaké problémy zůstanou.“ Jenže když skloubíme elektromagnetismus s kvantovou mechanikou, problémy zůstávají. Proto to nebude ztráta času, když se nyní podíváme, co je to za problémy. Mají i důležitý historický význam. Navíc budete mít možná pocit uspokojení z toho, jak jste teorii do hloubky zvládli – do té míry, že uvidíte i všechny její nedostatky.

Problém, o němž hovoříme, je spojen s pojmem hybnosti a energie, aplikujeme-li jej na elektron nebo jinou nabitou částici. Pojem jednoduché nabité částice a pojem elektromagnetického pole jsou v určitém smyslu v rozporu. Při popisování tohoto problému začneme cvičeními na pojmy energie a hybnosti.

Nejdříve budeme počítat energii nabité částice. Předpokládejme, že máme jednoduchý model elektronu, podle něhož je všechen jeho náboj q rovnoměrně rozdělen na povrchu koule s poloměrem a . Ve speciálním případě bodového náboje může být a rovno nule. Nyní počítejme energii elektromagnetického pole. Je-li náboj v klidu, nevzniká žádné magnetické pole a energie, připadající na jednotkový objem, je úměrná druhé mocnině intenzity elektrického pole. Velikost elektrického pole je $q/4\pi\epsilon_0 r^2$ a hustota energie je

$$w = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 = \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4}.$$

Chceme-li dostat celkovou energii, musíme tuto hustotu integrovat přes celý prostor. Když využijeme toho, že objemový element je $4\pi r^2 dr$, pro celou energii, kterou budeme označovat W_{elek} , dostaneme

$$W_{\text{elek}} = \int \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} dr.$$

To lze snadno integrovat. Spodní hranice je a , horní je ∞ , proto

$$W_{\text{elek}} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a}. \quad (28.1)$$

Když za q dosadíme náboj elektronu q_e a pro $q_e^2/4\pi\epsilon_0$ použijeme symbol e^2 , dostaneme

$$W_{\text{elek}} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{a}. \quad (28.2)$$

Vše je v pořádku, pokud nebude a rovno nule, tj. pro případ bodového náboje – pak nastávají problémy. Jelikož hustota energie je nepřímou úměrná čtvrté mocnině vzdálenosti, její objemový integrál je nekonečný. Pole, které obklopuje bodový náboj, obsahuje nekonečné množství energie.

Co nám vlastně na nekonečné energii vadí? Nemůže-li se tato energie dostat ven, ale musí tam být navždy, je v tom nějaký problém? Samozřejmě, je to nepřijemné, když nám nějaká veličina vychází nekonečně velká, ale skutečně důležité je, zda jsou s tím spojeny i nějaké pozorovatelné fyzikální efekty. Chceme-li odpovědět na tuto otázku, musíme si zvolit místo energie něco jiného. Předpokládejme, že se ptáme, jak se mění energie, když se náboj pohybuje. Budou-li změny nekonečné, problémy skutečně nastanou.

28.2 HYBNOST POLE POHYBUJÍCÍHO SE NÁBOJE

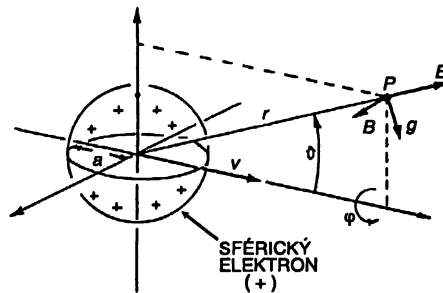
Předpokládejme, že elektron se pohybuje v prostoru rovnoměrnou rychlostí a že jeho rychlost je v porovnání s rychlostí světla malá. S pohybujícím se elektronem je vždy spojena nějaká hybnost – dokonce i tehdy, kdyby elektron neměl žádnou hmotnost předtím, než byl nabit – je to hybnost elektromagnetického pole. Můžeme ukázat, že hybnost pole má směr rychlosti náboje

v a pro malé rychlosti je její velikost úměrná v . Pro bod P ve vzdálenosti r od středu náboje pod úhlem ϑ vzhledem ke směru pohybu (obr. 28.1) bude elektrické pole radiální a magnetické pole, jak jsme už viděli, bude rovno $v \times E/c^2$. Hustota hybnosti z rovnice (27.21) je

$$\mathbf{g} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

Hybnost má vzhledem ke směru pohybu šikmý směr, tak jak je to ukázáno na obrázku, a její velikost je

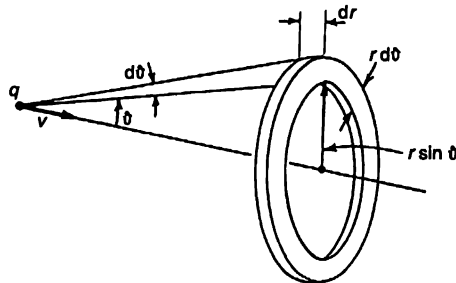
$$g = \frac{\epsilon_0 v}{c^2} E^2 \sin \vartheta.$$



Obr. 28.1. Pole E a B a hustota hybnosti g kladného elektronu. Pro záporný elektron se E a B změní na opačné vektory, zatímco g zůstává stejné

Pole jsou symetrická vzhledem ke směru pohybu, proto při integraci přes celý prostor bude sumární příspěvek kolmých složek roven nule a výsledná hybnost bude rovnoběžná s v . Průmět g do tohoto směru je roven $g \sin \vartheta$ a ten musíme integrovat přes celý prostor. Za objemový element zvolíme prstenec, jehož rovina je kolmá na v , jak je ukázáno na obr. 28.2. Jeho objem je $2\pi r^2 \sin \vartheta d\vartheta dr$. Celková hybnost potom je

$$\mathbf{p} = \int \frac{\epsilon_0 v}{c^2} E^2 \sin^2 \vartheta \cdot 2\pi r^2 \sin \vartheta d\vartheta dr.$$



Obr. 28.2. Objemový element $2\pi r^2 \sin \vartheta d\vartheta dr$ používaný při výpočtu hybnosti pole

Jelikož E nezávisí na ϑ (pro $v \ll c$), můžeme ihned integrovat přes ϑ :

$$\int \sin^3 \vartheta d\vartheta = - \int (1 - \cos^2 \vartheta) d(\cos \vartheta) = -\cos \vartheta + \frac{\cos^3 \vartheta}{3}.$$

Meze integrování jsou 0 a π , proto integrál přes ϑ přispívá jen faktorem $4/3$, a

$$\mathbf{p} = \frac{8\pi}{3} \frac{\epsilon_0 v}{c^2} \int E^2 r^2 dr.$$

Je to tentýž integrál (pro $v \ll c$), jenž jsme počítali při hledání energie; je roven $q^2/16\pi^2 \epsilon_0^2 a$, a tedy

$$\mathbf{p} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{v}{ac^2}$$

neboli

$$\mathbf{p} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{ac^2} \mathbf{v}. \quad (28.3)$$

Hybnost pole – elektromagnetická hybnost – je úměrná v . Je to totéž, co bychom dostali pro hybnost částice, jejíž hmotnost je rovna koeficientu u v . Tento koeficient můžeme nazvat *elektromagnetická hmotnost* m_{elek} a je rovna

$$m_{\text{elek}} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{ac^2}. \quad (28.4)$$

28.3 ELEKTROMAGNETICKÁ HMOTNOST

Odkud pochází hmotnost tělesa? V našich zákonech mechaniky jsme předpokládali, že každý objekt „má“ něco, co nazýváme hmotností, a zároveň „má“ hybnost, která je přímo úměrná jeho rychlosti. Nyní jsme zjistili, že je docela pochopitelné, má-li nabitá částice hybnost úměrnou svojí rychlosti. Dalo by se říci, že hmotnost je elektrodynamický efekt. Původ hmotnosti nebyl dosud objeven. V elektrodynamice se nám naskytla velká příležitost pochopit něco, co jsme dosud nechápali. Přišlo to jako „dar z nebes“ (nebo přesněji jako dar od Maxwella a Poyntinga), že každá nabitá částice má díky svým elektromagnetickým vlastnostem hybnost úměrnou své rychlosti.

Budme konzervativní a řekněme si, že existují dva druhy hmotnosti a že celková hybnost objektu je rovna součtu mechanické a elektromagnetické hybnosti. Mechanická hybnost je rovna mechanické hmotnosti m_{mech} krát v . V experimentech, v nichž se hmotnost částice určuje z její hybnosti nebo z toho jak obíhá po orbitě, měříme celkovou hmotnost částice. Obecně můžeme říci, že hybnost je rovna celkové hmotnosti ($m_{\text{mech}} + m_{\text{elek}}$) krát rychlost. Proto se pozorovaná hmotnost skládá ze dvou částí (nebo z více, zahrneme-li i jiná pole): z mechanické a elektromagnetické. S jistotou víme, že elektromagnetická část tu je a máme pro ni vzorec. A je tu i vzrušující možnost, že mechanická část vůbec neexistuje – že všechna hmotnost je elektromagnetického původu.

Podívejme se, jakou velikost by měl mít elektron, kdyby neměl žádnou mechanickou hmotnost. Můžeme to zjistit tak, že elektromagnetickou hmotnost z rovnice (28.4) dáme do rovnosti s pozorovanou hmotností elektronu m_e . Dostaneme

$$a = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m_e c^2}. \quad (28.5)$$

Veličina

$$r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} \quad (28.6)$$

se nazývá klasický poloměr elektronu; její numerická hodnota je $2,82 \cdot 10^{-13}$ cm, což je přibližně jedna stotisíciná průměru atomu.

Proč nazýváme poloměrem elektronu r_0 , a ne a ? Tytéž výpočty bychom mohli dělat i s jiným rozdělením náboje – náboj může být rovnoměrně rozdělen uvnitř koule nebo rozmáznán do tvaru střapatého míčku. Při každém speciálním předpokladu by se faktor $2/3$ změnil na nějaký jiný zlomek. Například pro náboj rozdělený uvnitř koule se $2/3$ změnil na $4/5$. Místo hádek o tom, které rozdělení je správné, se jednou pro vždy rozhodlo, že r_0 bude definováno jako nominální poloměr. Různé teorie mohou pak dodávat své oblíbené koeficienty.

Pokračujme však s naší elektromagnetickou teorií hmotnosti. Naše výpočty jsme provedli pro $v \ll c$. Co se stane, přejdeme-li k vyšším rychlostem? První pokusy v tomto směru vedly k určitým zmatkům, ale Lorentz si uvědomil, že nabitá koule by se při vysokých energiích zploštila na elipsoid a pole by se změnila podle vzorců (26.6) a (26.7), které jsme odvodili pro relativistický případ v kapitole 26. Vypočtete-li integrály pro \mathbf{p} pro tento případ, zjistíte, že pro libovolnou rychlost v se hybnost mění faktorem $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

$$\mathbf{p} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{ac^2} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (28.7)$$

Jinak řečeno elektromagnetická hmotnost roste s rostoucí rychlostí jako $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$; je to objev, který byl uskutečněn před teorií relativity.

Kdysi se navrhovaly experimenty, v nichž by se měřila závislost hmotnosti na rychlosti, aby se zjistilo, jaká část hmotnosti je mechanického a jaká elektrického původu. Tehdy se věřilo, že elektrická část hmotnosti *by se měla* měnit s rychlostí, zatímco mechanická *ne*. Ale zatímco se pracovalo na experimentech, teoretici také *nezaháleli*. *Brzy* byla vypracována teorie relativity, podle níž se *všechna* hmotnost musí měnit jako $m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ nezávisle na tom, jakého je původu. Rovnice (28.7) byla začátkem teorie, v níž hmotnost závisí na rychlosti.

Nyní se vraťme k našemu výpočtu energie pole, který nás dovedl k rovnici (28.2). Podle teorie relativity je energie W ekvivalentní hmotností W/c^2 , proto nám rovnice (28.2) říká, že pole elektronu by mělo mít hmotnost

$$m'_{\text{elek}} = \frac{W_{\text{elek}}}{c^2} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{ac^2}, \quad (28.8)$$

což není totéž jako elektromagnetická hmotnost m_{elek} v rovnici (28.4). Navíc zkombinujeme-li rovnice (28.2) a (28.4), dostaneme

$$W_{\text{elek}} = \frac{3}{4} m_{\text{elek}} c^2.$$

Tento vzorec byl objeven před vznikem teorie relativity a když si Einstein a další fyzici začali uvědomovat, že vždy musí platit $W = mc^2$, byl z toho pěkný zmatek.

28.4 SÍLA, KTEROU ELEKTRON PŮSOBÍ SÁM NA SEBE

Nesrovnalost mezi dvěma vzorci je obzvláště nepřijemná, neboť jsme předtím pečlivě dokazovali, že elektrodynamika je konzistentní s principem relativity. Naproti tomu z teorie relativity bez pochyby vyplývá, že hybnost musí být rovna energii krát v/c^2 . Takže jsme vedle – museli jsme někde udělat chybu. V našich výpočtech jsme žádnou algebraickou chybu neudělali, ale na něco jsme zapomněli.

Při odvozování našich rovnic pro energii a hybnost jsme předpokládali platnost zákonů zachování. Předpokládali jsme, že jsme vzali v úvahu *všechny* síly a započítali jsme všechnu práci a hybnost, pocházející z jiných „neelektrických“ mechanismů. Máme-li nabitou kulovou plochu, budou na ni působit elektrické síly, které jsou navzájem odpudivé, a elektron se bude chtít rozletět. Protože je to systém s nevyváženými silami, může to vést ke všem možným chybám v zákonech, které určují vztah mezi energií a hybností. Abychom dostali *konzistentní* obraz, musíme si představit, že něco drží elektron pohromadě. Náboje musí být *drženy* na kouli nějakými „gumičkami“ – něčím, co zabraňuje nábojům odletět. Byl to Poincaré, kdo poprvé upozornil na to, že takovéto gumičky – nebo cokoliv to je, co drží elektron pohromadě – se musí vzít v úvahu při výpočtu energií a hybností. Z toho důvodu jsou neelektrické dodatečné síly známé pod elegantním názvem – Poincarého napětí. Zahrneme-li do výpočtů tyto dodatečné síly, hmotnosti získané oběma způsoby se změň (v jistém smyslu to závisí na detailních předpokladech). Výsledky pak souhlasí s teorií relativity, tj. hmotnost získaná při výpočtu hybnosti vyjde stejná jako při výpočtu energie. Avšak obě obsahují *dva* příspěvky – elektromagnetickou hmotnost a hmotnost z Poincarého napětí. Jen při započítání těchto dvou částí dostaneme konzistentní teorii.

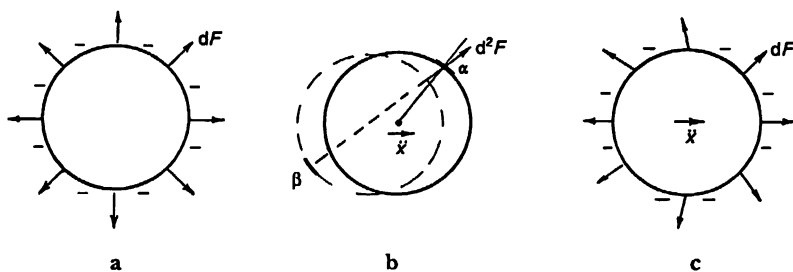
Není proto možné, aby všechna hmotnost byla elektromagnetická, jak jsme doufali původně. Teorie, která kromě elektrodynamiky nic jiného neuvažuje, je nelegální. Je třeba k ní něco přidat. Nezáleží, na tom nazveme-li to „gumičky“ nebo Poincarého napětí nebo nějak jinak – jsou to síly, které musí v přírodě existovat, má-li být uvažovaná teorie konzistentní.

Je nám jasné, že jakmile jsme do elektronu vložili nějaké síly, začala se nám celá myšlenková kráska ztrácet. Věci se zkomplikovaly. Vznikají otázky: jak silná jsou ta napětí? Co se s elektronem děje? Osciluje? Jaké jsou jeho vnitřní vlastnosti? Atd, atd. Možná, že elektron má nějaké komplikované vnitřní vlastnosti. Kdybychom v tomto duchu budovali teorii elektronu, dostali bychom zvláštní předpovědi o vlastnostech elektronu – například oscilační módy, které zjevně nikdo nepozoroval. Říkáme zjevně, protože v přírodě pozorujeme mnoho věcí, kterým ještě nerozumíme. Jednoho dne můžeme zjistit, že jedna z věcí, kterým dnes nerozumíme (například mion) může být ve skutečnosti vysvětlena oscilací Poincarého napětí. Nezdá se to být pravděpodobné, ale nelze to do budoucna vyloučit. Ve fyzice elementárních částic je stále mnoho věcí, kterým nerozumíme. V každém případě složitá struktura, která z této teorie vyplývá, je nežádoucí a pokus vysvětlit všechnu hmotnost pomocí elektromagnetických pojmů (alespoň způsobem, který jsme popsali) vedl do slepé uličky.

Zamysleme se nad tím, proč říkáme, že známe hmotnost, když je hybnost pole úměrná rychlosti. Je to prosté. Hmotnost je koeficient, který určuje vztah mezi hybností a rychlostí. Ale na hmotnost se lze dívat i jinak: částice má hmotnost, získává-li působením vnější síly zrychlení. Možná tomu lépe porozumíme, když se blíže podíváme na to, odkud síly pocházejí. Jak víme, že musí působit síla? Protože jsme dokázali zákon zachování hybnosti pro pole. Budeme-li nabitou částici chvíli tlačit, objeví se v elektromagnetickém poli hybnost. Hybnost se musela do pole odněkud dostat. Musela tam být síla působící na elektron, která jej rozhýbala; kromě síly, kterou vyžaduje

mechanická setrvačnost, ještě i síla, která je tu díky elektromagnetickému působení. A musí tu být odpovídající zpětná síla na toho kdo tlačí. Ale odkud ta síla pochází?

Vypadá to přibližně takto: Elektron si můžeme představit jako nabitou kulovou plochu. Když je v klidu, každý kousek náboje elektricky odpuzuje každý jiný kousek, ale síly jsou navzájem vyvážené, takže tu není žádná výsledná síla (obr. 28.3a). Jakmile se však elektron začne pohybovat zrychleně, síly už nebudou v rovnováze, protože elektromagnetické působení potřebuje nějaký čas, aby se dostalo od jedné části elektronu k druhé. Například síla působící na část α na obr. 28.3b pocházející od části β na opačné straně závisí na poloze v předcházejícím čase, jak je znázorněno. Velikost i směr síly závisí na pohybu náboje. Když se elektron pohybuje zrychleně, mohou vypadat síly působící na různé části elektronu tak, jak vidíme na obr. 28.3c. Po sečtení se tyto síly navzájem nezruší. Zruší se při rovnoměrné rychlosti, ačkoliv navenek to vypadá, jakoby zásluhou retardace vznikla nevyvážená síla i v tomto případě. Ukazuje se, že výsledná síla vzniká jen při zrychleném pohybu elektronu. Při zrychlení není akce a reakce v různých částech elektronu stejná a elektron vyvíjí sílu, kterou působí sám na sebe a která jej brzdí. Elektron si svépomocně brání v pohybu.



Obr. 28.3. Síla, kterou zrychlující elektron působí sám na sebe, se v důsledku retardace nerovná nule (Pod dF chápeme sílu působící na plošný element dS a pod d^2F sílu, kterou náboj na plošném elementu dS_β působí na plošný element dS_α .)

Tuto vlastnost lze, i když těžko, vypočítat. Nechceme se však pouštět do takových zdlouhavých výpočtů. Řekneme si, jaký je výsledek ve speciálním případě poměrně jednoduchého pohybu v jednom směru, řekněme podél osy x . Vlastní sílu lze pak psát ve tvaru řady. První člen řady závisí na zrychlení \ddot{x} , druhý je úměrný \dot{x} atd. Používáme označení $\dot{x} = dx/dt$, $\ddot{x} = d^2x/dt^2$, $\dddot{x} = d^3x/dt^3$ atd. Výsledek je

$$F = \alpha \frac{e^2}{ac^2} \ddot{x} - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{x} + \gamma \frac{e^2 a}{c^4} \dddot{x} + \dots, \quad (28.9)$$

kde α a γ jsou numerické koeficienty, jejichž velikost je řádově 1. Koeficient α u členu \ddot{x} závisí na předpokládaném rozložení náboje. Je-li náboj na kouli rozložen rovnoměrně, $\alpha = 2/3$. Je tu tedy člen úměrný zrychlení, který je nepřímo úměrný poloměru a elektronu, a který přesně souhlasí s hodnotou, kterou jsme dostali v rovnici (28.4) pro m_{elek} . Zvolíme-li jiné nábojové rozdělení, změní se α , a právě tak se změní i zlomek $2/3$ v rovnici (28.4). Člen s \dot{x} nezávisí na předpokládaném poloměru ani na předpokládaném rozložení náboje; jeho příslušný koeficient je vždy $2/3$. Další člen je úměrný poloměru a a jeho koeficient γ závisí na nábojovém rozložení. Všimněte si, že bude-li se poloměr elektronu blížit nule, bude se poslední člen (a všechny vyšší) blížit nule. Druhý člen zůstává konstantní, ale první člen – elektromagnetická hmotnost – roste

do nekonečna. Tato nekonečnost vzniká v důsledku síly, která působí mezi jednotlivými částmi elektronu, v důsledku toho, že jsme připustili něco, co je nesmysl – možnost, aby „bodový“ elektron působil sám na sebe.

28.5 POKUSY O MODIFIKACI MAXWELLOVY TEORIE

Nyní bychom chtěli pohovořit o tom, jak by bylo možné pozměnit Maxwellovu elektrodynamiku, a to takovým způsobem, abychom nadále mohli zachovat představu elektronu jako jednoduchého bodového náboje. Podobných pokusů bylo už mnoho a některé teorie dokonce dokázaly zařadit, že všechna hmotnost elektronu byla elektromagnetická. Ale žádná z těchto teorií neměla dlouhý život. I tak je zajímavé pohovořit o některých navrhovaných možnostech, abychom viděli, jak umí lidská dovednost zápasit s problémy.

Naši teorii elektromagnetizmu jsme začali pojednávat o působení dvou nábojů. Pak jsme vytvořili teorii o těchto interagujících nábojích a skončili jsme u teorie pole. Uvěřili jsme jí natolik, že jsme její pomocí chtěli určovat, jakou silou působí jedna část elektronu na druhou. Možná, že celý problém je v tom, že elektrony samy na sebe nepůsobí. Možná, že to byla přehnaná extrapolace, když jsme ze vzájemného působení jednotlivých elektronů usuzovali, že elektron působí sám na sebe. Proto bylo navrženo i několik teorií, v nichž je možnost elektronu působit sám na sebe vyloučena. V takovýchto teoriích se už nekonečnosti pocházející ze samopůsobení nevyskytují. Také se v nich už neobjevuje žádná elektromagnetická hmotnost částice. Všechna hmotnost je mechanická, ale v teorii se objevují problémy nové.

Musíme říci hned na začátku, že takové teorie vyžadují změny v chápání elektromagnetického pole. Jistě si vzpomínáte, jak jsme na začátku říkali, že síla působící na částici v libovolném bodě je určena jen dvěma veličinami – E a B . Vzdáme-li se myšlenky samopůsobení, už to nemůže být pravda, protože síly působící na elektron na určitém místě nejsou určeny celkovými intenzitami E a B , ale jen těmi jejich částmi, které pocházejí z jiných nábojů. Proto musíme vždy dávat pozor na to, jaká část E a B pochází z náboje, pro něj počítáme působící sílu, a jaká část pochází z ostatních nábojů. Tím se stává teorie mnohem pracnější, ale zbavuje nás to problémů s nekonečnem.

Můžeme tedy, *chceme-li*, vyhlásit, že nic takového, jako je působení elektronu na sebe, neexistuje, a zahodit celý soubor sil vystupujících v rovnici (28.9). V tom případě jsme však vylili s vaničkou i dítě! Protože druhý člen v rovnici (28.9), člen s \dot{x} , je nutný. Tato síla má určitý konkrétní význam. Když ji zahodíme, budeme mít znovu problémy. Náboj, který se pohybuje zrychleně, vyzařuje elektromagnetické vlny, a tedy ztrácí energii. Proto když zrychlujeme náboj, musíme vynaložit více síly než při zrychlování neutrálního objektu stejné hmotnosti – v opačném případě by se energie nezachovávala. Časový nárůst práce, kterou vynakládáme na zrychlování náboje, musí být roven ztrátě energie způsobené vyzařováním za jednu sekundu. O tomto efektu jsme už hovořili – nazývá se radiační odpor. Stále jsme však nezodpověděli jednu otázku: Odkud pochází síla, kterou musíme přemáhat touto prací? Když vyzařuje velká anténa, takové síly pocházejí ze vzájemného působení proudů v různých částech antény. Zdálo by se, že pro jeden zrychlený elektron vyzařující do prázdného prostoru může existovat jen jeden zdroj takové síly – působení jedné části elektronu na druhou.

Ještě v 32. kapitole 1. dílu jsme zjistili, že oscilující náboj vyzařuje energii rychlostí

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2 (\dot{x})^2}{c^3}. \quad (28.10)$$

Podívejme se, jaký musí být výkon při překonávání samopůsobící síly dané rovnicí (28.9). Výkon je roven síla krát rychlost, tj. $F\dot{x}$:

$$\frac{dW}{dt} = \alpha \frac{e^2}{ac^2} \dot{x}'\dot{x} - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{x}'\dot{x} + \dots \quad (28.11)$$

První člen je úměrný $d\dot{x}^2/dt$, a tedy odpovídá rychlosti, s jakou se mění kinetická energie $1/2 m v^2$ související s elektromagnetickou hmotností. Druhý člen by měl být roven vyzařovanému výkonu z rovnice (28.10). Ale roven není. Rozdíl spočívá v tom, že člen v rovnici (28.11) je obecně platný, zatímco rovnice (28.10) platí jen pro *oscilující* náboj. Můžeme ukázat, že je-li pohyb náboje periodický, jsou oba výrazy ekvivalentní. Za tím účelem přepíšeme druhý člen v rovnici (28.11) jako

$$-\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{d}{dt} (\dot{x}'\dot{x}) + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} (\dot{x}')^2,$$

což je jen algebraická transformace. Je-li pohyb elektronu periodický, vrací se veličina $\dot{x}'\dot{x}$ periodicky k téže hodnotě, a proto *střední* hodnota její časové derivace je rovna nule. Druhý člen je však vždy kladný (je to čtverec), proto jeho střední hodnota je kladná. Tento člen udává celkovou práci a je roven právě výrazu (28.10).

Člen s \ddot{x}' ve výrazu pro samopůsobící sílu je tedy potřebný z důvodu zachování energie ve vyzařující soustavě a nemůžeme jej zahodit. Popravdě řečeno, byl to jeden z Lorenzových triumfů – důkaz, že taková síla existuje a že pochází z působení elektronu na sebe sama. Musíme věřit myšlence samopůsobení elektronu a člen s \ddot{x}' *potřebujeme*. Problém je, jak dostat tento člen aniž bychom dostali zároveň první člen v rovnici (28.9), který je příčinou všech těžkostí. To právě nevíme. Vidíte, že klasická teorie elektronu se dostala do slepé uličky.

Několik pokusů, jak se z toho dostat změnou zákonů, tu už byla. Jeden z nich, navržený Bornem a Infeldem, předpokládá komplikovanou změnu Maxwellových rovnic – takovou, že tyto přestávají být lineární. Přitom elektromagnetická energie a hybnost mohou vycházet konečně. Jenže navrhované zákony předpokládají jevy, které nikdy nebyly pozorovány. Jejich teorie trpí i jinými nedostatky, k nimž přijdeme později a které jsou společné všem pokusům o odvrácení zmíněných problémů.

Následující zajímavou možnost navrhl Dirac. Připusťme, že působení elektronu na sebe není určeno prvním členem v rovnici (28.9), ale *druhým*. Pak dostal znamenitý nápad, jak se zbavit jednoho členu, a přitom zachovat druhý. Podívejte se, řekl, udělali jsme speciální předpoklad tím, že jsme vzali v úvahu jen *retardovaná* řešení Maxwellových rovnic. Kdybychom místo toho vzali *advansované* vlny, dostali bychom něco jiného. Výraz pro samopůsobící sílu by byl

$$F = \alpha \frac{e^2}{ac^2} \dot{x}' + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{x}' + \gamma \frac{e^2 a}{c^4} \dot{x}'. \quad (28.12)$$

Je to přesně tatáž rovnice jako (28.9) kromě znaménka u druhého členu a některých vyšších členů řady. (Změna z retardovaných na advansované vlny je jen změnou *znaménka* časového posunu, a to je ekvivalentní, což je zřejmé, se změnou znaménka t . V rovnici (28.9) to vede ke změně znaménka všech lichých derivací.) Stanovme tedy nové pravidlo, a to takové, že elektron na sebe působí jednou polovinou *rozdílu* retardovaného a advansovaného pole, které sám produkuje. Rozdíl rovnic (28.9) a /28.12) dělený dvěma je

$$F = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{x}' + \text{vyšší členy.}$$

Ve všech vyšších členech se poloměr a objevuje s nějakou kladnou mocninou v čitateli. Proto když v limitě přicházíme k bodovému náboji, dostaneme jen jeden člen – a to právě potřebujeme. Takovým způsobem dostal Dirac sílu radiačního odporu a zbavil se setrvačných sil. Elektromagnetická hmotnost neexistuje a klasická teorie je zachráněna – ale za cenu svévolného předpokladu o samopůsobící síle.

Libovůle tohoto dodatečného Diracova předpokladu byla alespoň částečně odstraněna Wheelerem a Feynmanem, kteří navrhli ještě podivnější teorii. Předpokládali, že bodové náboje interagují jen s jinými náboji a že tato interakce je zprostředkována z poloviny retardovanými a z poloviny advansovanými vlnami. Ukazuje se, což je překvapující, že ve většině případů nepozorujeme účinky advansovaných sil, ale právě ony ovlivňují vznik radiačního odporu. Radiační odpor *není* důsledkem působení elektronu na sebe, ale vzniká následujícím zvláštním způsobem: Zrychluje-li se elektron v čase t , zatřese všemi ostatními náboji na světě v *pozdějším* čase $t' = t + r/c$ (kde r je vzdálenost k jinému náboji), neboť na ně působí *retardované* vlny. Ale pak tyto ostatní náboje působí zpětně na původní elektron prostřednictvím svých *advansovaných* vln, které k němu přijdou v čase $t'' = t' - r/c$, což je, zřejmě, rovno t . (Tyto náboje také působí zpětně svými retardovanými vlnami, ale to odpovídá jen obyčejným „odraženým“ vlnám.) Kombinace advansovaných a retardovaných vln znamená, že v okamžiku svého zrychlení je oscilující elektron pod vlivem sil všech ostatních nábojů, které se „chystají“ absorbovat jeho vyzařované vlny. Vidíte, do jakých zamotaných situací se lidé dostanou, když chtějí dostat teorii elektronu!

Ještě si povíme o dalším druhu teorie, abychom ukázali, jak lidé uvažují, když se dostanou do problémů. Bude to další modifikace zákonů elektrodynamiky, kterou navrhl Bopp. Je třeba si uvědomit, že rozhodneme-li se jednou změnit zákony elektromagnetizmu, můžeme začít z libovolného konce. Můžeme změnit zákon síly pro elektron, nebo můžeme změnit Maxwellovy rovnice (jak jsme viděli v popsanych případech), nebo můžeme udělat změny někde jinde. Jedna z možností je změnit vzorce, které vyjadřují potenciály pomocí nábojů a proudů. Jeden z našich vzorců určoval potenciály v nějakém bodě pomocí hustoty proudu (nebo náboje) ve všech ostatních bodech v předcházejícím čase. Pomocí čtyřvektorového označení lze potenciál psát ve tvaru

$$A_\mu(1, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{j_\mu \left(2, t - \frac{r_{12}}{c} \right)}{r_{12}} dV_2. \quad (28.13)$$

Boppova skvělá jednoduchá myšlenka je takováto: Je možné, že všechny problémy pocházejí z faktoru $1/r$ v integrálu. Začneme předpokladem, že závislost potenciálu v daném bodě na hustotě nábojů v ostatních bodech je dána *nějakou* funkcí vzájemné vzdálenosti bodů, řekněme $f(r_{12})$. Celkový potenciál v bodě (1) pak dostaneme integrováním výrazu j_μ krát tato funkce přes celý prostor

$$A_\mu(1) = \int j_\mu(2) f(r_{12}) dV_2.$$

To je všechno. Žádná diferenciální rovnice, nic víc. Přece jen jedna věc. Požadujeme, aby výsledek byl relativisticky invariantní. Proto za vzdálenost bychom měli brát invariantní vzdálenost mezi dvěma body v časoprostoru. Druhá mocnina této vzdálenosti (kromě znaménka, což však není podstatné) je

$$s_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - r_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2. \quad (28.14)$$

V relativisticky invariantní teorii by tedy naše funkce měla záviset na velikosti s_{12} nebo, což je totéž, na s_{12}^2 . Proto podle Boppovy teorie platí

$$A_\mu(1, t_1) = \int j_\mu(2, t_2) F(s_{12}^2) dV_2 dt_2. \quad (28.15)$$

(Integrovat se musí, samozřejmě, přes čtyřrozměrný objem $d t_2 d x_2 d y_2 d z_2$.)

Zbývá jen vybrat vhodnou funkci F . O této funkci předpokládáme jen jedno, že je velmi malá s výjimkou případu, kdy argument je blízky nule – graf funkce F bude mít tvar znázorněný na obr. 28.4. Je to úzké maximum s konečnou plochou, se středem v $s^2 = 0$ a šířkou přibližně rovnou a^2 . Řekáme přibližně, neboť vypočteme-li potenciál v bodě (1), dostaneme nezanedbatelný příspěvek jen od těch bodů (2), pro něž se $s_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - r_{12}^2$ liší od nuly méně než $\pm a^2$. Můžeme to vyjádřit tím, že řekneme, že F je nezanedbatelné jen pro

$$s_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - r_{12}^2 \approx a^2. \quad (28.16)$$

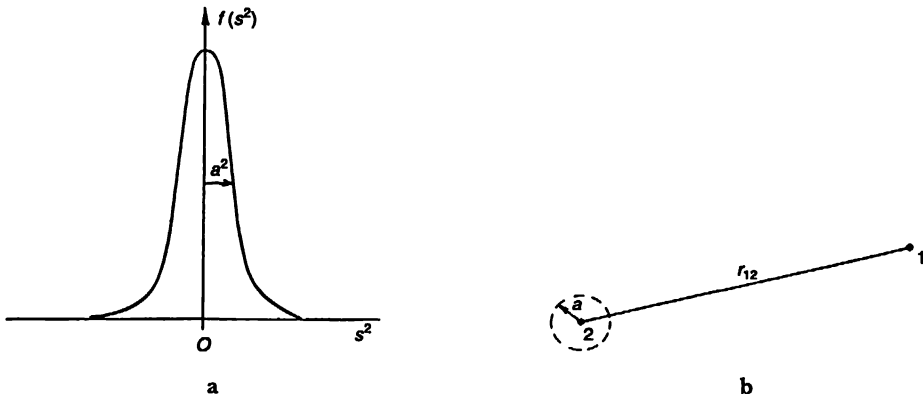
To je hlavní myšlenka. Chcete-li, můžete ji vyjádřit matematicky přesněji.

Dále předpokládejme, že a je velmi malé v porovnání s běžnými objekty, jako jsou elektromotory, generátory apod., takže v běžných úlohách bude platit $r_{12} \gg a$. Potom rovnice (28.16) říká, že do integrálu v rovnici (28.15) přispívají jen ty náboje, pro něž je $t_1 - t_2$ v malém intervalu

$$c(t_1 - t_2) \approx \sqrt{r_{12}^2 \pm a^2} \approx r_{12} \sqrt{1 \pm \frac{a^2}{r_{12}^2}}.$$

Jelikož $a^2/r_{12}^2 \ll 1$, můžeme odmocninu aproximovat výrazem $1 \pm a^2/2r_{12}^2$, takže

$$t_1 - t_2 \approx \frac{r_{12}}{c} \left(1 \pm \frac{a^2}{2r_{12}^2} \right) = \frac{r_{12}}{c} \pm \frac{a^2}{2r_{12}c}.$$



Obr. 28.4. Funkce $F(s^2)$ používaná v Boppově nelokální teorii

A v čem je význam tohoto výsledku? Říká nám, že pro integrál vyjadřující A_μ v čase t_1 jsou důležité jen ty časy t_2 , které se od t_1 , v němž určujeme potenciál, odlišují zpožděním r_{12}/c , tedy se zanedbatelnou korekcí za předpokladu, že $r_{12} \gg a$. Jinými slovy, jsme-li daleko od nábojů, mění se Bopova teorie na Maxwellovu teorii v tom smyslu, že z ní dostáváme efekt retardace.

Ve skutečnosti můžeme přibližně vidět, co nám dává integrál v rovnici (28.15). Integrujeme-li nejdříve přes proměnnou t_2 od $-\infty$ do ∞ při fixovaném r_{12} , s_{12} se také mění od $-\infty$ do ∞ . Všechn vklad do integrálu bude pocházet z hodnot na malém intervalu t_2 šířky $\Delta t_2 = 2 \times a^2 / 2 r_{12} c$ se středem $t_1 - r_{12}/c$. Řekněme, že funkce $F(s^2)$ má hodnotu K pro $s^2 = 0$; integrování přes t_2 pak dává přibližně $K j_\mu \Delta t_2$ nebo

$$\frac{K a^2}{c} \frac{j_\mu}{r_{12}}.$$

Měli bychom, samozřejmě, vzít hodnotu j_μ v čase $t_2 = t_1 - r_{12}/c$, takže rovnice (28.15) by měla tvar

$$A_\mu(1, t_1) = \frac{K a^2}{c} \int \frac{j_\mu \left(2, t_1 - \frac{r_{12}}{c} \right)}{r_{12}} dV_2.$$

Zvolíme-li $K = q^2 c / 4 \pi \epsilon_0 a^2$, máme opět retardované potenciálové řešení Maxwellových rovnic – včetně $1/r$ závislosti! A všechno jsme dostali díky jednoduchému předpokladu, že potenciál v jednom bodě časoprostoru závisí na proudové hustotě ve všech ostatních bodech časoprostoru, ale s váhovým faktorem, kterým je nějaká úzká funkce čtyřrozměrné vzdálenosti dvou bodů. Tato teorie opět předpovídá konečnou elektromagnetickou hmotnost elektronu a dává z hlediska teorie relativity správný vztah mezi energií a hmotností. Tak to i musít být, neboť je to teorie od počátku relativisticky invariantní, a tak je, zdá se, všechno v pořádku.

K této teorii, jakož i ke všem ostatním, které jsme zmínili, je však jedna principiální námitka. Všechny částice, které známe, splňují zákony kvantové mechaniky, a proto musíme udělat kvantově mechanickou modifikaci elektrodynamiky. Světlo se chová jako fotony. Maxwellova teorie tedy není stoprocentní. Proto musít být elektrodynamika změněna. Už jednou jsme říkali, že naše snahy o uhlazení klasické teorie mohou být jen zbytečnou ztrátou času. Je docela možné, že v kvantově elektrodynamice problémy zmizí, nebo budou nějak řešitelné. Jenže ony nezmizí. To je i jeden z důvodů, proč lidé vynaložili tolik úsilí na odstranění klasických problémů – doufali, že kdyby se *daly* „vyžehlit“ klasické problémy, a *potom* by se provedla kvantová modifikace, bylo by „vyžehleno“ všechno. V Maxwellově teorii však zůstávají problémy i po kvantově mechanických úpravách.

Kvantové efekty vedou k určitým změnám – změní se vzorec pro hmotnost a objeví se Planckova konstanta \hbar ; ale chceme-li dostat konečné výsledky, musíme omezit integrační hranici právě tak, jak jsme to udělali v klasickém případě, když jsme integraci zastavili při $r = a$. A výsledek závisí na tom, jakým způsobem jsme omezili integraci. Bohužel, nyní nemůžeme ukázat, že problémy jsou opravdu v podstatě stejné, neboť z kvantové mechaniky jsme toho zatím probrali velmi málo a z kvantové elektrodynamiky ještě méně. Nezbyvá nám nic jiného než věřit, že kvantová úprava Maxwellovy elektrodynamiky vede k nekonečné hmotnosti bodového elektronu.

Je však pravda, že zatím se nikomu nepodařilo udělat z *libovolné* z modifikovaných teorií *vnitřně konzistentní* kvantovou teorii. Na základě Bornových a Infeldových myšlenek nikdy nebyla vybudována uspokojivá kvantová teorie. Na základě Diracovy nebo Wheelerovy a Feynmanovy teorie s advansovanými a retardovanými vlnami nikdy nebyla vybudována uspokojivá kvantová

teorie. Ani u Boppovy teorie se to nepodařilo. Dodnes není řešení tohoto problému známo. Nevíme, jak vytvořit konzistentní teorii včetně kvantové mechaniky, která nevede k nekonečné vlastní energii elektronu, nebo libovolného bodového náboje. Právě tak neexistuje uspokojivá teorie, která popisuje nebodový náboj. Je to nevyřešený problém.

V případě, že se chystáte vytvořit teorii, v níž je zcela odstraněno působení elektronu na sebe a elektromagnetická hmotnost nemá smysl, a chcete-li pak z toho vytvořit kvantovou teorii, musíme vás varovat, že zaručeně budete mít problémy. Existence elektromagnetické hmotnosti je experimentálně potvrzena – je dokázáno, že část hmotnosti je elektromagnetického původu.

V starších knihách je obvykle psáno, že protože nás příroda neobdařila dvěma druhy částic, jedněmi neutrálními a druhými nabitými, ale jinak stejnými, nebudeme nikdy schopni říci, jaká část hmotnosti je elektromagnetického a jaká část mechanického původu. Ukázalo se však, že příroda byla tak laskavá a obdařila nás právě takovými objekty, takže porovnáním pozorované hmotnosti nabitě a nenabitě částice můžeme rozhodnout, zda elektromagnetická hmotnost existuje. Jsou to například neutrony a protony. Působí na sebe obrovskými silami – jadernými silami, jejichž původ je neznámý. Ale jak jsme už zmínili, jaderné síly mají jednu zvláštní vlastnost. Bereme-li v úvahu jen tyto síly, jsou neutron a proton stejné částice. *Jaderné* síly působící mezi neutronem a protonem, neutronem a neutronem, protonem a protonem jsou pokud víme vždy tytéž. Jen elektromagnetické síly jsou různé. Po elektrické stránce jsou proton a neutron jako den a noc. A to jsme právě chtěli. Máme dvě částice, které jsou identické z hlediska silných interakcí, ale různé z hlediska elektromagnetických interakcí. A mezi jejich hmotnostmi je malý rozdíl. Hmotnostní rozdíl mezi protonem a neutronem, vyjádřený jako rozdíl klidových energií mc^2 v jednotkách MeV, je přibližně 1,3 MeV, což je 2,6-krát hmotnost elektronu. Podle klasické teorie je jejich poloměr přibližně roven 1/3 až 1/2 poloměru elektronu, což je asi 10^{-13} cm. Přirozeně, měli bychom vycházet z kvantové teorie, ale jakousi podivnou shodou okolností se všechny konstanty (2π , \hbar , apod.) zkombinují tak, že kvantová teorie dává přibližně tentýž poloměr jako klasická teorie. Jediná chyba je ve znaménku. Neutron je *těžší* než proton.

Tabulka 28.1 Hmotnosti částic³⁸⁾

Částice	Náboj	Hmotnost (MeV)	Δm (MeV)
n (neutron)	0	939,5	
p (proton)	1	938,2	-1,3
π -mezon	0	135,0	
	± 1	139,6	+4,6
K-mezon	0	497,8	
	± 1	493,9	-3,9
Σ (sigma)	0	1 191,5	
	+1	1 189,4	-2,1
	-1	1 196,0	+4,5

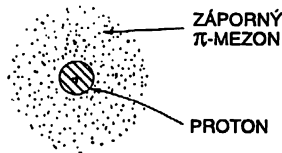
$\Delta m = (\text{hmotnost nabitě částice}) - (\text{hmotnost neutrální částice})$

³⁸⁾ Hmotnosti mezonů a částice sigma byly později nepatrně upřesněny (K-mezon 497,7; 493,6, sigma 1192,6; 1 189,4; 1 197,4) MeV. Kromě toho byly objeveny další dublety a tripletly částic. (Pozn. red.)

V přírodě se vyskytují ještě další páry nebo triplety částic, které jsou kromě elektrického náboje stejné. Ty interagují s protony a neutrony prostřednictvím jaderných sil, které mají původ v „silných“ interakcích. Při těchto interakcích se částice daného druhu, řekněme π -mezony, chovají stejně s výjimkou svého elektrického náboje. V tab. 28.1 uvádíme přehled takových částic spolu s jejich naměřenými hmotnostmi. Nabitě mezony, ať už jsou kladné, nebo záporné, mají hmotnost 139,6 MeV, zatímco neutrální π -mezon je o 4,6 MeV lehčí. Věříme, že tento hmotnostní rozdíl je elektromagnetického původu. Odpovídá poloměru částice 3 až $4 \cdot 10^{-14}$ cm. Z tabulky je vidět, že hmotnostní rozdíly jiných částic jsou řádově stejné.

Velikost těchto částic můžeme určit i jiným způsobem, například z jejich zdánlivého průřezu při vysoce energetických srážkách. Zdá se, že elektromagnetické hmotnosti obecně souhlasí s elektromagnetickou teorií, musíme však při výpočtu integrálu pro energii pole zastavit hranici integrování při poloměru, který určíme těmito jinými metodami. Z toho důvodu věříme, že rozdíly představují elektromagnetickou hmotnost.

Jistě vás trápí opačná znaménka hmotnostních rozdílů v tabulce. Lze pochopit, proč jsou nabitě částice těžší než neutrální. Ale co s takovými dvojicemi jako proton a neutron, kde jsou naměřené hmotnosti opačné? Ukazuje se, že tyto částice jsou komplikované a výpočet jejich elektromagnetických hmotností dá více námahy. Tak například neutron. I když je jeho celkový náboj roven nule, v jeho nitru je náboj určitým způsobem rozložen – je to jen *celkový* náboj, který je roven nule. Ve skutečnosti věříme, že v některých časových okamžicích vypadá neutron jako proton se záporným π -mezonovým „oblakem“ kolem sebe, jak to vidíme na obr. 28.5. Neutron je „neutrální“, neboť jeho celkový náboje je nulový, ale má elektromagnetickou energii (má například magnetický moment). Proto bez detailnější teorie vnitřní struktury neutronu nemůžeme rozhodnout, jaké je znaménko elektromagnetického hmotnostního rozdílu.



Obr. 28.5. Neutron si někdy můžeme představit jako proton obalený záporným π -mezonem

Chceme zdůraznit tyto body:

1. Elektromagnetická teorie předpovídá existenci elektromagnetické hmotnosti, ale zároveň je to její kámen úrazu, neboť se při tom ukazuje, že teorie je nekonzistentní, a totéž platí o jejích kvantových modifikacích.
2. Existence elektromagnetické hmotnosti je experimentálně dokázána.
3. Elektromagnetické hmotnostní rozdíly mají řádově velikost hmotnosti elektronu.

Takže jsme se opět vrátili k původní Lorentzově myšlence: je možné, že celá hmotnost elektronu je elektromagnetického původu a že celá hmotnost 0,511 MeV má původ v elektrodynamice. Nebo to tak není? Nevíme, protože teorii nemáme.

Musíme se ještě zmínit o jednom velmi nepřesném poznatku. Existuje jedna částice, jmenuje se *mion* dříve též μ -mezon, která se kromě své hmotnosti nijak neliší od elektronu. Interaguje s neutrinami a s elektromagnetickým polem, ale nepůsobí na ni jaderné síly. V ničem se nechová jinak než elektron – alespoň v ničem, což by nebylo možné vysvětlit jako důsledek její větší hmotnosti (je 206,77. krát větší než hmotnost elektronu). Až někdo jednou objasní hmotnost

elektronu, zůstane záhadou, odkud vzal mion takovou hmotnost. Proč? Protože vše, co dělá elektron, dělá i mion – proto by měly hmotnosti vycházet stejné. Jsou lidé, kteří pevně věří, že mion a elektron jsou tytéž částice a v konečné teorii bude rovnice pro hmotnost představovat kvadratickou rovnici se dvěma kořeny – jeden pro každou částici. Jsou i tací, kteří předpokládají, že to bude transcendentní rovnice s nekonečným počtem kořenů, a pak je třeba jen hádat, jaké jsou hmotnosti ostatních částic v posloupnosti řešení a proč tyto částice nebyly dosud objeveny³⁹⁾.

28.6 POLE JADERNÝCH SIL

· Chtěli bychom uvést několik poznámek o té části hmotnosti částic, která není elektromagnetického původu. Odkud pochází tato velká část hmotnosti? Kromě elektrodynamických sil máme i jiné síly, a to jaderné, které mají své teorie pole (ačkoliv v současnosti nikdo neví, zda jsou správné). Tyto teorie také předpovídají energii pole, která nám dává hmotnostní člen pro částici jádra analogicky k elektromagnetické hmotnosti. Mohli bychom je nazývat π -mezonová hmotnost pole. Jeho hodnota bude zřejmě velká, neboť jde o velké síly, které jsou možná příčinou hmotností těžkých částic. Mezonové teorie pole jsou však v nedokonalém stavu. Dokonce ani v tak dobře rozpracované teorii, jako je elektromagnetismus, se nám nepodařilo překonat překážky spojené s objasněním hmotnosti elektronu. V mezonových teoriích jsme v tomto směru také utrpěli porážku.

Přece se však na chvíli zastavíme u mezonových teorií, neboť je tu zajímavá souvislost s elektrodynamikou. V elektrodynamice může být pole popsáno pomocí čtyřpotenciálu, který vyhovuje rovnici

$$\square^2 A_\mu = \text{zdroje}.$$

Viděli jsme, že část pole může být vyařována a může existovat nezávisle na zdrojích. Jsou to fotony, které popisujeme diferenciální rovnicí bez zdrojů

$$\square^2 A_\mu = 0.$$

Fyzici se snažili dokázat, že jaderné síly také mají své fotony; předpokládali, že jsou to π -mezony zvané též piony, které se popisují analogickou diferenciální rovnicí. (Jelikož lidský mozek není dost dokonalý, nedokážeme vymyslet něco opravdu nového. Proto vycházíme z analogie s tím, co už známe.) Mezonová rovnice by tedy mohla mít tvar

$$\square^2 \Phi = 0,$$

kde Φ by byl nějaký jiný čtyřvektor nebo skalár. Zjistilo se, že pion nemá žádnou polarizaci, proto by Φ měl být skalár. Podle jednoduché rovnice $\square^2 \Phi = 0$ by se mezonové pole mělo měnit jako $1/r^2$ v závislosti na vzdálenosti od zdroje tak, jak je to v elektrickém poli. Ale my víme, že jaderné síly klesají mnohem rychleji, proto naše rovnice nebude v pořádku. Existuje způsob, jak to změnit bez narušení relativistické invariance. K d'Alambertovu operátoru můžeme přičíst nebo od něj odečíst konstantu násobenou Φ . Yukawa proto navrhl následující rovnici pro volná kvanta jaderného pole

³⁹⁾ Později byla objevena další taková částice, taon. Hmotnost mionu odpovídá 105,7 MeV, hmotnost taonu 1784 MeV. (Pozn. red.)

$$\square^2 \Phi - \mu^2 \Phi = 0, \quad (28.17)$$

kde μ^2 je konstanta, tj. invariantní skalár. (Jelikož \square^2 je skalární čtyřrozměrný diferenciální operátor, jeho invariance se přidáním dalšího skaláru nenaruší.)

Podíváme se, co nám rovnice (28.17) dá v případě, že jaderné síly se s časem nemění. Hledáme sféricky symetrické řešení rovnice

$$\nabla^2 \Phi - \mu^2 \Phi = 0$$

v okolí nějakého bodového zdroje, který je, řekněme, v počátku. Je známo, že závisí-li Φ jen na r , platí

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi).$$

Máme tedy rovnici

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi) - \mu^2 \Phi = 0$$

neboli

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi) = \mu^2 (r\Phi).$$

Uvažujeme-li $(r\Phi)$ jako jednu funkci, zjistíme, že máme rovnici, s níž jsme se v minulosti setkali už vícekrát. Její řešení je

$$(r\Phi) = Ke^{\pm\mu r}.$$

Je zřejmé, že s rostoucí r nemůže Φ růst do nekonečna, proto znaménko plus v exponentu vyloučíme. Řešení je

$$\Phi = K \frac{e^{-\mu r}}{r}. \quad (28.18)$$

Tato funkce se nazývá *Yukawův potenciál*. V případě přitažlivých sil je K záporné a jeho velikost je určena z experimentálně pozorované síly působení. Yukawův potenciál jaderných sil klesá rychleji než $1/r$ díky exponenciálnímu faktoru. Potenciál – a tím i síla – se při vzdálenostech větších než $1/\mu$ blíží nule mnohem rychleji než $1/r$, jak je ukázáno na obr. 28.6. „Dosah“ jaderných sil je mnohem menší než „dosah“ sil elektrostatických. Je experimentálně zjištěno, že působnost jaderných sil nepřesahuje 10^{-13} cm, proto $\mu \approx 10^{15} \text{ m}^{-1}$.

Nakonec se podíváme na vlnové řešení rovnice (28.17). Dosadíme-li

$$\Phi = \Phi_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

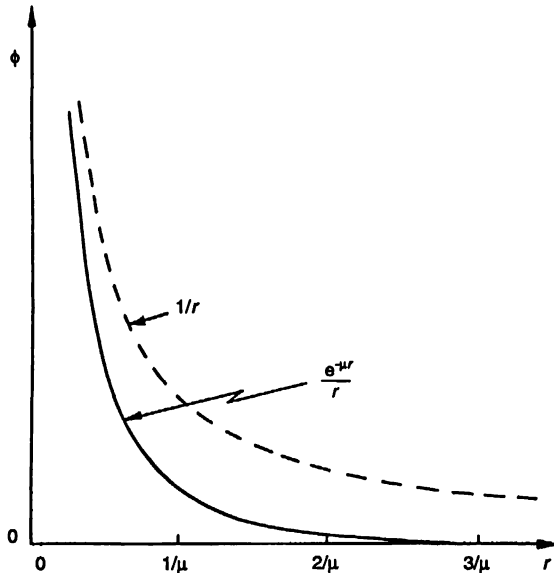
do rovnice (28.17), dostaneme

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \mu^2 = 0.$$

Využijeme-li vztah mezi frekvencí a energií a mezi vlnovým vektorem a hybností, tak jako jsme to udělali na konci 34. kapitoly 1. dílu, dostaneme vztah

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = \mu^2 \hbar^2,$$

který nám říká, že hmotnost Yukawova „fotonu“ je rovna $\mu\hbar/c$.



Obr. 28.6. Yukawův potenciál $e^{-\mu r}/r$ ve srovnání s Coulombovým potenciálem $1/r$

Dosadíme-li za μ náš odhad 10^{15} m^{-1} , který odpovídá pozorovanému dosahu jaderných sil, vyjde nám hmotnost $3 \cdot 10^{-25} \text{ g}$ nebo 170 MeV , což je přibližně rovno pozorované hmotnosti π -mezonu. Proto z analogie s elektrodynamikou bychom mohli říci, že π -mezon je „fotonem“ pole jaderných sil. My se však snažíme myšlenky elektrodynamiky rozšířit do oblastí, kde ve skutečnosti nemusí platit – dostali jsme se za hranice elektrodynamiky k problému jaderných sil.

PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 28.1 ■ Za předpokladu, že klidová hmotnost elektronu odpovídá jeho elektrostatické energii a že náboj elektronu je rovnoměrně rozprostřen v kulovém objemu, vypočítejte poloměr elektronu. Jak se změní výsledek, bude-li náboj rozprostřen pouze po povrchu koule?
- 28.2 ■ Je dobře známo, že elektrony mají kromě hmotnosti a náboje ještě vlastní moment hybnosti nazývaný spin a vlastní magnetický moment. Tyto veličiny jsou vázány vztahem $\frac{\text{moment hybnosti}}{\text{magnetický moment}} = \frac{m}{q}$. Uvedený vztah platí s přesností na 0,1 %. Budeme předpokládat, že celá hmotnost elektronu je elektromagnetického původu, tj. dána vztahem (28.4).
- a) Ve středu rovnoměrně nabitě kulové slupky o poloměru a a celkovém náboji q umístíme magnetický dipól s magnetickým momentem μ . Ukažte, že moment hybnosti elektromagnetického pole v tom případě bude
$$L = \frac{2}{3} \frac{q\mu}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{a}.$$
- b) Určete poměr momentu hybnosti a magnetického momentu a porovnejte ho s veličinou m/q .
- c) Za předpokladu, že z-ová složka magnetického momentu elektronu μ_z je rovna $\hbar q/2m$, vypočítejte maximální povrchovou rychlost elektronu, která by odpovídala této hodnotě magnetického momentu. Podejte další vysvětlení, která považujete za potřebná. Veličina $4\pi\epsilon_0 c \hbar/q^2 = 1/\alpha$ je rovna 137.

Pohyb nábojů v elektrickém a magnetickém poli

- 29.1 POHYB V HOMOGENNÍM ELEKTRICKÉM NEBO
MAGNETICKÉM POLI
- 29.2 ANALYZÁTOR HYBNOSTI
- 29.3 ELEKTROSTATICKÁ ČOČKA
- 29.4 MAGNETICKÁ ČOČKA
- 29.5 ELEKTRONOVÝ MIKROSKOP
- 29.6 STABILIZUJÍCÍ POLE URYCHLOVAČŮ
- 29.7 FOKUSACE POMOCÍ STŘÍDAVÉHO GRADIENTU
- 29.8 POHYB VE ZKŘÍŽENÝCH ELEKTRICKÝCH
A MAGNETICKÝCH POLÍCH

29.1 POHYB V HOMOGENNÍM ELEKTRICKÉM NEBO MAGNETICKÉM POLI

Pokusíme se popsat, zejména kvalitativně, pohyb nábojů v různých podmínkách. S nejzajímavějšími jevy se setkáváme ve složitých situacích, kdy se množství nábojů pohybuje ve vnějším poli a všechny tyto náboje navzájem interagují. Tak například při průchodu elektromagnetické vlny nějakým materiálem nebo plazmatem interagují miliardy nábojů s vlnou, jakož i mezi sebou navzájem. K takovým problémům se dostaneme později. Teď si povíme něco o mnohem jednodušší úloze – o pohybu jednoho náboje v *daném* poli. V tom případě můžeme zanedbat

všechny ostatní náboje, samozřejmě, kromě těch nábojů a proudů, které kdesi existují a vytvářejí naše pole.

Nejdříve bychom se snad měli zajímat o pohyb částice v homogenním elektrickém poli. Při malých rychlostech na takovém pohybu není nic zajímavého – je to rovnoměrně zrychlený pohyb ve směru pole. Ale jakmile částice získá dostatek energie na to, aby byla relativistická, stává se pohyb složitějším. Řešení tohoto problému přenecháváme vám, pohrajte si s ním sami.

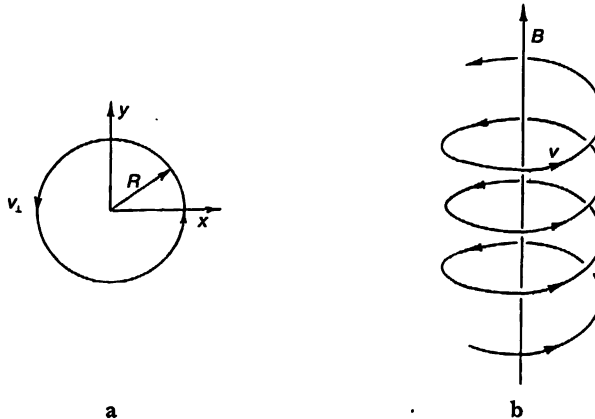
Dále budeme uvažovat jen pohyb v homogenním magnetickém poli, je-li elektrické pole nulové. Tuto úlohu jsme už řešili. Jedním z řešení byl pohyb částice po kružnici. Magnetická síla $qv \times B$ je vždy kolmá na směr pohybu, proto dp/dt je kolmé na p a má velikost vp/R , kde R je poloměr kružnice

$$F = qvB = \frac{vp}{R}.$$

Poloměr kružnice je tedy

$$R = \frac{p}{qB}. \quad (29.1)$$

To je jedna možnost. Má-li však jedna složka pohybu částice směr pole, zůstává tato složka konstantní, protože žádná složka magnetické síly ve směru pole nepůsobí. Obecně se pohyb částice v homogenním magnetickém poli skládá z pohybu s konstantní rychlostí rovnoběžnou s B a z kruhového pohybu v rovině kolmé na B – výsledná trajektorie je šroubovice (obr. 29.1). Poloměr šroubovice je dán rovnicí (29.1), nahradíme-li p složkou hybnosti p_{\perp} kolmou na směr pole.

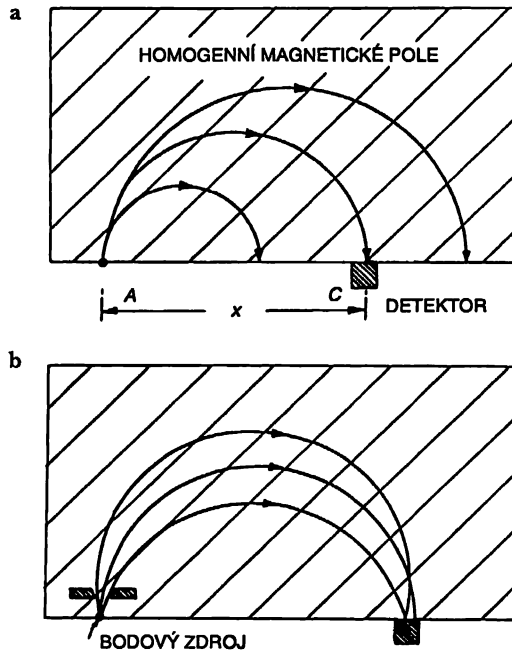


Obr. 29.1. Pohyb částice v homogenním magnetickém poli

29.2 ANALYZÁTOR HYBNOSTI

Homogenní magnetické pole se často používá ve fyzice vysokých energií jako „analyzátor hybnosti“ nebo „hybnostní spektrometr“. Předpokládejme, že nabitě částice jsou vystřelovány do homogenního magnetického pole v bodě A , jak vidíme na obr. 29.2a, kde je magnetické pole kolmé na rovinu nákresu. Každá částice se bude pohybovat po kružnici, jejíž poloměr je úměrný hybnosti částice. Vstupují-li všechny částice do pole ve směru kolmém na okraj pole, budou z pole vycházet ve vzdálenosti x (od A), jež je úměrná jejich hybnosti. Detektor umístěný v bodě C bude registrovat jen ty částice, jejichž hybnost je v intervalu Δp v okolí hodnoty $p = qBx/2$.

Samozřejmě, není třeba, aby částice prošla celý úhel 180° předtím, než je registrována, ale tento „ 180° stupňový spektrometr“ má speciální vlastnost: všechny částice do něj nemusí nutně vstupovat pod pravým úhlem. Obr. 29.2b ukazuje trajektorie tří částic, které mají stejnou hybnost, ale vstupují do pole pod různými úhly. Vidíte, že jejich trajektorie jsou různé, ale všechny opouštějí pole velmi blízko bodu C. Říkáme, že je tam ohnisko. Tato ohnisková vlastnost má tu výhodu, že v bodě A jsou přípustné i větší úhly, ačkoliv obvykle jen v určitém omezeném rozsahu, jak vidíme na obrázku. Při větším úhlovém rozsahu registrujeme za daný časový úsek větší počet částic, a tím snižujeme čas potřebný k měření.



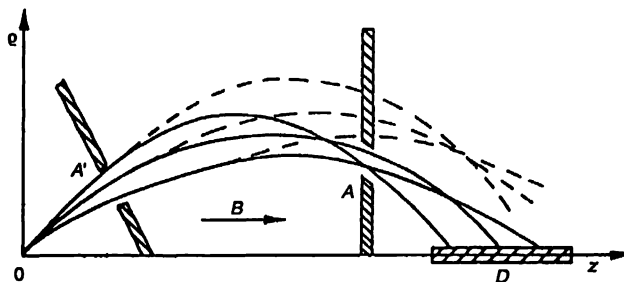
Obr. 29.2. Hybnostní spektrometr s 180° -stupňovou fokusací. Pole je homogenní. a) různé hybnosti, b) různé úhly (magnetické pole má směr kolmý na rovinu obrázku.)

Změnou magnetického pole nebo pohybem detektoru podél osy x , nebo použitím většího množství detektorů na nějakém intervalu x můžeme měřit „spektrum“ hybnosti vstupujícího paprsku. (Spektrém hybnosti rozumíme funkci $f(p)$, která nám udává počet částic $f(p)dp$ s hodnotnou hybností v intervalu od p do $(p + dp)$. Tímto způsobem se určovalo například rozdělení energií při β -rozpadu různých jader.

Existuje ještě mnoho dalších druhů hybnostních spektrometrů, popíšeme však už jen jeden z nich, který se vyznačuje mimořádnou schopností akceptovat velké *prostorové* úhly. Je založen na šroubovicových trajektorích částice v homogenním poli, jak jsme viděli na obr. 29.1. Představme si cylindrickou souřadnicovou soustavu ϱ, φ, z , v níž má osa z směr pole. Je-li částice vyzářena z počátečního bodu pod nějakým úhlem α vzhledem k ose z , bude se pohybovat po šroubovici, jejíž rovnice je

$$\varrho = a \sin kz, \quad \varphi = bz,$$

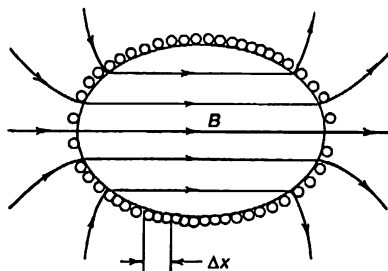
kde a , b a k jsou parametry, které můžeme snadno vyjádřit pomocí p , α a magnetického pole B . Znázorníme-li si graficky vzdálenost ρ od osy jako funkci z , při dané hybnosti, ale různých počátečních úhlech, dostaneme křivky, které jsou na *obr. 29.3* znázorněny plnou čarou. (Všimněte si, že jsou to vlastně určité projekce šroubovice.) Čím je úhel mezi osou z a počátečním směrem větší, tím větší je maximální hodnota ρ , ale podélná rychlost je menší, takže trajektorie odpovídající různým úhlům mají tendenci sblíhat se do ohniska v blízkosti bodu A znázorněného na obrázku. Je-li v okolí bodu A úzký otvor, projdou jím jen ty částice, jejichž počáteční úhel je v určitém intervalu. Ty jsou pak registrovány delším detektorem D .



Obr. 29.3. Spektrometr s axiálním polem

Částicím, které mají vyšší počáteční hybnost, ale vycházejí ze zdroje pod jiným úhlem, odpovídají trajektorie znázorněné přerušovanou čarou, které neprocházejí otvorem v A . Přístroj nám tedy vybírá malý interval hybnosti. Výhodou tohoto spektrometru v porovnání s předcházejícím je, že otvory v A a A' mohou být prstencovité, a mohou tak být registrovány částice, které vycházejí ze zdroje pod dost velkým prostorovým úhlem. Může být využita velká část vyletujících částic, což je důležitá výhoda pro slabé zdroje nebo pro velmi přesná měření.

Za tuto výhodu však musíme „platit“, protože požadujeme homogenní magnetické pole velkému objemu, a to je obvykle prakticky možné jen pro částice s nízkou energií. Vzpomínáte si, že jeden ze způsobů, jak dostat homogenní pole, byl takovýto: Navineme cívku na povrch koule tak, aby povrchová proudová hustota byla úměrná sinu úhlu. Lze dokázat, že totéž platí pro rotační elipsoid. Proto takové spektrometry jsou často zhotovovány tak, že se navine elipsoidální cívka na dřevěnou (nebo hliníkovou) kostru. Jediné, co při tom požadujeme, je, aby proud v každém intervalu Δx byl stejný tak, jak je znázorněno na *obr. 29.4*.

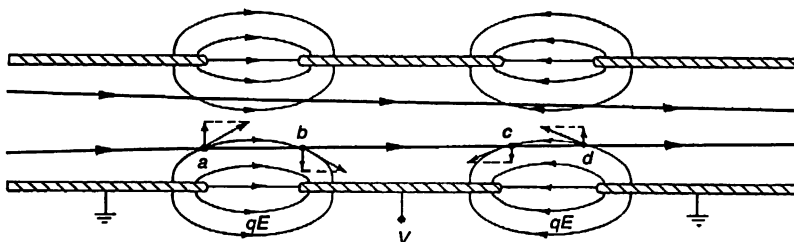


Obr. 29.4 Elipsoidální cívka se stejným proudem v každém axiálním intervalu Δx uvnitř vytváří homogenní magnetické pole.

29.3 ELEKTROSTATICKÁ ČOČKA

Fokusace částic má četné využití. Například elektrony, které opouštějí katodu v televizní trubici, jsou soustředěny do ohniska na obrazovce a vytvářejí tam malou tečku. V tomto případě se snažíme shromáždit všechny elektrony stejné energie, ale s různými počátečními úhly, a soustředit je do malého bodu. Je to podobná úloha jako fokusace světla pomocí čoček. Zařízení, která se totéž dělají s částicemi, se také nazývají čočky.

Jako příklad uvádíme elektronovou čočku na *obr. 29.5*. Je to elektrostatická čočka, jejíž činnost závisí na elektrickém poli mezi dvěma sousedními elektrodami. Její činnost nejlépe pochopíme, když zvážíme, co se stane se svazkem rovnoběžných částic, který vchází zleva. Když se elektrony dostanou do oblasti *a*, působí na ně ze strany síla, která jim uděluje určitý impuls a vychyluje je směrem k ose. Můžete se domnívat, že získají stejný impuls opačného směru v oblasti *b*, ale není tomu tak. V čase, kdy se elektrony dostanou do *b*, bude jejich energie už větší, a tak stráví v této oblasti méně času. Síly jsou stejné, ale doba je menší, proto i impuls je menší. Při průchodu oblastmi *a* a *b* elektrony získávají výsledný impuls, díky němuž se jejich trajektorie vychylují směrem k ose do jednoho společného bodu. Při opouštění oblasti vysokého napětí dostávají částice opět impuls síly směrem k ose. V oblasti *c* směřuje síla ven a v oblasti *d* směřuje dovnitř k ose, ale částice zůstává v této oblasti déle, takže opět dostává nenulový výsledný impuls. Pro ne příliš velké vzdálenosti od osy je celkový impuls podél celé čočky úměrný vzdálenosti od osy (víte proč?), a to je právě nutná podmínka fokusace čočkového typu.

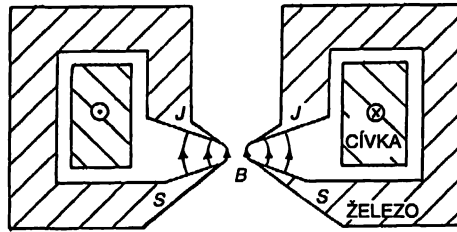


Obr. 29.5. Elektrostatická čočka. Znázorněné křivky jsou siločáry vektoru qE

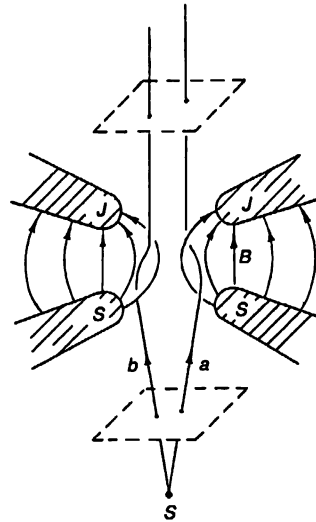
Pomocí stejných úvah lze ukázat, že k fokusaci dochází vždy, když je potenciál střední elektrody kladný nebo záporný vzhledem k ostatním dvěma. Elektrostatické čočky tohoto typu se běžně používají v katodových trubkách a některých elektronových mikroskopech.

29.4 MAGNETICKÁ ČOČKA

Další druh čočky, s nímž se často setkáváme v elektronových mikroskopech, je magnetická čočka, schématicky znázorněná na *obr. 29.6*. Cylindricky symetrické elektromagnety s ostrými kruhovými pólovými nástavci vytvářejí v malé oblasti silné nehomogenní pole. Elektrony, které vertikálně procházejí touto oblastí, se sbíhají do ohniska. Mechanismus fokusace nejlépe pochopíte z *obr. 29.7*, kde je nakreslena zvětšená část oblasti s pólovými nástavci. Uvažujme dva elektrony *a* a *b*, které vycházejí ze zdroje *S* pod nějakým úhlem vzhledem k ose. Když se elektron *a* dostane k okraji pole, odkloní se směrem od nás působením horizontální složky pole.



Obr. 29.6. Magnetická čočka



Obr. 29.7. Pohyb elektronu v magnetické čočce

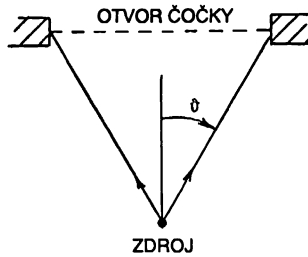
Ale tím získává boční rychlost, takže při průchodu silným vertikálním polem získává impuls směrem k ose. Když částice opouští pole, její boční pohyb se zmenší působením magnetické síly a výsledný efekt je impuls směrem k ose plus „rotace“ okolo osy. Všechny síly působící na částici b jsou opačné, takže ji také odchylují směrem k ose. Na obrázku vidíme, jak se z rozbíhajících elektronů stává paralelní svazek. Stejný účinek má čočka, když je objekt umístěn v ohnisku. Kdybychom nad naši čočku umístili ještě jednu podobnou čočku, můžeme elektrony opět soustředit do jednoho bodu, který bude obrazem zdroje S.

29.5 ELEKTRONOVÝ MIKROSKOP

Jistě víte, že elektronové mikroskopy mohou „vidět“ objekty, které jsou příliš malé na to, aby je mohly vidět optické mikroskopy. V 30. kapitole 1. dílu jsme hovořili o omezeních libovolného optického systému v důsledku difrakce na otvoru čočky. Je-li otvor objektivu vidět ze zdroje pod úhlem 2ϑ (obr. 29.8), jsou dva sousední body v okolí zdroje nerozlišitelné, je-li jejich vzájemná vzdálenost menší než

$$\delta \approx \frac{\lambda}{\sin \vartheta},$$

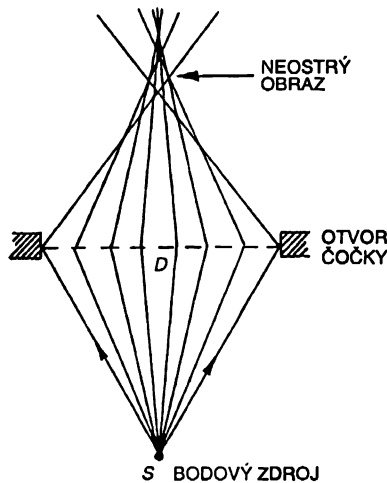
kde λ je vlnová délka světla. Pro nejlepší optické mikroskopy se θ blíží k teoretické limitě 90° , tj. δ je přibližně rovno λ , a to je asi 500nm.



Obr. 29.8. Rozlišovací schopnost mikroskopu je omezena úhlem, pod kterým vidíme objektiv ze zdroje

Stejné ohraničení platí i pro elektronové mikroskopy, ale v tomto případě je vlnová délka (pro 50-kilovoltové elektrony) přibližně 0,005 nm. Kdybychom použili objektiv s otvorem asi 30° , mohli bychom vidět objekty, které jsou od sebe vzdáleny jen 0,02 nm. Jelikož vzdálenost mezi atomy v molekule je obvykle 0,1 nebo 0,2 nm, mohli bychom tak dostat fotografie molekul. Biologie by se zjednodušila – měli bychom fotografii struktury DNA: To by bylo něco fantastického! Vždyť výzkum v současné biologii, to je vlastně snaha popsat strukturu složitých organických molekul. Jen kdybychom je mohli vidět!

Bohužel, největší rozlišovací schopnost dosažená na elektronovém mikroskopu je víc než 2 nm. Je to tím, že nikomu se ještě nepodařilo sestrojít objektiv s velkým otvorem. Všechny čočky mají sférickou aberaci, což znamená, že paprsky, které svírají s osou velký úhel, mají jiné ohnisko než paprsky, které jsou blízko osy (obr. 29.9). V optických mikroskopech lze sférickou aberaci snížit na minimum speciální technikou, ale nikomu se zatím nepodařilo vyrobit elektronové čočky bez sférické aberace.



Obr. 29.9. Sférická aberace čočky

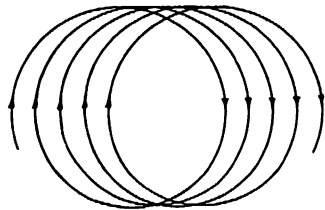
Skutečně lze ukázat, že všechny elektrostatické nebo magnetické čočky těch typů, které jsme popsali, mají určitou neodstranitelnou sférickou aberaci. Tato aberace spolu s difrakcí omezuje rozlišovací schopnost elektronových mikroskopů na jejich současnou hodnotu.

Omezení, které jsme zmínili, se nevztahuje na elektrická a magnetická pole, která nejsou axiálně symetrická, nebo nejsou v čase konstantní. Možná se jednou podaří vymyslet nový druh elektronové čočky bez aberací, které mají jednoduché elektronové čočky. Pak budeme moci fotografovat atomy přímo. Možná že jednoho dne budeme chemické sloučeniny analyzovat tak, že se podíváme na polohy jejich atomů místo sledování zabarvení nějaké usazeniny.

29.6 STABILIZUJÍCÍ POLE URYCHLOVAČŮ

Magnetická pole se také používají k formování speciálních trajektorií částic ve vysokofrekvenčních urychlovačích. Zařízení typu cyklotron a synchrotron urychlují částice na vysoké energie tím, že je opakovaně nechávají procházet silným elektrickým polem. Částice se udržují na cyklických orbitách pomocí magnetického pole.

Viděli jsme, že částice se v homogenním magnetickém poli pohybuje po kruhové dráze. To však platí jen pro dokonale homogenní magnetické pole. Představme si, že pole B je v nějaké velké oblasti jen přibližně homogenní – v jedné části je o něco silnější než ve druhé. Dáme-li do takového pole částici s hybností p , bude se pohybovat po téměř kruhových trajektoriích s poloměrem $R = p/qB$. Poloměr křivosti však bude o něco menší v oblasti, kde je pole silnější. Trajektorie nebude uzavřená kružnice, ale bude se přemísťovat polem tak, jak vidíme na *obr. 29.10*. Dalo by se říci, že malá „chyba“ pole má za následek přeskok částice na novou dráhu. Jelikož částice mohou v urychlovači udělat miliony takových přeskoků, je třeba zavést nějakou „radiální fokusaci“, která by se snažila udržet trajektorie v blízkosti požadované orbity.



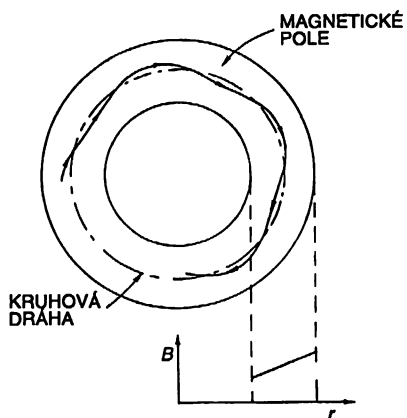
ZDE JE POLE SILNĚJŠÍ

Obr. 29.10. Pohyb částice v mírně nehomogenním poli

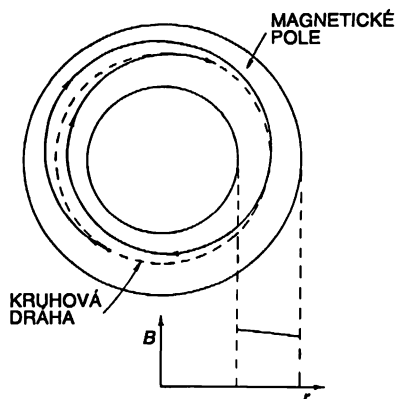
Další obtíž s homogenními poli je v tom, že částice nezůstávají v rovině. Když se začnou pohybovat s malou výchylkou, nebo když se vychýlí z roviny o malý úhel díky malé fluktuaci pole, budou dále pokračovat po šroubovicové dráze, a mohou se tak dostat k magnetickému pólu nebo k stropu, či ke spodní části vakuové komory. Aby se zabránilo těmto vertikálním pohybům, musí být přijata nějaká opatření – pole musí zabezpečovat „vertikální fokusaci“ právě tak jako radiální.

Na první pohled by se zdálo, že radiální fokusaci by bylo možné zabezpečit vytvořením magnetického pole, které roste s rostoucí vzdáleností od středu požadované dráhy. Vychýlí-li se pak částice na větší poloměr, dostane se do silnějšího pole, které její dráhu stočí zpět směrem ke správnému poloměru. Když se dostane na příliš malý poloměr, bude stáčena méně a částice se opět vrátí na původní poloměr. Částice, která se jednou vychýlí pod nějakým úhlem z ideální kružnice, začne oscilovat kolem ideální kruhové orbity tak, jak to vidíme na *obr. 29.11*. Radiální fokusace udržuje částici v blízkosti kruhové dráhy.

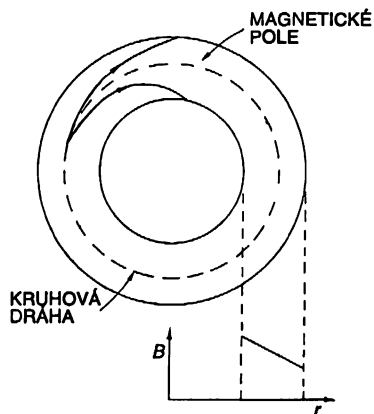
STABILIZUJÍCÍ POLE URYCHLOVAČŮ



Obr. 29.11. Radiální pohyb částice v magnetickém poli s velkým kladným sklonem



Obr. 29.12. Radiální pohyb částice v magnetickém poli s malým záporným sklonem



Obrt. 29.13. Radiální pohyb částice v magnetickém poli s velkým záporným sklonem

Určitá radiální fokusace existuje dokonce u polí s *opačným* sklonem. Dochází k ní tehdy, když poloměr zakřivení trajektorie neroste rychleji než vzdálenost částice od centra pole. Dráhy částice budou mít tvar znázorněný na obr. 29.12.

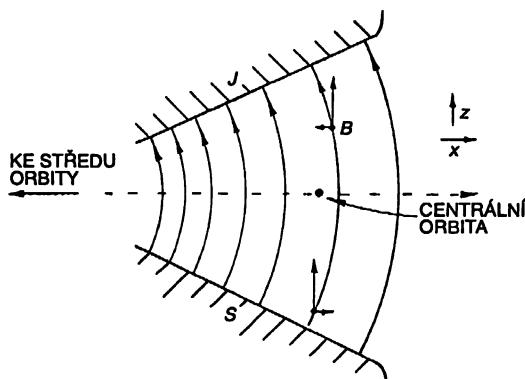
Je-li však gradient pole příliš velký, nebudou se částice vracet na původní poloměr, ale budou po spirálách postupovat směrem ven nebo dovnitř (obr. 29.13).

Sklon pole obvykle charakterizujeme pomocí relativního gradientu, nebo *indexu pole*, n

$$n = \frac{\frac{dB}{B}}{\frac{dr}{r}}. \quad (29.2)$$

Usměrnující pole vede k radiální fokusaci tehdy, je-li tento relativní gradient větší než -1 .

Radiální gradient pole vede také ke vzniku *vertikálních sil* působících na částice. Předpokládejme, že pole je silnější směrem k centru orbity a slabší směrem ven. Vertikální průřez magnetem kolmo na rovinu orbity může vypadat tak, jak to vidíte na obr. 29.14.



Obr. 29.14. Vertikální fokusující pole pozorované v rovině kolmé na orbity

(Pro protony by orbity vycházely z obrázku směrem k nám.) Má-li být pole silnější nalevo a slabší napravo, budou magnetické siločáry zakřiveny tak, jak je znázorněno. To, že to tak má být, lze ukázat použitím zákona, který říká, že v prázdném prostoru je rotace B rovna nule. Jsou-li souřadnicové osy orientovány tak, jak je vidíme na obrázku, je

$$(\nabla \times B)_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = 0$$

neboli

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial x}. \quad (29.3)$$

Jelikož předpokládáme, že $\partial B_z / \partial x$ je záporné, musí být stejně záporné i $\partial B_x / \partial z$. Je-li „nominální“ rovinou dráhy rovina symetrie, kde $B_x = 0$, bude radiální složka B_x záporná nad touto rovinou a kladná pod ní. Průběh indukčních čar je znázorněn na obrázku.

Takové pole bude mít vlastnosti vertikální fokusace. Představme si proton, který se pohybuje více méně rovnoběžně s centrální orbitou, ale nad ní. Horizontální složka B na něj bude působit silou směrem dolů. Je-li proton pod centrální orbitou, bude síla opačná. Je tu tedy efektivní vracející síla, směřující k centrální orbitě. Z našich úvah vyplývá, že k vertikální fokusaci dochází tehdy, když *vertikální pole* klesá s rostoucím poloměrem. Je-li gradient pole kladný, dochází k vertikální defokusaci. Proto pro vertikální fokusaci musí být index pole n menší než nula. Předtím jsme zjistili, že pro radiální fokusaci musí být n větší než -1 . Tyto dvě podmínky dohromady vedou k podmínce

$$-1 < n < 0$$

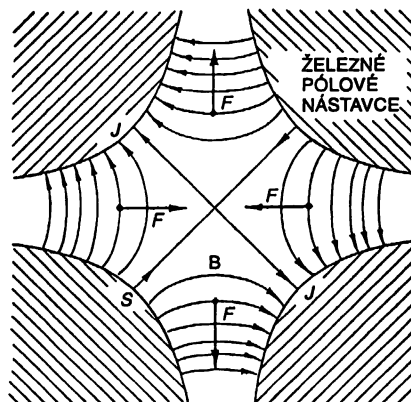
pro udržení částic na stabilních orbitách. V cyklotronech se používají hodnoty velmi blízké nule. V betatronech a synchrotronech platí nejčastěji $n = -0,6$.

29.7 FOKUSACE POMOCÍ STŘÍDAVÉHO GRADIENTU

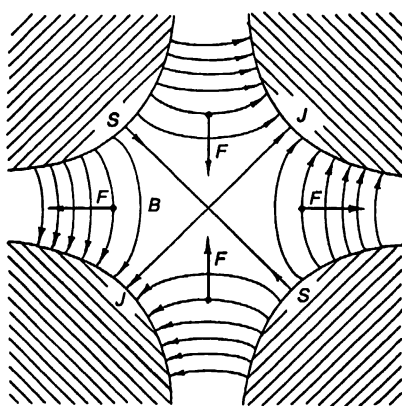
Uvedené malé hodnoty n dávají příliš „slabou“ fokusaci. Je zřejmé, že mnohem efektivnější radiální fokusaci bychom dostali při velkém pozitivním gradientu ($n \gg -1$), ale v tom případě by byly vertikální síly silně defokusační. Podobně velké záporné spády ($n \ll -1$) bysice vedly k velkým vertikálním silám, ale způsobovali by radiální defokusaci. V padesátých letech se však přišlo na to, že síla, která se střídavě mění ze silně fokusační na silně defokusační, může mít *výsledný* fokusační účinek.

Abychom vysvětlili, jak funguje *fokusace pomocí střídavého gradientu*, popíšeme nejdříve působení kvadrupólové čočky, která je založena na stejném principu. Představme si, že k poli na *obr. 29.14* přidáme homogenní záporné magnetické pole, jehož intenzita je zvolena tak, aby pole na orbitě bylo rovno nule. Výsledné pole, pro malé výchylky z neutrálního bodu, bude vypadat jako pole na *obr. 29.15*. Takový čtyřpólový magnet se nazývá kvadrupólová čočka. Částice s kladným nábojem, která se dostane (ze strany čtenáře) na levou nebo na pravou stranu směrem od centra, bude vracena zpět k centru. Když se částice vychýlí směrem nahoru nebo dolů, bude vzdalována směrem od centra. To je horizontální fokusační čočka. Je-li horizontální gradient opačný, což lze udělat tak, že všechny póly změníme na opačné, budou znaménka všech sil opačná a máme vertikální fokusační čočku (*obr. 29.16*). Pro takové čočky je intenzita pole, tedy i fokusační síly, přímo úměrné vzdálenosti čočky od osy.

Nyní si představme, že máme dvě takové čočky umístěné za sebou. Vstupuje-li částice zleva s nějakou horizontální výchylkou směrem od osy (*obr. 29.17a*), její dráha se zakříví při průchodu první čočkou směrem dovnitř. Když se dostane k druhé čočce, bude blíže k ose, a tedy síla směrem ven, a tím i odchýlení od osy bude menší. Výsledné vychýlení bude směrem k ose a *přibližným* efektem je horizontální fokusace. Na druhé straně když si všimneme částice, která je vychýlena ve vertikálním směru, bude mít její dráha tvar znázorněný na *obr. 29.17b*. Částice bude nejprve odkloněna od osy. Když se dostane k druhé čočce, bude její výchylka větší, a tím větší bude i síla, která na ni působí a zakřívuje její dráhu směrem k ose. Opět je výsledným efektem fokusace. Tak působí dvojice kvadrupólových čoček nezávisle na horizontálním a vertikálním pohybu – podobně jako v případě optické čočky. Kvadrupólové čočky se používají k formování a ovládání svazků částic, stejně jako optické čočky ovládají chod světelných paprsků.

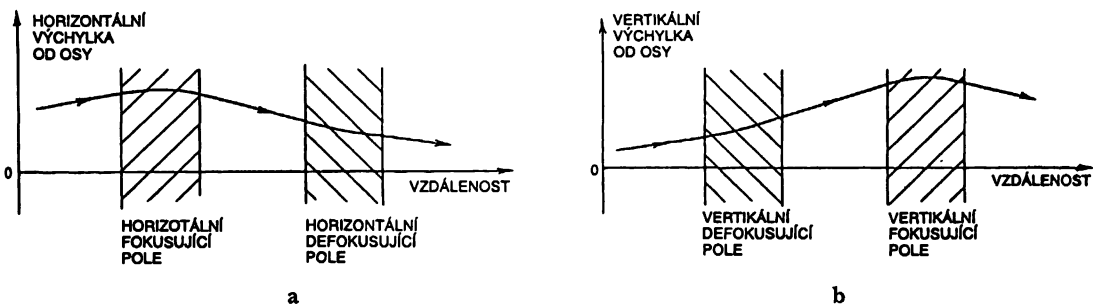


Obr. 29.15. Kvadrupólová čočka s horizontální fokusací



Obr. 29.16. Kvadrupólová čočka s vertikální fokusací

Je třeba zdůraznit, že systém střídavého gradientu nevede vždy k fokusaci. Jsou-li gradienty příliš velké (vzhledem k hybnosti částic nebo k vzdálenosti mezi čočkami), může být výsledným efektem defokusace. Sami zjistíte, že k něčemu takovému by mohlo dojít, kdyby se vzdálenost mezi čočkami na *obr. 29.17* zvýšila třikrát nebo čtyřikrát.

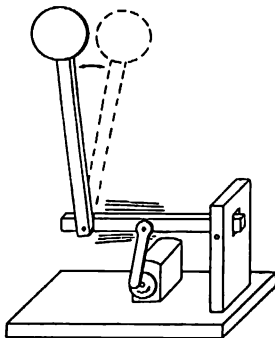


Obr. 29.17. Horizontální a vertikální fokusace s dvojicí kvadrupólových čoček

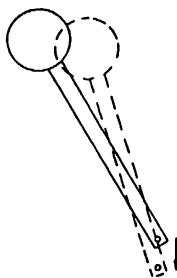
Nyní se vraťme k usměrňujícímu magnetu v synchrotronu. Můžeme uvažovat, že se skládá ze střídavé posloupnosti „kladných“ a „záporných“ čoček, které jsou vsunuty do vnějšího homogenního pole. Homogenní pole slouží k udržování částic na horizontálních kruhových drahách (nemá žádný vliv na vertikální pohyb) a střídavé čočky působí na každou částici, která „zabloudila“ – tlačí ji směrem k centrální orbitě (v průměru).

Existuje pěkná mechanická analogie, pomocí níž lze ukázat, že síly, které se mění z fokusačních na defokusační, mohou mít výsledný fokusační efekt. Představme si mechanické kyvadlo, které se skládá z *pevné* tyče a závaží na jejím konci. Druhý konec je připevněn k ose, která je pomocí čepu a kliky napojena na motor na ten jí hýbe nahoru a dolů. Takové kyvadlo má *dvě* rovnovážené polohy. Kromě normální polohy, kdy kyvadlo visí dolů, má i rovnovážnou polohu, když „visí nahoru“ – závaží se přitom nachází *nad* bodem opory (obr. 29.18).

Z následujících úvah zjistíte, že vertikální pohyb čepu je ekvivalentní se střídavou fokusační silou. Když se čep pohybuje zrychleně směrem dolů, kyvadlo se snaží pohybovat směrem dovnitř, jak to vidíme na obr. 29.19. Když je čep urychlován nahoru, je efekt obrácený. Síla, která navrácí závaží k ose, se mění, ale celkový efekt je síla směrem k ose. Proto bude kyvadlo kývat kolem neutrální polohy, která je přesně opačná vzhledem k normální.



Obr. 29.18. Kyvadlo s oscilujícím čepem může mít stabilní polohu se závažím nad čepem.

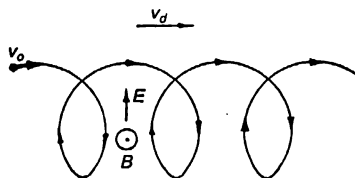


Obr. 29.19. Zrychlení čepu směrem dolů nutí kyvadlo k pohybu směrem k vertikále.

Samozřejmě existuje mnohem jednodušší způsob, jak kyvadlo udržet „vzhůru nohama“, a to *balancování* na prstu! Ale zkuste balancovat *dvě nezávislé tyče* na *jednom* prstu! Nebo jednu tyč se zavřenýma očima! Balancovat znamená provádět neustálé korekce, když se něco odchyluje od požadovaného stavu. A to obecně není možné, zejména, když se odchyluje víc věcí současně. V synchrotronu se pohybují současně miliardy částic a z nich každá může „dělat chyby“ jiným způsobem. Fokuse, kterou jsme popsali, působí na všechny tyto částice.

29.8. POHYB VE ZKŘÍŽENÝCH ELEKTRICKÝCH A MAGNETICKÝCH POLÍCH

Dosud jsme hovořili o částicích jen v elektrickém nebo jen v magnetickém poli. Existují však některé zajímavé efekty v případech, kdy oba druhy polí působí současně. Předpokládejme, že máme homogenní magnetické pole B a kolmo na něj elektrické pole E . Částice, které se začnou pohybovat kolmo na pole B , budou pokračovat po křivce, jak to vidíme na *obr. 29.20*. (Na obrázku jsou *rovinné* křivky, *nešroubovice*!) Tento pohyb lze pochopit kvalitativně. Když se částice (předpokládejme, že kladná) pohybuje ve směru E , nabírá rychlost, a proto je magnetickým polem vychylována méně. Pohybuje-li se proti poli E , ztrácí rychlost a je postupně vychylována magnetickým polem stále více. Výsledný střední efekt je „unášení“, drift ve směru $E \times B$.



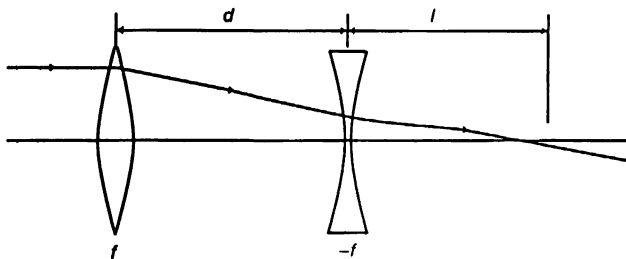
Obr. 29.20. Dráha částice ve zkřížených elektrických a magnetických polích

Lze ukázat, že tento pohyb je složen z rovnoměrného pohybu po kružnici a z rovnoměrného pohybu rychlostí $v_d = E/B$ – trajektorie na *obr. 29.20* je cykloida. Představte si pozorovatele, který se pohybuje doprava konstantní rychlostí. V jeho soustavě je naše magnetické pole přetransformováno do nového pole plus elektrického pole směrem *dolů*. Bude-li mít pozorovatel správnou rychlost, jeho celkové elektrické pole bude nulové a elektron se z jeho hlediska bude pohybovat po kružnici. Proto pohyb, který vidíme *my*, je pohyb po kružnici plus translační s rychlostí $v_d = E/B$. Pohyb elektronů ve zkřížených elektrických a magnetických polích tvoří podstatu *magnetronů*, tj. oscilátorů, které se používají ke generování mikrovlnného záření.

Existuje ještě mnoho jiných zajímavých příkladů pohybu částice v elektrických a magnetických polích, jako například dráhy elektronů a protonů uvězněných ve Van Allenových pásech, ale, bohužel, nyní nemáme čas, abychom se jimi zabývali.

PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 29.1** ■ Nabitá částice s nábojem q a klidovou hmotností m_0 je v okamžiku $t = 0$ v klidu v počátku souřadnic. Pak na ni začne působit konstantní elektrické pole ve směru osy x .
- Vypočítejte relativistickou rychlost a souřadnice částice jako funkce času.
 - Jak se změní vaše odpověď, měla-li částice v počátečním okamžiku rychlost v_0 ve směru osy y ?
- 29.2** ■ V cyklotronu se protony pohybují v homogenním magnetickém poli po kruhových trajektoriích. Najděte závislost cyklotronové frekvence a úhlové rychlosti protonů na q , B a m pro protony malých energií. Jak se bude měnit hodnota cyklotronové frekvence při růstu energie? Při jaké změně energie se frekvence změní o 1 %?
- 29.3** ■ Nabitá částice s nábojem q a hmotností m je v okamžiku $t = 0$ v klidu v počátku souřadnic. Pak na ni začne působit homogenní elektrické pole E ve směru osy y a homogenní magnetické pole B ve směru osy z .
- Určete, jak se bude částice pohybovat, tj. najděte funkce $x(t)$, $y(t)$ a $z(t)$ v nerelativistickém případě. Jakou podmínku musí v tomto případě splňovat pole E a B ?
 - Jaký bude charakter pohybu částice, bude-li $E/B > c$?
 - Nechť napětí mezi dvěma rovnoběžnými deskovými elektrodami, z nichž jedna leží v rovině $y = 0$ a druhá v rovině $y = d$, je rovno $U = Ed$. Mezi elektrodami je homogenní magnetické pole rovnoběžné s jejich rovinami. Nechť kinetická energie elektronů vylétajících ze záporně nabitých elektrody je nulová. Při jaké hodnotě magnetické indukce nedoletí emitované elektrony na druhou elektrodu?
- 29.4** ■ Princip fokuse částic v nehomogenním poli může být demonstrován na optickém modelu znázorněném na obrázku. Dokonce i tehdy, budou-li mít obě čočky v absolutní hodnotě stejnou ohniskovou vzdálenost, existují podmínky, za nichž bude tato soustava fokusovat.
- Určete závislost $l(d)$ pro světlo dopadající podél optické osy.
 - Kdy bude obraz skutečný a kdy zdánlivý?



Vnitřní geometrie krystalů

30.1 VNITŘNÍ GEOMETRIE KRYSTALŮ

30.2 CHEMICKÉ VAZBY V KRYSTALECH

30.3 RŮST KRYSTALŮ

30.4 KRYSTALOVÉ MŘÍŽKY

30.5 SYMETRIE VE DVOU ROZMĚRECH

30.6 SYMETRIE VE TŘECH ROZMĚRECH

30.7 PEVNOST KOVŮ

30.8 DISLOKACE A RŮST KRYSTALŮ

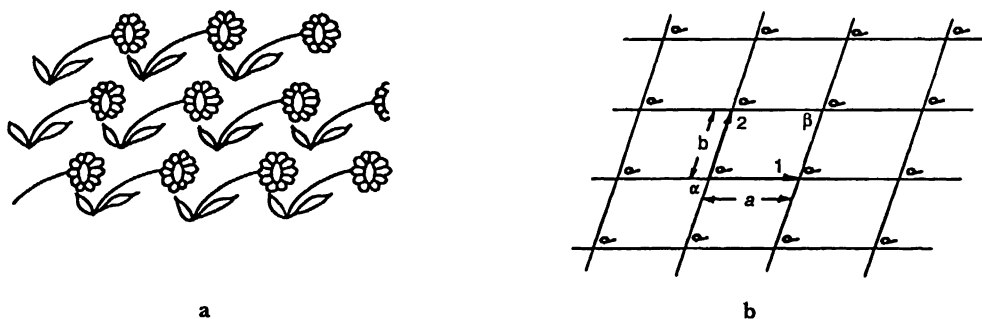
30.9 BRAGGŮV-NYEŮV MODEL KRYSTALU

30.1 VNITŘNÍ GEOMETRIE KRYSTALŮ

Studium základních zákonů elektřiny a magnetizmu jsme ukončili a nyní se budeme věnovat studiu elektromagnetických vlastností látky. Začneme popisem pevných látek, tj. krystalů. Když se atomy v látce příliš nepohybují, zůstávají seskupeny jeden u druhého v konfiguraci s nejnižší možnou energií. Jestliže se atomy v jednom místě uspořádají tak, aby měly malou energii, je pravděpodobné, že se na nějakém jiném místě uspořádají stejně. To je důvod, proč se v pevných látkách opakují stejné konfigurace atomů.

Jinými slovy, podmínky v krystalu jsou následující: Okolí každého atomu v krystalu je určitým způsobem uspořádáno a podíváte-li se na atom stejného druhu na jiném, vzdálenějším místě, zjistíte, že jeho okolí je přesně stejné. A vyberete-li si jiný atom, vzdálený o tutéž vzdálenost, ještě dále, zjistíte, že podmínky jsou opět tytéž. Uspořádání se opakuje znovu a znovu, samozřejmě, ve všech třech rozměrech.

Představte si, že máte navrhnout vzor tapety nebo látky, nebo nějaký jiný geometrický vzor na rovinné ploše, přičemž se předpokládá, že navrhnete nějaký prvek, který se bude opakovat po tak velké ploše, jak jen budete chtít. Je to dvojrozměrná analogie problému, který se v krystalu řeší ve třech rozměrech. Například obr. 30.1a představuje běžný druh tapetového vzoru. Je tu jediný prvek, který se ve vzoru neustále opakuje. Geometrická charakteristika tapetového dezénu, bere-li v úvahu jen jeho periodické vlastnosti a nezajímáme se o geometrii nebo uměleckou hodnotu samotného květu, je znázorněna na obr. 30.1b. Když začnete v libovolném bodě, můžete najít *analogický* bod posunem o vzdálenost a ve směru šipky 1. Analogický bod můžete dostat i tehdy, posunete-li se o vzdálenost b ve směru druhé šipky. Existují, samozřejmě, i jiné směry. Můžete například jít přímo z bodu α do β a dostat se do analogické polohy, jenže takový krok může být považován za postupnou kombinaci kroků podél směru 1 a pak podél směru 2. Jedna ze základních vlastností vzoru může být popsána dvěma nejkratšími kroky ke stejným sousedním polohám.



Obr. 30.1 Opakující se vzorek ve dvou rozměrech

Stejnými polohami myslíme, že kdybyste stáli v některé z těchto poloh a podívali byste se kolem, viděli byste přesně totéž, jako kdybyste stáli v některé jiné poloze. To je základní vlastnost krystalu. Jediný rozdíl je v tom, že krystal představuje trojrozměrné uspořádání místo dvojrozměrného a, přirozeně, že místo květů představuje každý prvek mřížky určité uspořádání atomů do nějaké konfigurace (například šest atomů vodíku a dva atomy uhlíku). Uspořádání atomů v krystalu lze zjistit experimentálně pomocí rentgenové difrakce. O této metodě jsme se už jednou stručně zmínili, a proto o ní nyní nebudeme hovořit. Jen si vzpomeneme, že přesné uspořádání atomů v prostoru bylo zjištěno v případě nejjednodušších krystalů a dokonce i u některých složitějších.

Vnitřní stavba krystalu se projevuje více způsoby. Za prvé, síla, která váže atomy navzájem, je obvykle silnější v jednom směru než ve druhém. To znamená, že v krystalu existují plochy, podél nichž je možné krystal snáze rozštěpit. Nazývají se *štěpné* plochy. Rozbijete-li krystal čepelí nože, rozštěpí se většinou podél této plochy. Za druhé, vnitřní struktura je často viditelná na povrchu díky způsobu, jakým krystal vznikl. Představte si, že se krystal vytváří usazováním z roztoku. Atomy se v roztoku volně vznášejí až se nakonec, když najdou polohy s nejnižší energií, usadí. (Je to, jako kdyby tapeta vznikala tak, že kvítky poletují sem a tam, až se jeden náhodně dostane na určité místo a zůstane tam přilepen. Stejně je to s dalšími, až se postupně vytváří celý vzor.) Chápete, že v některých směrech roste krystal rychleji než v jiných, a tím získává při růstu nějaký geometrický tvar. Díky tomuto jevu povrch mnoha krystalů něco odráží z vlastností vnitřního uspořádání atomů.

Tak například na *obr. 30.2a* je znázorněn typický tvar krystalu křemene, jehož vnitřní struktura je hexagonální. Všimnete-li si blíže celého krystalu, zjistíte, že zvenku to není dokonalý šestiboký hranol, neboť stěny nejsou stejně dlouhé – ve skutečnosti bývají délkové rozdíly dost velké. Ale z jednoho hlediska jde o velmi pravidelný šestiúhelník, *úhly* mezi stěnami mají přesně 120° . Je zřejmé, že velikost té či oné hrany souvisí s náhodnými procesy růstu, ale *úhly* reprezentují vnitřní symetrii. Proto každý krystal křemene má jiný tvar, ačkoliv úhly mezi jednotlivými stěnami jsou vždy tytéž.

Vnitřní symetrie krystalu chloridu sodného je také zřejmá z jeho vnějšího tvaru. Na *obr. 30.2b* je znázorněn typický tvar zrnka soli. Opět krystal není dokonalou krychlí, ale stěny svírají přesně pravý úhel.

Komplikovanějším krystalem je slída, jejíž tvar je na *obr. 30.2c*. Je to krystal s velkým stupněm anizotropie. Je to vidět i z toho, že je velmi těžké rozlomit slídu v jednom směru (na obrázku horizontálně), ale v jiném směru (vertikálně) ji lze štěpit velmi snadno. Tato vlastnost se využívala k získávání velmi pevných tenkých vrstev. Slída a křemen jsou dva příklady přírodních nerostů obsahujících oxid křemičitý. Dalším takovým příkladem je azbest, který má tu vlastnost, že je snadno štěpitelný ve dvou směrech, ale ve třetím ne. Je vytvořen z velmi silných *lineárních* vláken.

30.2 CHEMICKÉ VAZBY V KRÝSTALECH

Mechanické vlastnosti krystalů zřejmě závisejí na druhu chemických vazeb mezi atomy. Zarážející rozdíly v pevnosti podél různých směrů ve slídě závisejí na druhu meziatomových vazeb v různých směrech. V chemii jste se určitě učili o různých druzích chemických vazeb. Za prvé, jsou to iontové vazby, o nichž jsme už hovořili v souvislosti s chloridem sodným. Zhruba řečeno, atomy vodíku ztratí jeden elektron a stávají se kladnými ionty. Atomy chloru získají jeden elektron a stávají se zápornými ionty. Kladné a záporné ionty jsou uspořádány do trojrozměrné šachovnice a drží se navzájem elektrickými silami.

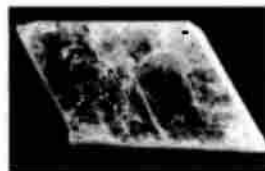
Kovalentní vazba, v níž mají dva atomy společné elektrony, se vyskytuje častěji a obvykle je velmi silná.



a



b

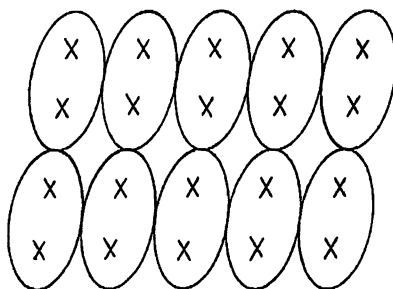


c

Obr. 30.2 Přírodní krystaly: a) křemen, b) chlorid sodný, c) slída

Například v diamantu jsou atomy uhlíku vázány kovalentně s nejbližšími sousedními atomy ve všech čtyřech směrech, a proto je krystal skutečně velmi pevný. Kovalentní vazba je i mezi křemíkem a kyslíkem v krystalu křemene, ale ve skutečnosti je to vazba jen částečně kovalentní. Elektronové páry nejsou úplně společné, proto jsou atomy částečně nabitě a krystal má v určitém smyslu iontový charakter. Příroda není tak jednoduchá, jak se jí snažíme udělat. Ve skutečnosti existují všechny možné stupně mezi kovalentní a iontovou vazbou.

Krystal cukru má zase jiný druh vazby. Jsou v něm velké molekuly, jejichž atomy se silně drží navzájem kovalentní vazbou, a proto má molekula tuhou strukturu. Ale jelikož silné vazby jsou zcela nasyceny, zůstává jen relativně slabá přitažlivost mezi jednotlivými oddělenými molekulami. V takových *molekulových* krystalech si molekuly zachovávají svou, řekněme, individualitu a vnitřní uspořádání může být takové, jako vidíme na obr. 30.3. Jelikož molekuly nejsou navzájem silně vázány, lze krystal snadno rozbít. Je to něco docela jiného než diamant, který je skutečně jednou velkou molekulou, kterou nelze rozbít, aniž bychom někde narušili kovalentní vazby. Parafín je další příklad molekulového krystalu.



Obr. 30.3 Mřížka molekulového krystalu

Extrémní příklad molekulového krystalu je pevný argon. Přitažlivost mezi atomy je v něm velmi malá – každý atom je úplně satureovaný jednoatomovou molekulou. Při velmi nízkých teplotách je však tepelný pohyb velmi slabý, proto nepatrné meziatomové síly mohou způsobit, že se atomy uspořádají do pravidelného seskupení podobně jako kuličky při nejtěsnějším uspořádání.

Kovy představují docela jinou třídu látek. Vazba je úplně jiná. Neváží se sousední atomy, ale vazba se vztahuje na celý krystal. Valenční atomy nepřísluší jednomu atomu nebo dvojici atomů, ale celému krystalu. Každý atom přispívá svým elektronem do společné „nádrže“ elektronů a kladné ionty „přebývají v moři“ záporných elektronů. Elektronové moře představuje jakési lepidlo, které drží ionty pohromadě.

Jelikož v kovu neexistují žádné speciální vazby v určitém směru, není v jeho stavbě výrazná závislost na směrech. Kovy však stále ještě patří mezi krystalické látky, protože jejich celková energie je nejnižší tehdy, když jsou ionty atomů uspořádány v nějakém určitém seskupení – ačkoliv energie tohoto preferovaného seskupení obvykle není o mnoho nižší než jiné možné energie. V prvním přiblížení jsou atomy mnohých kovů uspořádány jako kuličky při nejtěsnějším seskupení.

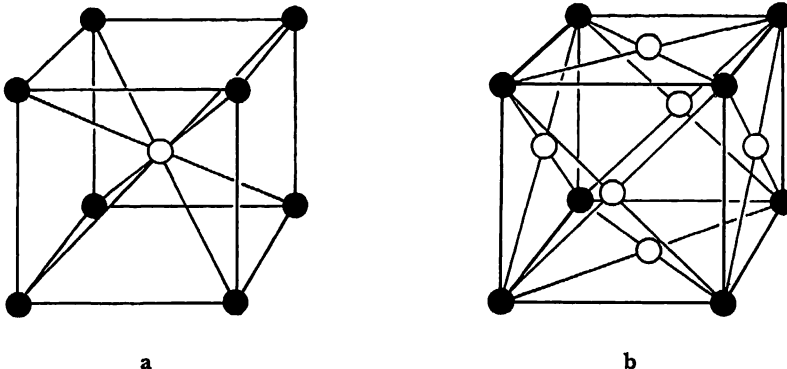
30.3 RŮST KRÝSTALŮ

Pokuste se představit si, jak se přirozenou cestou vytvářely krystaly na Zemi. Zemská kůra představuje směs atomů všech druhů. Ty se neustále mísí za pomoci sopečné činnosti, větru a vody. Ale jakýmsi trikem se atomy křemíku postupně navzájem najdou a setkají se s atomy kyslíku a vytvoří křemen. Jeden atom se vždy přidá k dalším a buduje se krystal. Směs přestává být směsí. A kdesi nedaleko se setkávají atomy sodíku a chloru a vytvářejí krystal soli.

Čím to je, že krystal, začne-li se jednou budovat, dovoluje jen určitému druhu atomů, aby se připojoval? Je to tím, že celý systém usiluje o nejnižší možnou energii. Rostoucí krystal přijme nový atom jen tehdy, když spolu s ním bude mít tak nízkou energii, jak je to jen možné. Ale jak krystal ví, že umístěním atomu křemíku nebo kyslíku do určité polohy má zaručenu nejnižší energii? Dělá to metodou pokusů a omylů. V tekutinách jsou všechny atomy v neustálém pohybu. Každý atom narazí na svého souseda přibližně 10^{13} -krát za sekundu. Narazí-li na správné místo v krystalu, kde je nízká energie, je menší pravděpodobnost, že se odrazí zpět. Postupným zkoušením po dobu milionů let, při 10^{13} pokusech za sekundu, atomy postupně budují krystal v místech, kde dosáhnou nejnižší energii. Nakonec tak narostou velké krystaly.

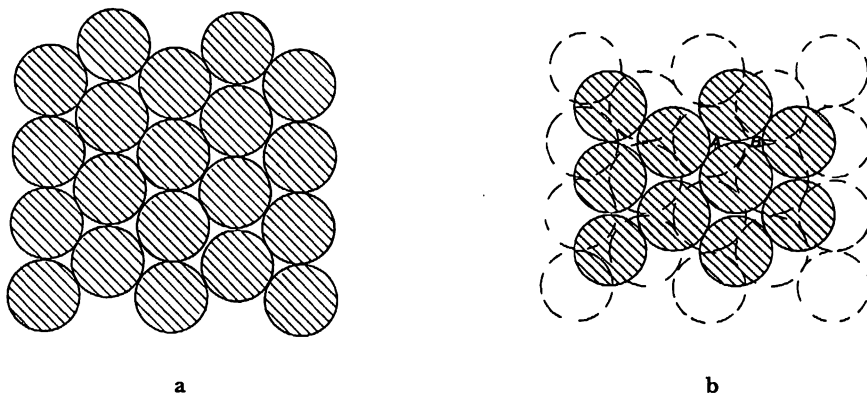
30.4 KRÝSTALOVÉ MŘÍŽKY

Uspořádání atomů v krystalu – *krystalová mřížka* – může mít různé geometrické tvary. Nejdříve popíšeme nejjednodušší mřížky, které jsou charakteristické pro většinu kovů a pro inertní plyny v pevném skupenství. Jsou to krychlové mřížky, které se mohou vyskytovat ve dvou tvarech: Prostorově centrovaná (obr. 30.4a) a plošně centrovaná krychlová mřížka (obr. 30.4b). Nákresy samozřejmě znázorňují jen jednu krychli mřížky. Musíte si představit, že vzor se opakuje donekonečna ve třech rozměrech. Aby byl obrázek názornější, jsou nakresleny jen „středy“ atomů. Ve skutečném krystalu jsou atomy téměř jako koule, které jsou ve vzájemném kontaktu. Tmavé a světlé kuličky na obrázku mohou obecně představovat buď různé, nebo stejné druhy atomů. Například železo má při nízkých teplotách prostorově centrovanou krychlovou mřížku, ale při vysokých teplotách má plošně centrovanou krychlovou mřížku. Fyzikální vlastnosti těchto dvou druhů krystalů jsou docela odlišné.



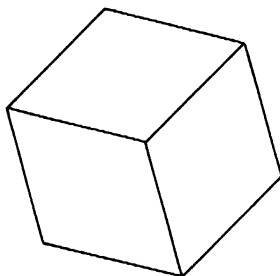
Obr. 30.4 Elementární buňka krychlového krystalu: a) prostorově centrovaná, b) plošně centrovaná

Jak takové druhy krystalů vznikají? Představte si, že máte za úkol uspořádat sférické atomy navzájem tak těsně, jak je to jen možné. Jeden způsob by byl udělat první vrstvu šestiúhelníkového uspořádání, jak je znázorněno na *obr. 30.5a*. Pak můžete vybudovat druhou vrstvu podobně jako první, ale horizontálně posunutou (*obr. 30.5b*). Dále můžete uložit třetí vrstvu. Ale pozor! Existují *dva* různé způsoby, jak umístit třetí vrstvu. Začnete-li vytvářet třetí vrstvu tak, že umístíte atom do polohy *A* (*obr. 30.5b*), bude každý atom v třetí vrstvě přímo nad atomem nejspodnější vrstvy. Když však začnete třetí vrstvu vytvářet tak, že uložíte atom do polohy *B*, budou atomy ve třetí vrstvě mít svůj střed přesně nad bodem, který je středem trojúhelníka vytvořeného třemi atomy spodní vrstvy. Každé jiné počáteční umístění je ekvivalentní buď s *A*, nebo s *B*, takže jsou jen dva způsoby umístění třetí vrstvy.



Obr. 30.5 Budování těsně uspořádané šestiúhelníkové mřížky

Má-li třetí vrstva atom v bodě *B*, je to plošně centrováná krychlová mřížka – ale viděná pod určitým úhlem. Vypadá to divně, že jsme začali šestiúhelníky a skončili jsme krychlemi. Všimněte si však, že díváme-li se na krychli z jednoho vrcholu, vidíme šestiúhelníkové obrysy. Například *obr. 30.6* by mohl představovat rovinný šestiúhelník nebo krychli viděnou z perspektivy.



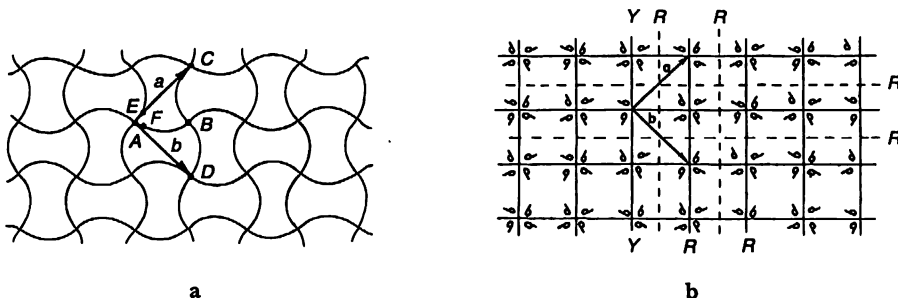
Obr. 30.6 Je toto šestiúhelník nebo krychle při pohledu z jejího vrcholu?

Doplníme-li třetí vrstvu na *obr. 30.5b* tak, že začneme s atomem v *A*, nedostaneme krychlovou strukturu, ale místo toho má mřížka jen šesterečnou symetrii. Je zřejmé, že obě možnosti, které jsme popsali, představují stejně těsné uspořádání.

Některé kovy, například měď nebo stříbro, si vybírají první alternativu – plošně centrovanou krychli. Jiné, například berylium a hořčík, volí jiné alternativy – vytvářejí šesteréčné krystaly. Je zřejmé, že to, jaký krystal se vytvoří, nezávisí jen na uspořádání malých kuliček, ale musí to být částečně určeno i jinými faktory. Konkrétně je to malá úhlová závislost meziatomových sil (nebo v případě kovů závislost na energii elektronové „nádrže“). Tohle všechno se dozvíte na přednáškách z chemie.

30.5. SYMETRIE VE DVOU ROZMĚRECH

Nyní bychom chtěli pohovořit o některých vlastnostech krystalů z hlediska jejich vnitřních symetrií. Hlavním rysem krystalů je ta vlastnost, že když se přemístíte o jednu mřížkovou jednotku od jednoho atomu k příslušnému dalšímu, budete opět v téže prostředí. To je základní předpoklad. Ale kdybyste byli atomem, byl by tu ještě jiný druh změny, která by vás dostala opět do téhož prostředí, tj. jiná možná symetrie. Na *obr. 30.7a* je znázorněn další možný „tapetový“ vzor (ačkoliv takový jste asi nikdy neviděli). Předpokládejme, že porovnáme okolí bodů *A* a *B*. Na první pohled se vám může zdát, že jsou stejná – ale ne docela. Body *C* a *D* jsou ekvivalentní s bodem *A*, ale okolí bodu *B* je jako okolí bodu *A* jen tehdy, převrátíme-li jej, tj. v zrcadlovém obrazu.



Obr. 30.7 Vzory s vyšší symetrií

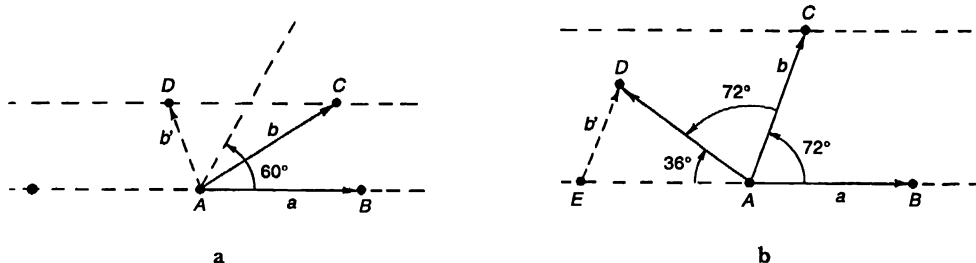
V tomto vzoru jsou další druhy ekvivalentních bodů. Například body *E* a *F* mají stejné okolí až na to, že jsou vzájemně otočeny o 90° . Rotace o úhel 90° (nebo jeho libovolný násobek) kolem vrcholů, jako je *A*, vede všude opět k témuž vzoru. Krystal s takovou strukturou je navenek pravouhlý, ale uvnitř je komplikovanější než jednoduchá krychle.

Nyní, když jsme popsali některé speciální případy, pokusíme se přijít na všechny možné symetrie, které může krystal mít. Nejdříve uvažujme, co se stane v rovině. *Rovinná* mřížka může být definována dvěma *základními* vektory, které mají počátek v jednom bodě mřížky a koncové body ve dvou *nejbližších* ekvivalentních bodech. Dva vektory *1* a *2* jsou základními vektory mřížky na *obr. 30.1*. Dva vektory *a* a *b* na *obr. 30.7a* jsou základními vektory znázorněného vzoru. Mohli bychom, samozřejmě, vybrat $-a$ místo *b* nebo $-b$ místo *a*. Jelikož *a* a *b* mají stejnou velikost a jsou na sebe kolmé, přejde při rotaci o 90° *a* do *b* a *b* do $-a$, což nám dává opět tutéž mřížku.

Vidíme, že existují mřížky, které mají „čtyřstrannou“ symetrii. A předtím jsme popsali těsné uspořádání založené na šestiúhelnících, které by mohlo mít „šestistrannou“ symetrii. Seskupení kružnic na *obr. 30.5a* se při rotaci o 60° kolem středu libovolné kružnice zobrazuje opět tentýž vzor.

Jaké jiné druhy rotační symetrie ještě existují? Můžeme mít například pětinasobné nebo osminásobné rotační symetrie? Lze snadno vidět, že tyto jsou vyloučeny. *Jedinou symetrií, založenou*

na útvaru s více než čtyřmi stranami, je šestistranná symetrie. Nejdříve ukážeme, že symetrie s více než šesti stranami je vyloučena. Zkusme si představit mřížku se dvěma stejně velkými základními vektory, které svírají úhel menší než 60° (obr. 30.8a). Předpokládáme, tedy, že body B a C jsou ekvivalentní s bodem A a že a a b jsou dva nejkratší vektory od A k jeho ekvivalentním sousedům. To je však zřejmě nesprávné, neboť vzdálenost mezi body B a C je menší než vzdálenost libovolného z nich od A . Musí tu být nějaký soused D , který je ekvivalentní s A a je k němu blíže než B nebo C . Měli bychom zvolit b' za jeden z našich základních vektorů. Proto úhel mezi dvěma základními vektory musí být 60° nebo více. Osmiúhelníková symetrie není možná.



Obr. 30.8 a) Rotační symetrie vyšší než šestinásobné nejsou možné.
b) Pětínásobná symetrie není možná.

A co takhle pětínásobná symetrie? Předpokládáme-li, že základní vektory a a b mají stejnou délku a svírají úhel $2\pi/5 = 72^\circ$ (obr. 30.8b), měl by existovat ekvivalentní mřížkový bod D odkloněný o 72° od C . Ale vektor b' směřující od E do D je menší než b , proto b není základním vektorem. Pětínásobná symetrie nemůže existovat. Jediné možnosti, které nás nepřivedou do těchto obtíží jsou $\vartheta = 60^\circ$, 90° nebo 120° . Nula nebo 180° jsou také zřejmě možné. Náš výsledek lze zformulovat i tak, že vzor může zůstat nezměněn při rotaci o celých 360° (vůbec žádná změna), o jednu polovinu, jednu třetinu, jednu čtvrtinu nebo jednu šestinu celé otáčky. A to jsou všechny možné rotační symetrie v rovině – celkem pět. Je-li $\vartheta = 2\pi/n$, mluvíme o n -násobné symetrii. Říkáme, že vzor s n rovným 4 nebo 6 má vyšší symetrii než vzor s n rovným 1 nebo 2.

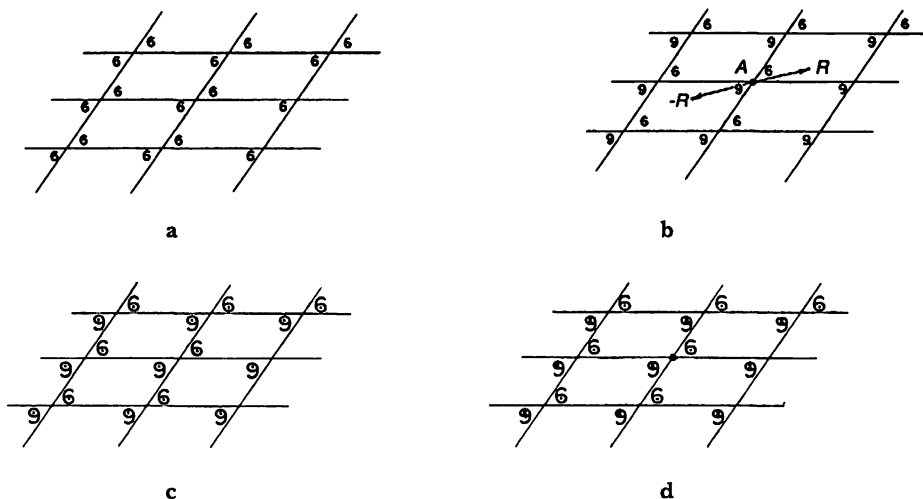
Vraťme se k obr. 30.7a. Vidíme, že vzor má čtyřnásobnou rotační symetrii. Na obr. 30.7b jsme nakreslili jiný vzor, který má tytéž vlastnosti symetrie jako obr. 30.7a. Malé značky podobné čárkám jsou asymetrické objekty, které nám slouží k určení symetrie vzoru uvnitř každého čtverečku. Všimněte si, že čárky v sousedních čtverečcích jsou převrácené, takže základní buňka je větší než jeden čtvereček. Kdyby nebyly čárky, měl by vzor také čtyřnásobnou symetrii, ale základní buňka by byla menší. Vzor na obr. 30.7 má ještě další druhy symetrie. Například při zrcadlovém zobrazení vzhledem k přerušovaným osám R – R dostaneme tentýž vzor.

A ještě je tu jeden druh symetrie pro vzor na obr. 30.7. Provedeme-li zrcadlový obraz vzhledem k ose Y – Y plus posun o jeden čtvereček doprava (nebo doleva), dostaneme opět původní vzor. Čára Y – Y se nazývá skluzná čára.

To jsou všechny možné symetrie pro dva rozměry. V prostoru existuje ještě jedna operace symetrie, jíž v dvojrozměrném případě odpovídá rotace o 180° , ale ve třech rozměrech je to zcela odlišná operace. Je to inverze. Inverzí rozumíme přemístění bodu, jehož polohový vektor je R , do bodu $-R$ (obr. 30.9b).

Při inverzi vzoru na obr. 30.9a dostáváme nový vzor, ale při inverzi vzoru (obr. 30.9b) se reprodukuje tentýž vzor. Pro dvojrozměrné vzory (jak vidíte na obrázku 30.9b) je inverze vzoru vzhledem k bodu A ekvivalentní s rotací o 180° kolem téhož bodu. Předpokládejme, že bychom vzor na

obr. 30.9b předělali na trojrozměrný tak, že bychom všechny malé znaky 6 a 9 doplnili šipkou směřující ven z obrázku. Po inverzi v třech rozměrech by všechny šipky přešly na opačné, takže by se vzor nereprodukoval. Označíme-li počátky šipek tečkami a konce křížky, můžeme sestavit trojrozměrný vzor, jako je na obr. 30.9c, který *není* symetrický vzhledem k inverzi. Můžeme také vytvořit vzor znázorněný na obr. 30.9d, který *má* takovou symetrii. Všimněme si, že trojrozměrnou inverzi *nelze* nahradit nějakou kombinací rotací.



Obr. 30.9 Symetrie vzhledem k inverzi. Vzorek b) zůstává nezměněn při $R \rightarrow -R$, ale vzorek a) se mění. Trojrozměrný vzorek d) je při inverzi symetrický, ale c) není

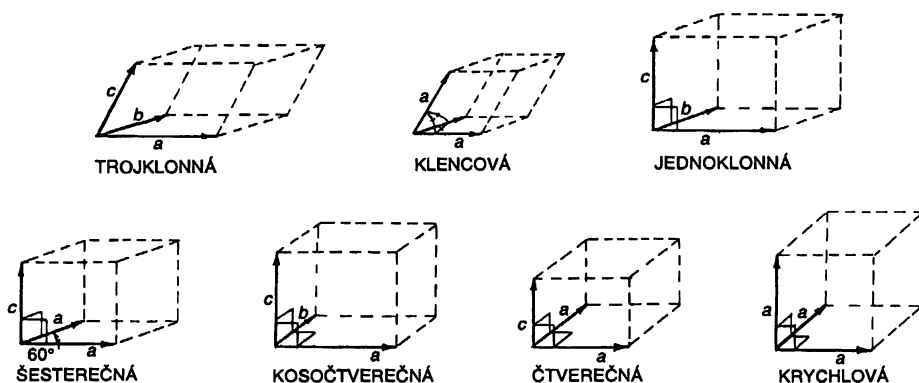
Charakterizujeme-li symetrii vzoru – nebo mřížky – týmiž druhy operací symetrie, které jsme popsali, lze ukázat, že ve dvojrozměrném případě může existovat 17 různých vzorů. Na obr. 30.1 jsme nakreslili vzor, který patří k vzorům s nejnižší symetrií, a na obr. 30.7 je ukázka vzoru s vyšší symetrií. S vymyšlením všech sedmnácti možných vzorů si můžete pohrát sami.

Je zajímavé, jak málo vzorů ze všech 17 možných se používá při navrhování tapet a textilních vzorů. Všude se setkáváme jen s týmiž třemi nebo čtyřmi základními vzory. Je to nedostatek fantazie návrhářů, nebo je to proto, že ostatní vzory nelahodí oku?

30.6 SYMETRIE VE TŘECH ROZMĚRECH

Dosud jsme hovořili jen o dvojrozměrných vzorech. To, co nás však ve skutečnosti zajímá, je uspořádání atomů ve třech rozměrech. Zprv je zřejmé, že trojrozměrný krystal bude mít *tři* základní vektory. Kdybychom se zeptali na možné operace symetrie ve třech rozměrech, zjistili bychom, že existuje 230 různých možných symetrií. Zjistých důvodů rozdělujeme těchto 230 typů na sedm tříd, které jsou znázorněny na obr. 30.10. Mřížka s nejnižší symetrií se nazývá *trojklonná*. Základní buňkou je rovnoběžnostěn. Základní vektory mají nestejně délky a žádné dva z úhlů, které navzájem svírají, nejsou stejné. Tato mřížka nemá rotační symetrii ani symetrii odrazu. Dvě možné symetrie tu však přece jen jsou – základní buňka je, nebo není změněna při inverzi vzhledem k jednomu vrcholu. (Inverzí v trojrozměrném případě rozumíme záměnu vektoru posu-

nutí R na $-R$, jinými slovy záměnu (x, y, z) za $(-x, -y, -z)$.) Trojklonná mřížka má tedy jen dvě možné symetrie s výjimkou případů, kdy základní vektory splňují určité speciální vztahy. Například jsou-li všechny vektory stejné a svírají stejné úhly, dostáváme *klencovou* mřížku znázorněnou na obrázku. Znázorněná buňka může mít ještě dodatečnou symetrii – může zůstat nezměněna při rotaci kolem nejdelší, tělesové úhlopříčky.



Obr. 30.10 Sedm tříd krystalických mřížek

Je-li jeden ze základních vektorů, například c , kolmý na ostatní dva vektory, dostáváme základní *jednoklonnou* buňku. Novou možnou symetrií je rotace o 180° kolem c . Speciálním případem je *šesterečná* buňka, v níž jsou vektory a a b stejné a svírají úhel 60° , takže při rotaci o 60° , 120° nebo 180° kolem vektoru c dostáváme tutéž mřížku (pro určité vnitřní symetrie).

Jsou-li všechny tři základní vektory navzájem kolmé, ale mají různou délku, dostáváme *kosočtverečnou* buňku. Buňka je symetrická při rotacích o 180° kolem tří os. Symetrie vyššího řádu má *čtverečná* buňka, která má všechny úhly pravé a dva její základní vektory mají stejnou délku. Nakonec je tu *krychlová* mřížka, která je nejvíce symetrická ze všech.

Smyslem všech těchto úvah o symetriích je to, že vnitřní symetrie krystalů se projevují, někdy jen nenápadným způsobem, v makroskopických fyzikálních vlastnostech krystalu. Obecně je například elektrická polarizovatelnost krystalu charakterizována tenzorem. Vyjádříme-li tento tenzor pomocí elipsoidu polarizace, lze předpokládat, že tento elipsoid bude odrážet některé vlastnosti symetrie krystalu. Například krychlový krystal je symetrický vzhledem k rotacím o 90° kolem libovolné ze tří kolmých os. Je zřejmé, že jediný elipsoid s touto vlastností je koule. *Krychlový krystal musí být izotropním dielektrikem.*

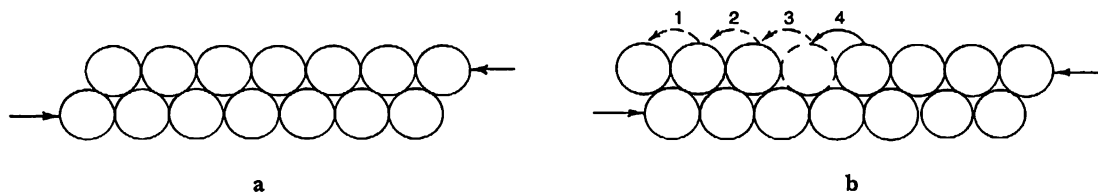
Na druhé straně čtverečný krystal má čtyřnásobnou rotační symetrii. Jeho elipsoid musí mít dvě z hlavních os stejné a třetí musí být rovnoběžná s osou krystalu. Podobně kosočtverečný krystal, protože má dvojnásobnou rotační symetrii vzhledem ke třem navzájem kolmým osám, musí mít osy totožné s osami elipsoidu polarizace. Podobně *jedna* z os jednoklonného krystalu musí být rovnoběžná s *jednou* z hlavních os elipsoidu, ale o jeho dalších osách nemůžeme nic říci. Protože trojklonný krystal nemá žádnou rotační symetrii, může být jeho elipsoid orientován libovolně.

Jak vidíme, mohli bychom si donekonečna hrát s výčtem různých symetrií a určováním jejich vztahu k různým fyzikálním tenzorům. Uvažovali jsme jen tenzor polarizovatelnosti, ale i s jinými tenzory (například tenzorem pružnosti) je to komplikovanější. Existuje matematický obor nazývaný teorie grup, který se těmito otázkami zabývá, ale obvykle se lze dopracovat k výsledku jen na základě zdravého rozumu.

30.7 PEVNOST KOVŮ

Řekli jsme si, že kovy mají obvykle krychlovou krystalickou strukturu. Nyní budeme hovořit o jejich mechanických vlastnostech, které závisejí na této struktuře. Kovy jsou obecně velmi „měkké“, neboť lze snadno posouvat jednu vrstvu krystalu vzhledem k druhé. Možná si řeknete: „Vždyť je to nesmysl, kovy jsou přece pevné!“ Není to tak. *Jednotlivé krystaly* kovu můžeme snadno deformovat.

Podívejme se na dvě vrstvy krystalu, na které působí smyková síly (*obr. 30.11a*). Na první pohled se může zdát, že celá vrstva bude odolávat působení, dokud nebude síla dostatečně velká na to, aby pohnula celou vrstvou „přes hrboly“, takže ta se posune o jedno místo doleva. Ačkoli posun se vztahuje na celou rovinu, neprobíhá to tímto způsobem. (Kdyby to tak bylo, vyšlo by vám, že kov má být mnohem pevnější, než ve skutečnosti je.) Spíše je to tak, jakoby se atomy přemísťovaly jeden po druhém. Nejdříve poskočí atom, který je úplně nalevo, potom další atd., jak je znázorněno na *obr. 30.11b*. Celkový efekt je takový, že prázdné místo mezi dvěma atomy putuje rychle směrem doprava, až se nakonec celá vrstva přemístí o jednu meziatomovou vzdálenost. Posun probíhá tímto způsobem proto, že se spotřebuje méně energie při přesunutí jednoho atomu přes hrbol než při přesunu celé řady. Jakmile je síla dostatečně velká, může proces začít a zbytek už postupuje velmi rychle.



Obr. 30.11 Skluz krystalových rovin

Ukazuje se, že ve skutečném krystalu probíhá posouvání opakovaně v jedné rovině, pak se zastaví a začne v nějaké jiné rovině. Detailní zdůvodnění, proč proces začne a proč končí, zůstává záhadou. Je vlastně velmi divné, že oblasti, v nichž posun postupně probíhá, bývají od sebe přibližně stejně vzdáleny. Na *obr. 30.12* je fotografie malého tenkého krystalu mědi, který byl „natahován“. Můžete rozeznat různé roviny, v nichž nastalo posunutí.

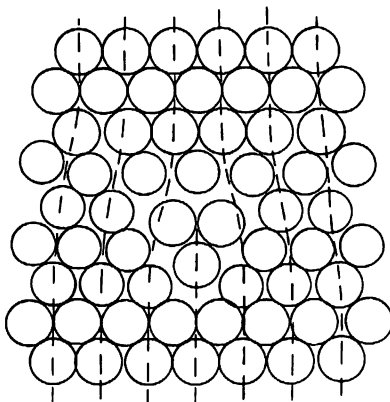


Obr. 30.12 Fotografie malého krystalu mědi po natažení (S dovolením S. S. Brennera, vědeckého pracovníka Ocelářského výzkumného centra, Monroeville, Pensylvánie, USA.)

O náhlém posunu jednotlivých rovin krystalu se můžete přímo přesvědčit. Vezmete-li si kousek tenkého drátku, který obsahuje velké krystaly, a napnete jej v blízkosti ucha, můžete slyšet „tikot“ provázející postupné zapadání rovin do svých nových poloh.

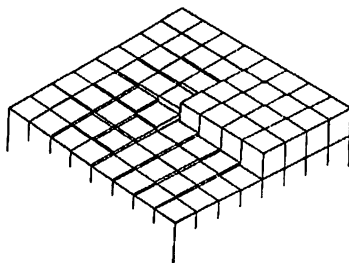
Problém „chybějícího“ atomu v řadě je o něco složitější, než se zdá z *obr. 30.11*. Máme-li víc vrstev, vznikne podobná situace jako na *obr. 30.13*.

Taková nedokonalost v krystalu se nazývá *dislokace*. Předpokládá se, že dislokace jsou buď přítomny v krystalu už při jeho formování, nebo se vytvoří u nějaké trhliny nebo zářezu na povrchu. Když už jednou vzniknou, mohou se v krystalu poměrně volně pohybovat. Při pohybu takovýchto dislokací vznikají větší deformace.



Obr. 30.13 Dislokace v krystalu

Dislokace se mohou volně pohybovat, to znamená, že k tomu stačí malá dodatečná energie za předpokladu, že zbytek krystalu je dokonalou mřížkou. Ale mohou se „zaseknout“, když se setkají s nějakým jiným druhem defektu v krystalu. Je-li třeba velké energie k tomu, aby se dislokace přes defekt dostaly, zastaví se. To je právě mechanismus, který je příčinou pevnosti *nedokonalých* kovových krystalů. Čisté krystaly železa jsou docela měkké, ale malá koncentrace atomů příměsí může vyvolat tolik poruch, že dislokace budou efektivně znehybněny. Jak víte, ocel, která je převážně železem, je velmi tvrdá. Při výrobě oceli se malé množství uhlíku rozpustí v roztaveném železe. Při rychlém ochlazení vytvářejí zrníčka uhlíku v mřížce množství mikroskopických poruch. Dislokace se už nemohou volně pohybovat a kov se stane pevným.

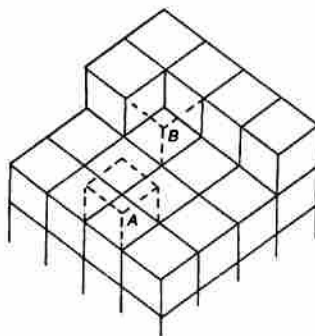


Obr. 30.14 Dislokace v torzi (Z knihy Ch. Kittel: Úvod do fyziky pevných látek, v českém překladu vyšlo v nakladatelství Academia, Praha 1985.)

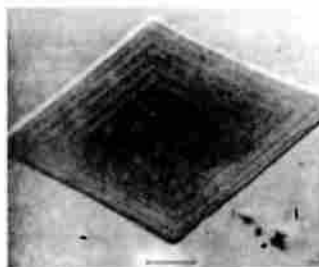
Čistá měď je velmi měkká, ale můžeme ji udělat tvrdší tím, že ji ohýbáme, nebo vyklepeme kladivem. V tomto případě se vytváří mnoho nových dislokací různých druhů, které navzájem interferují, a tak omezují svou pohyblivost. Možná znáte trik, při kterém se vezme kousek měkké mědi a snadno se někomu obtočí kolem zápěstí jako náramek. Přitom se měď zpevní a nemůžete ji ohnout znova nazpět! Mechanicky zpevněné kovy typu mědi můžeme udělat opět měkkým žháním při vysoké teplotě. Tepelným pohybem atomů se „vyžehlí“ dislokace a vytvoří se opět jednotlivé velké krystaly. Dosud jsme popisovali jen dislokace ve *smyku*. Existuje ještě mnoho jiných druhů dislokací, z nichž jedna, dislokace *v torzi*, je znázorněna na *obr. 30.14*. Takové dislokace často hrají důležitou úlohu při růstu krystalů.

30.8 DISLOKACE A RŮST KRYSTALŮ

Proces růstu krystalů byl dlouhou dobu velkou záhadou. Už jsme hovořili o tom, jak každý atom může opakovaným zkoušením určit, zda je lepší být v krystalu nebo mimo něj. Ale to znamená, že každý atom musí najít místo s nejnižší energií. Avšak atom, který dopadne na nový povrch, je zespod vázán jen jednou – dvěma vazbami a nemá tutéž energii, kterou by měl, kdyby byl umístěn někde v rohu, obklopen atomy ze tří stran. Představme si rostoucí krystal jako blok sestavený z kostek, jak to vidíme na *obr. 30.15*. Pokusíme-li se přidat novou kostku, řekněme do polohy *A*, bude mít tato kostka jen jednoho ze šesti možných sousedů, kterými by se nakonec obklopila. Při tolika chybějících vazbách nemůže být energie příliš nízká. Výhodnější by byla poloha *B*, kde je až polovina vazeb nasycena. A skutečně, krystaly rostou tak, že nové atomy se připojují v místech, jako je *B*.



Obr. 30.15 Růst krystalu



Obr. 30.16 Krystal parafínu, který vyrostl v okolí dislokace v torzi (Z knihy Ch. Kittel: Úvod do fyziky pevných látek.)

Co se však stane, je-li jedna řada ukončena? K započítí nové řady se musí atom usadit v poloze, v níž je připojen jen ze dvou stran, a to je dost nepravděpodobné. I kdyby se to stalo, co bude pak, když se ukončí celá vrstva? Jak může začít nová vrstva? Jedna z možných odpovědí je, že pro krystal je nejvýhodnější růst v místech dislokace, například v okolí dislokace v torzi podobné té, která je na *obr. 30.14*. V takovém krystalu se při přidávání nové kostky vždy najde místo se třemi dostupnými vazbami. V krystalu je tedy zvýhodněn růst se zabudovanou dislokací. Příklad takového spirálového růstu je na *obr. 30.16*, který je fotografií monokrystalu parafínu.

30.9 BRAGGŮV-NYEŮV MODEL KRYSTALU

Samozřejmě nemůžeme vidět, co se děje s jednotlivými atomy v krystalu. Jak už nyní sami vidíte, v krystalu existuje mnoho komplikovaných jevů, které nelze jednoduše kvantitativně popsat. Sir Lawrence Bragg a J. F. Nye navrhli schéma sestrojení modelu kovového krystalu. Je překvapující, že v rámci tohoto modelu lze odvodit jevy, které, zdá se, vznikají ve skutečných krystalech. Na následujících stránkách reprodukuje jejich původní článek, v němž je popsána jejich metoda a jsou uvedeny některé výsledky, které její pomocí získali. (Článek je převzat z *Proceeding of the Royal Society od London, Vol 190, září 1947, s. 474 až 481* – s povolením autorů a Královské společnosti.)

Dynamický model krystalové struktury

SIR LAWRENCE BRAGG, F. R. S. A. J. F. NYE

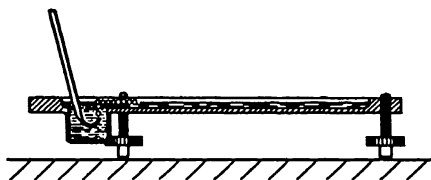
Cavendishova laboratoř, Universita v Cambridge

(Došlo 9. 1. 1947, recenzováno 19. 1. 1947)

Krystalová struktura kovu je modelována pomocí souboru bublin s průměrem menším nebo rovným 1 mm, které plavou na povrchu mýdlového roztoku. Bublínky se pod povrch vyfukují jemnou pipetou při konstantním tlaku. Jejich rozměry jsou téměř stejné. Držít pohromadě díky povrchovému napětí, a to buď v jedné vrstvě, nebo tvoří trojrozměrný celek. Soubor může obsahovat statisíce bublinek a udržet se hodinu nebo více. Soubory vytvářejí struktury, které, jak se předpokládá, existují v kovech a simulují také pozorované jevy jako je vznik hranice mezi zrny, dislokace a jiné typy defektů, skluz, rekrytalizace, zpevňování a deformace vznikající vlivem „člách“ atomů.

1 BUBLINOVÝ MODEL

Čas od času se objevují modely krystalické struktury, podle nichž si atomy představujeme jako plovoucí nebo zavěšené magnety, nebo jako kruhové kotouče plovoucí na vodním povrchu a udržované kapilárními silami. Tyto modely mají určité nedostatky. Například v případě plovoucích objektů, které se navzájem dotýkají, zabraňují síly tření jejich volnému vzájemnému pohybu. Závažnějším nedostatkem je ohraničenost počtu složek, neboť chceme-li se přiblížit ke stavu v reálném krystalu, potřebujeme velký počet složek. Předložená práce popisuje chování modelu, v němž jsou atomy reprezentovány bublinami s průměrem 0,1 až 2 mm, plovoucími na povrchu mýdlového roztoku. Tyto malé bublinky vydrží hodinové nebo i déle trvající experimenty, navzájem bez tření kloužou a mohou být vytvořeny ve velkých množstvích. V tomto článku jsou uvedeny příklady souborů obsahujících 100 000 a více bublin. Model se nejvíce přibližuje k chování kovové struktury, neboť bublinky jsou jen jednoho typu a udržují se pohromadě kapilární přitažlivou silou, která představuje vazbovou sílu volných elektronů v kovu. Stručný popis modelu uveřejnil časopis *Journal of Scientific Instruments* (Bragg 1942 b).



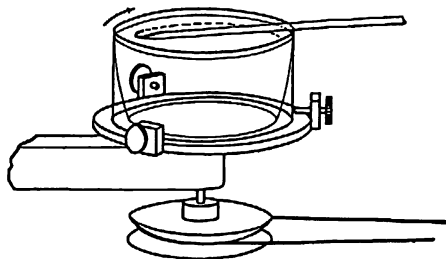
OBR. 1 Přístroj na výrobu bublinových vrstev

2 ZPŮSOB FORMOVÁNÍ

Bublínky jsou vyfukovány z malého otvoru pod povrchem mýdlového roztoku. Nejlepší výsledky jsme dosáhli s roztokem, jehož složení určil pan Green z Královského ústavu. Olejová kyselina s objemem 15,2 cm³ (dvakrát pře-

destilovaná) se dobře promíchá s 50 cm³ destilované vody. Tato směs se dokonale promíchá se 73 cm³ deseti-percentního roztoku trietanolaminu a doplní se vodou na 200 cm³. K tomu se přidá 164 cm³ čistého glycerínu. Nechá se odstát a pak se zespodu odebere čistá kapalina. Ta se v některých experimentech ještě zředí ve trojnásobném (objemovém) množství vody, aby se snížila viskozita. Otvor pipety je umístěn ani 5 mm pod povrchem. Konstantní tlak vzduchu od 50 do 200 cm vodního sloupce je udržován pomocí dvou speciálních baněk. Velikost bublin je obvykle podivuhodně stejná. Někdy jsou vypouštěny nepravidelně, ale to lze spravit výměnou pipety nebo změnou tlaku. Nežádoucí bublinky lze likvidovat pomocí malého plaménku nad povrchem. Přístroj je znázorněn na obr. 1. Ukázalo se být vhodným začernit dno nádoby, neboť pak lze snáze rozpoznat strukturální detaily, jako je vznik hranice mezi zrny a dislokace.

Obrázek 2 představuje část vrstvy nebo dvojrozměrný bublinový krystal. O jeho pravidelnosti se můžeme přesvědčit tak, že se na obrázek podíváme pod určitým úhlem. Velikost bublin závisí na velikosti otvoru pipety a jen velmi málo na tlaku nebo na tom, jak hluboko je otvor pod povrchem. Hlavním efektem při stoupajícím tlaku je vzrůst rychlosti vypouštění bublin. Například tlustostěnná trubice s vnitřním průměrem 49 μm produkuje při tlaku 100 cm vodního sloupce bublinky s průměrem 1,2 mm. Tenkostěnná trubice s průměrem 27 μm a při tlaku 180 cm vodního sloupce produkuje bublinky s průměrem 0,6 mm. Bublínky s průměrem od 1 mm do 2 mm budeme nazývat velké, od 0,6 do 0,8 mm střední a od 0,1 do 0,3 mm malé. Chování bublin závisí na jejich rozměrech.



OBR. 3 Přístroj na výrobu bublin malých rozměrů

V našem přístroji se nám nepodařilo zmenšit velikost otvoru, a vytvářet bublinky o průměru menším než 0,6 mm. Jelikož experiment vyžadoval tvorbu velmi malých bublinek, naplnili jsme mýdlovým roztokem rotující nádobu a jemnou trubicí jsme umístili tak, aby byla podle možnosti rovnoběžná se směrem proudění. Bublínky jsou ihned po vzniku unášeny proudem a při konstantních podmínkách jsou téměř stejné. Vznikají rychlostí tisíc i víc bublinek za sekundu a jejich vznik je provázen vysokým tónem. Při otáčení nádoby se mýdlový roztok zdvihá vysoko podél stěn nádoby a při zastavení rotace unáší roztok nadále většinu bublin. S tímto zařízením, znázorněným na obr. 3, lze získat bublinky až s průměrem 0,12 mm. Například tenkostěnná

trubice s průměrem 38 μm při tlaku 190 cm vodního sloupce a při rychlosti kapaliny $180 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ u otvoru produkují bubliny s průměrem 0,14 mm. Přitom nádoba měla průměr 9,5 cm a rotovala rychlostí 6 otáček za sekundu. Na obr. 4, kde je zvětšený snímek těchto malých bublinek, můžeme pozorovat míru uspořádání. Uspořádání u rotujících nádob není tak dokonalé jako u nehybných nádob – podíváme-li se ze strany, vidíme, že řady jsou trochu nepravidelné.

Tyto dvojrozměrné krystaly modelují struktury, které, jak předpokládáme, existují v kovech. Zároveň simulují pozorované efekty, jako jsou hranice zrn, dislokace a jiné typy defektů – skluz, rekrystalizace, zpevňování a deformace vznikající vlivem „cizích“ atomů.

3 HRANICE ZRN

Na obrázcích 5a, 5b, a 5c vidíme typická zrnová rozhraní pro bubliny s průměry 1,87, 0,76 a 0,3 mm. Šířka narušené oblasti podél rozhraní je obecně tím větší, čím menší jsou bubliny. Na obr. 5a, kde je ukázáno několik sousedních zrn, patří bubliny na hranici mezi zrnými výhradně buď k jednomu, nebo k druhému krystalovému uspořádání. Na obr. 5c je jasně viditelná Beilbyho vrstva mezi dvěma zrnými. Malé bublinky, jak uvidíme dále, mají větší tuhost než velké bubliny, což vede k většímu nepravděpodobnosti na hranici.

Jednotlivá zrna lze zřetelně vidět na polykrystalických vrstvách na obr. 5a až 5c a 12a až 12c při pohledu pod určitým úhlem. Při vhodném osvětlení při pohledu ze strany plovoucí bublinové vrstvy pozoruhodně připomínají leštěný a leptaný kov.

Často se stává, že v polykrystalické vrstvě se nachází „atomy příměsí“, které se svou velikostí výrazně odlišují od průměru. V tomto případě se většina z nich nachází na hranicích zrn.

Bylo by nesprávné tvrdit, že odlišné bubliny se posouvají směrem k hranicím. Nedostatkem tohoto modelu je, že v něm nedochází k difuzi bublin strukturou. Možné je jen vzájemné přizpůsobení se sousedů. Ukazuje se, že při růstu jednoho krystalu na úkor jiného se hranice upravují, dokud neprochází atomy příměsí.

4 DISLOKACE

Jsou-li monokrystal nebo polykrystalická vrstva stlačena, natažena nebo jinak deformována, chovají se podobně jako kovy podrobené deformaci. Až po určitém hranici se model nachází v oblasti pružné deformace. Za touto hranicí dochází ke skluzu podél jednoho ze tří směrů v těsně uspořádaných řadách. Posun probíhá tak, že bubliny jedné řady se posouvají podél bublin v sousední řadě o vzdálenost rovnou vzdálenosti mezi dvěma sousedními bublinami. Je velice zajímavé pozorovat, jak proces probíhá. Pohyb nastává současně podél celé řady, ale začíná na jednom konci jako dislokace, je-li v řadách na jedné straně od čáry skluzu o jeden atom více než v řadách na opačné straně. Tato dislokace pak postupuje podél čáry skluzu z jednoho konce krystalu na druhý a konečným výsledkem je posun o meziatomovou vzdálenost. Tento proces navrhovali Orowan,

Polanyi a Taylor pro objasnění malých sil vyvolávajících pružný skluz v kovových strukturách.

V teorii, kterou navrhl Taylor (1934) pro vysvětlení mechanismu plastické deformace krystalů, se uvažuje vzájemné působení a rovnováha takových dislokací. Bubliny nám poskytují překvapující obraz toho, co podle předpokladu probíhá v kovu. Někdy dislokace postupují velice pomalu, průchod krystalem trvá několik sekund. V krystalech s nelohomogenní deformací lze najít i nchybné dislokace. Objevují se jako krátké černé čáry, jak můžeme vidět na fotografiích 12a až 12c. Je-li polykrystalická vrstva stlačena, lze tyto malé čáry pozorovat rozptýleny ve všech směrech v krystalu.

Na obr. 6a, 6b a 6c jsou ukázány příklady dislokací. Na obr. 6a, kde je průměr bublin 1,9 mm, je dislokace velmi lokální v rozsahu přibližně šesti bublin. Na obr. 6b (průměr 0,76 mm) přesahuje dvanáct bublin a na obr. 6c (průměr 0,30 mm) lze vliv dislokace pozorovat až do vzdálenosti přibližně padesáti bublin. Větší tuhost malých bublin vede k delším dislokacím. Studium různých souborů však ukazuje, že není možné přiřadit ke každému rozměru bublin standardní délku dislokace. Délka závisí na druhu deformace v krystalu. Hranice mezi dvěma krystaly, jejichž osy svírají úhel 30° (maximální možný úhel) se může považovat za sérii dislokací ve střídavých řadách a v tom případě jsou dislokace velmi krátké. Zmenšuje-li se úhel mezi sousedními krystaly, vyskytují se dislokace ve větších intervalech a zároveň se prodlužují, až nakonec dostáváme jedinou dislokaci v tělese s dokonalou strukturou tak, jak vidíme na obr. 6a, 6b a 6c.

Na obr. 7 jsou ukázány tři rovnoběžné dislokace. Nazveme-li je (podle Taylora) kladnými a zápornými, jsou postupně kladné, záporné, kladné, pokud je sledujeme zleva doprava. Pás mezi dvěma posledními má tři bubliny navíc, což můžeme vidět, když se díváme horizontálně ve směru řad. Na obr. 8 jsou ukázány dislokace, šifřící se z hranic zrn, což je jev, s nímž se často setkáváme.

Na obr. 9 je ukázáno místo, kde dvě bubliny zabírají místo jedné. To můžeme považovat za limitní případ kladné a záporné dislokace v sousedních řadách, jsou-li stlačené strany dislokací proti sobě. Opačný případ by vedl k díře ve struktuře, kdy jedna bublinka chybí v bodě, v němž se dislokace setkávají.

5 JINÉ TYPY DEFEKTŮ

Na obrázku 10 vidíme úzký pás mezi dvěma rovnoběžně orientovanými krystaly. Pás je pokryt množstvím defektních čar v místech, kde bubliny nejsou těsně uspořádány. Jsou to místa, v nichž lze očekávat rekrystalizaci. Při přiblížení hranic je pás absorbován do široké plochy dokonalého krystalu.

Obrázky 11a až 11g představují příklady uspořádání, které se často vyskytují v místech, kde je lokální deficit bublin. Zatímco dislokace jsou viditelné jako tmavé pásy, tyto struktury se projevují v podobě písmene V nebo jako trojúhelníky. Typickou strukturou V vidíme na obr. 11a. Je-li model narušen, je struktura V tvořena dvěma dislokacemi, které se sbíhají pod úhlem 60° , a zruší se dislokacemi, kte-

ré pokračují podél svých drah. Na obr. 11b je malý trojúhelník, který také představuje dislokaci, neboť řady pod defektem mají o jednu bublinu více než v nižší řadě. Vyvoláme-li mírný tepelný pohyb jemným zatřesením jedné strany krystalu, tato defektní místa zmizí a vytvoří se dokonalá struktura.

Občas se v krystalu nacházejí prázdná místa tam, kde bublina chybí. Projevují se jako černé body. Příklady vidíme na obr. 11g. Taková mezera nemůže být zaplněna lokálním přizpůsobením, protože vyplnění díry má za následek vznik nové. Tyto díry vznikají a zanikají, když se krystal „tvoří za studena“.

Tyto struktury v modelu naznačují, že podobné defekty mohou existovat ve skutečném kovu. Mohou hrát úlohu v takových procesech, jako je difuze nebo změny z uspořádaného stavu na neuspořádaný při snížení energetických bariér v okolí, a působí jako jádra krystalizace při alotropických změnách.

6 REKRYSALIZACE A ŽIHÁNÍ

Obrázky 12a až 12c představují tutéž vrstvu bublin v různých po sobě jdoucích časových okamžicích. Vrstva pokrývající povrch byla prudce rozmíchána skleněnou tyčinkou a pak ponechána sama sobě. Obr. 12a ukazuje, jak vrstva vypadala 1 s po zastavení míchání. Vrstva je roztržštěna na množství malých krystalků ve stavu nehomogenních deformací, jak ukazují četné dislokace a další defekty. Následující fotografie 12b ukazuje tutéž vrstvu po 33 s. Malá zrna splýnula do větších a mnoho poruch se ztratilo. Postupně probíhá rekystalizace, jak ilustrují fotografie, z nichž poslední tři ukazují vrstvu 2, 14 a 25 min. po počátečním promíchání. Uspořádání není možné sledovat delší čas, neboť bubliny se po delší době zmenšují, zřejmě díky difuzi vzduchu jejich stěnami, které se ztenčují a bubliny snadno splasknou. Po dobu tohoto procesu nebyl model zvenku nijak narušován. Proces uspořádávání probíhá stále pomaleji, pohyb bublin v jedné části vrstvy vyvolává deformace, které podněcují uspořádání v sousedních částech a ty zase aktivizují další části.

Tato série obrázků vykazuje několik zajímavých bodů. Všimněte si tří malých zrn v bodech označených souřadnicemi AA, BB, CC. Zrno A mění svůj tvar, ale během celé doby zůstává na místě. Zrno B je na místě ještě za 14 minut, ale mizí po 25 minutách a zanechává po sobě čtyři dislokace, které vyznačují vnitřní deformaci zrna. Zrno C se scvrkává a nakonec mizí na obr. 12d zanechávajíc po sobě díru a útvar V, který mizí na obr. 12e. Zároveň se neurčitá hranice na obr. 12d v bodě DD stává výraznou na obr. 12e. Všimněte si také napřímení hranice zrn v sousedství EE na obr. 12b až 12e. Všechna stadia mezi slabým zborcením struktury a vznikem určité hranice jsou poznamenána dislokacemi různé délky. Díry po chybějících bublinách se jeví jako černé tečky. Některé z těchto děr se tvoří nebo zaplňují při pohybu dislokací, ale jiné představují místa, kde bubliny praskly. Je vidět řadu útvarů tvaru V a trojúhelníka. Při studiu těchto fotografií lze najít řadu dalších zajímavých jevů.

Obr. 13a, 13b a 13c znázorňují část vrstvy za 1 s, 4 s,

a 4 min po rozmíchání. Jsou zajímavé tím, že představují dvě po sobě následující stadia v relaxačním procesu směřujícím k dokonalějšímu uspořádání.

Změny jsou dobře viditelné ze strany. Uspořádání je silně narušeno na obr. 13a. Na obr. 13b se bubliny seskupily do řad, ale zakřivení těchto řad svědčí o přítomnosti veliké vnitřní deformace. Na obr. 13c se tyto deformace zmenšily vytvořením nové hranice v oblasti A - A; řady na obou stranách jsou vyrovnány. Ukazuje se, že energie krystalu za přítomnosti deformace je vyšší než při mezikrystalické hranici. Jsme zavázáni firmě Kodak za fotografie na obr. 13, které jsou součástí filmových záběrů, jak citujeme v závěru.

7 EFEKT ATOMŮ PŘÍMĚSÍ

Na obrázku 14 vidíme známý jev spojený s přítomností bubliny odlišné velikosti. Porovnáme-li tento obrázek s dokonalou vrstvou obr. 2 a obr. 4, vidíme, že tři bubliny, jedna větší a dvě menší než ostatní, narušují vyrovnanost řad na celém obrázku. Jak jsme už zmínili, bubliny odlišné velikosti lze obvykle najít na hranicích zrn, kde se nacházejí díry nepravdělných velikostí poskytující místo pro takové bubliny.

8 MECHANICKÉ VLASTNOSTI DVOJROZMĚRNÉHO MODELU

Mechanické vlastnosti dvojrozměrné dokonalé vrstvy byly popsány v článku, na nějž se odvoláváme (Bragg 1942b). Vrstva se rozkládá mezi dvěma rovnoběžnými pružinami ponořenými horizontálně do mýdlového roztoku. Pružiny jsou nastaveny tak, aby zapadaly do prostoru mezi řady bublin, které jsou k nim pevně přimknuty. Jedna pružina může být posunuta rovnoběžně sama sobě pomocí mikrometrického šroubu, zatímco druhá je udržována dvěma tenkými vertikálními skleněnými vlákny. Napětí ve smyku se může měřit pozorováním odklonu skleněných vláken. Vrstva vystavená smykové deformaci splňuje Hookův zákon pružnosti až po určitý bod, kdy je dosaženo hranice pružnosti. Pak se posune podél nějaké střední řady o vzdálenost rovnou šířce jedné bubliny. Pružné napětí a posunutí se mohou opakovat několikrát. Hranice pružnosti je dosažena tehdy, kdy jedna strana vrstvy se smykem posunula o vzdálenost jedné bubliny vzhledem ke straně opačné. Tento jev podporuje domněnku, k níž dospěl při výpočtu hranice pružnosti v kovu jeden z nás (Bragg 1942a), tj. že každý krystalek v kovu zpracovaném za studena začne téct jen tehdy, když deformace dosáhla takové hodnoty, že energie se uvolňuje posunutími.

Výpočet sil mezi bublinami, který provedl M. M. Nicolson, bude zanedlouho publikován. Obsahuje dva zajímavé body. Křivka závislosti potenciální energie na vzdálenosti mezi středy bublin připomíná závislost uváděnou pro atomy. Má minimum v bodě, kde vzdálenost mezi středy je jen o málo menší než průměr volné bubliny, a pak prudce stoupá při menších vzdálenostech. Dále je nárůst velmi prudký pro bubliny s průměrem 0,1 mm, ale mnohem menší pro bubliny s průměrem 1 mm. Tím se potvrzuje dojem, který vyplývá z modelu, že totiž malé bubliny se chovají, jako kdyby byly mnohem tužší než velké bubliny.

Umožníme-li bublinám, aby se nahromadily do vícenásobných vrstev na povrchu, vytvoří trojrozměrný krystal s jedním z možných nejtěsnějších uspořádání. *Obr. 15* představuje takové nahromadění při pohledu z boku. Podobnost s leštěným a leptaným povrchem kovu je pozoruhodná.

Na *obr. 16* je podobné nahromadění při kolmém pohledu. Část struktury zřejmě představuje krychlovou mřížku nejtěsnějšího uspořádání s orientací vnější plochy (111) nebo (100). Na *obr. 17a* vidíme orientaci (111). Obrysy tří bublin, na nichž každá vrchní bublina spočívá, jsou jasně viditelné. Další vrstva bublin, která je slaběji viditelná ještě hlouběji pod vrchní vrstvou, naznačuje, že jde o rovinu (111) dobře známého krychlového uspořádání. *Obr. 17b* znázorňuje rovinu (100), kde každá bublina leží na čtyřech jiných. Osy krychlí svírají úhel 45° s uspořádanými řadami vrchní vrstvy. *Obr. 17c* ukazuje dvojče v krychlové struktuře s rovinou (111). Svrchní vrstva má orientaci (111) a (100), které spolu svírají malý úhel. Z obrázku to však není zřejmé a objeví se to jen při šikmém pohledu. Na *obrázku 17d* je vidět krychlovou i šesterečnou posloupnost těsně uspořádaných rovin, lze však těžko ověřit, zda levá strana představuje skutečně šesterečnou těsnou strukturu, neboť není jisté, zda soubor má hloubku více než dvě vrstvy v této části. Případy dvojčat a mezikrystalových hranic lze vidět na *obr. 16*. *Obr. 18* ukazuje několik dislokací v trojrozměrné struktuře vystavené ohybové deformaci.

Ve spolupráci s firmou Kodak byl natočen 16-milimetrový film o pohybech dislokací a hranic zrn, kdy jednotlivé krystaly a polykrystalická vrstva byly vystaveny smykové, tlakové a tažné síle. Navíc je-li mýdlový roztok ve skleněné nádobě s plochým dnem, umožňuje model ve velké míře využívat projekci pomocí procházejícího světla. Jelikož k tvorbě bublin je třeba určité hloubky a roztok je dost neprůhledný, je žádoucí provádět projekci přes skleněný blok uložený na dně nádoby, ponořený těsně pod povrchem.

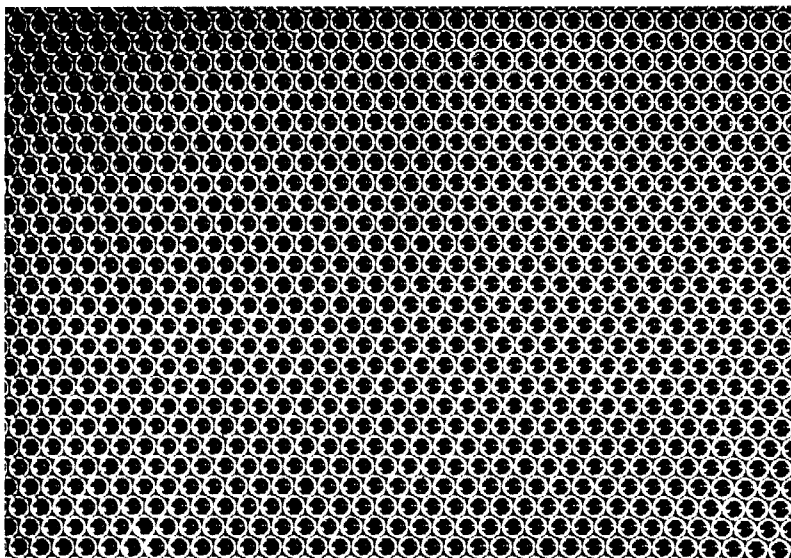
Na závěr bychom rádi poděkovali panu C. E. Harrodovi z Kings College v Cambridgi, který pro nás vyrobil některé pipety, které jsme používali na výrobu bublin.

ODKAZY

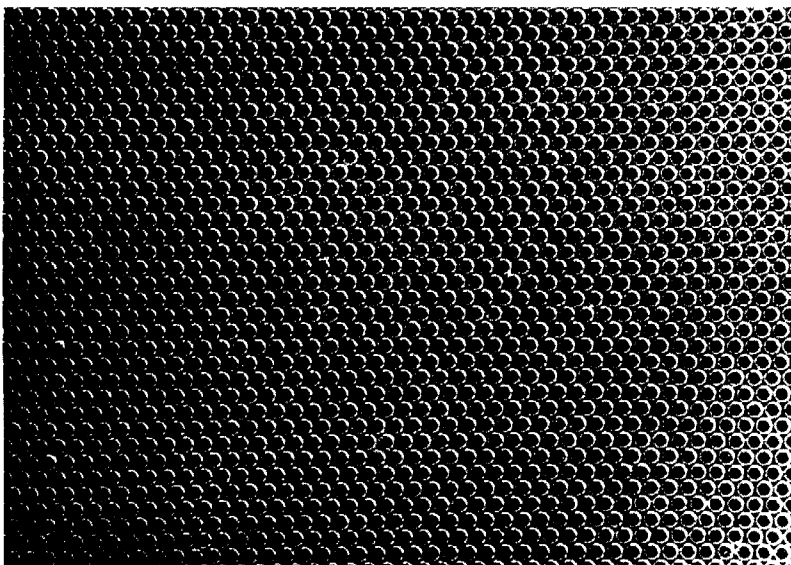
Bragg, W. L.: 1942 a, *Nature* 149, 511

Bragg, W. L.: 1942 b, *J. Sci. Instrum.* 19, 148.

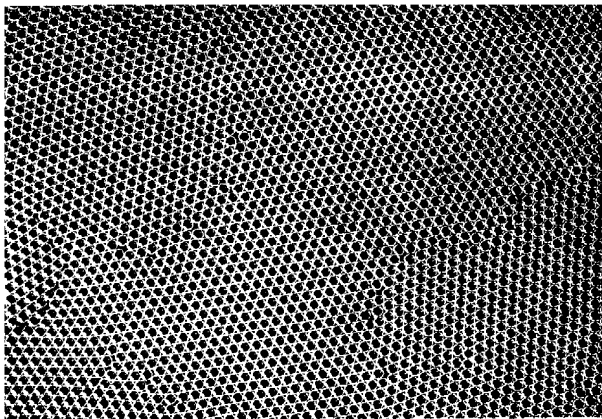
Taylor G. I.: 1934, *Proc. Roy. Soc. A*, 145, 362.



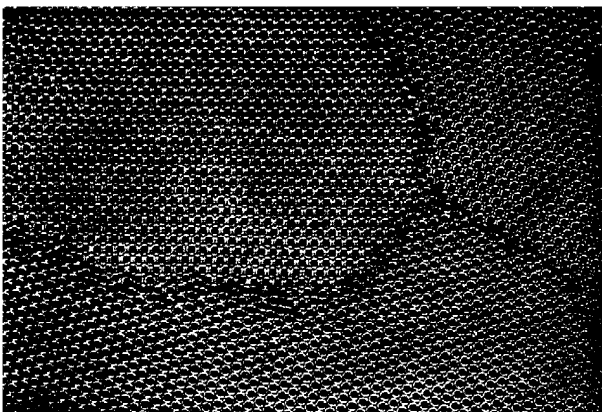
OBR. 2 Dokonalá krystalová vrstva bublin. Průměr 1,41 mm.



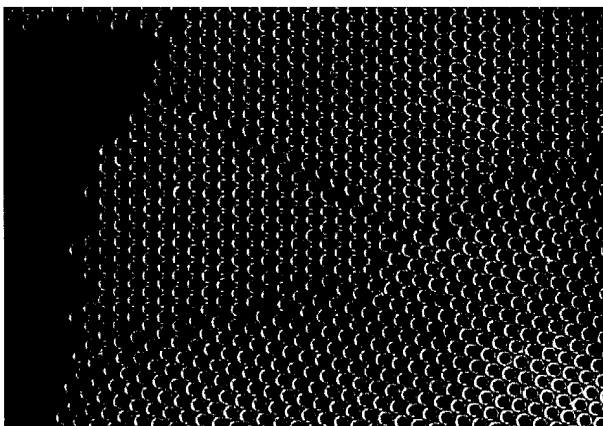
OBR. 4 Dokonalá krystalová vrstva bublin. Průměr 0,30 mm.



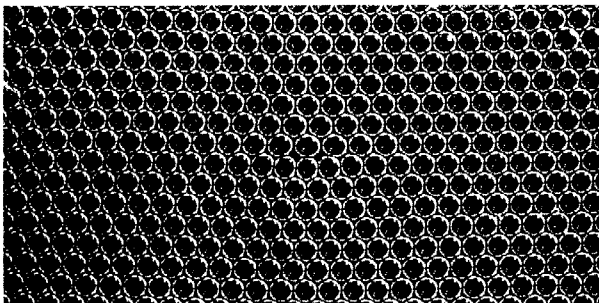
OBR. 5a Hranice zrn. Průměr 1,87 mm.



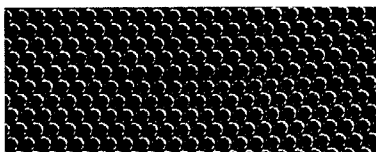
OBR. 5b Hranice zrn. Průměr 0,76 mm.



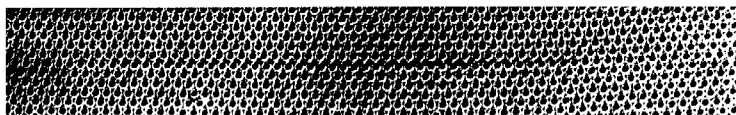
OBR. 5c Hranice zrn. Průměr 0,30 mm.



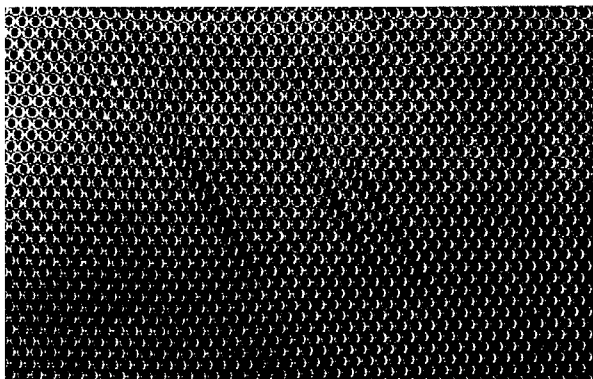
OBR. 6a Dislokace. Průměr 1,9 mm.



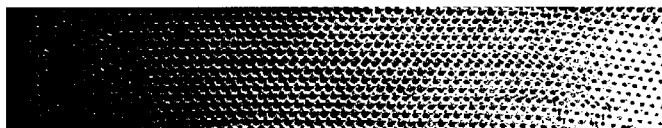
OBR. 6b Dislokace. Průměr 0,76 mm.



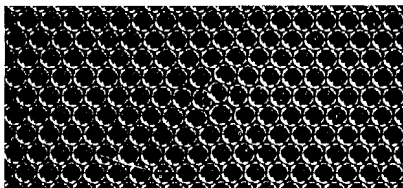
OBR. 6c Dislokace. Průměr 0,30 mm.



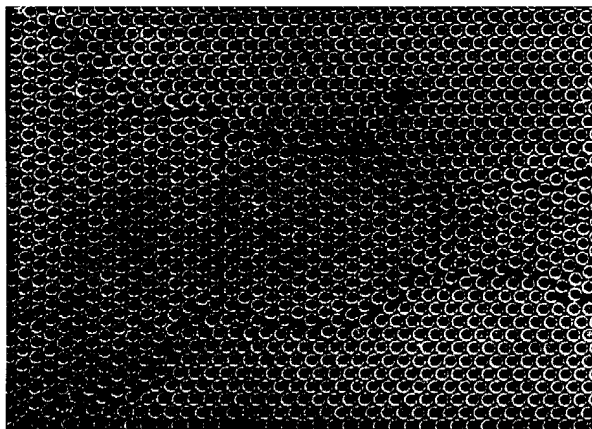
OBR. 7 Rovnoběžné dislokace. Průměr 0,76 mm.



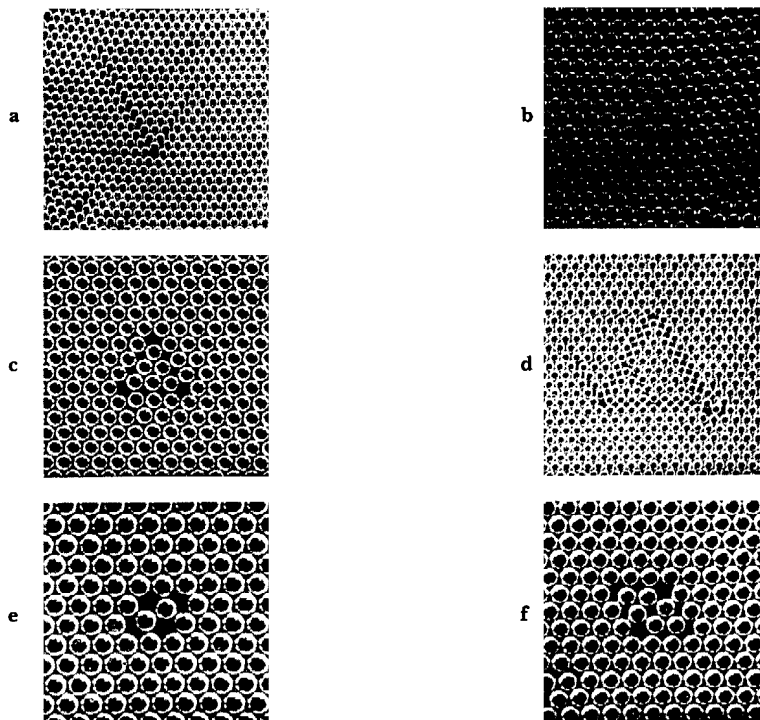
OBR. 8 Dislokace vycházející z hranice zrn. Průměr 0,30 mm.

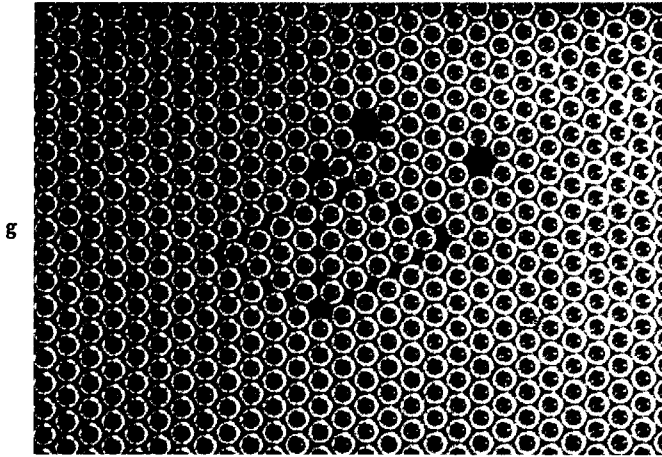


OBR. 9 Dislokace v sousedních řadách. Průměr 1,9 mm.

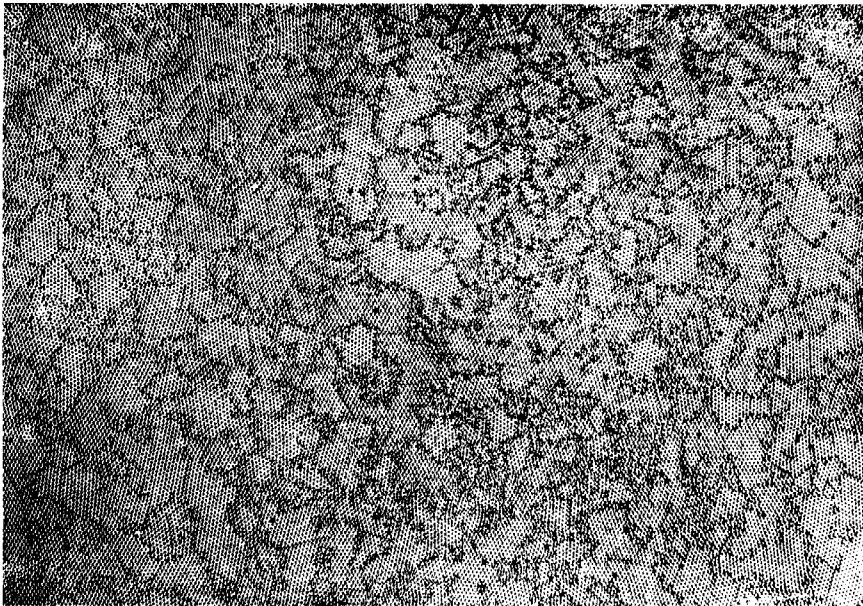


OBR. 10 Série defektních čar mezi dvěma rovnoběžně orientovanými oblastmi. Průměr 0,30 mm.

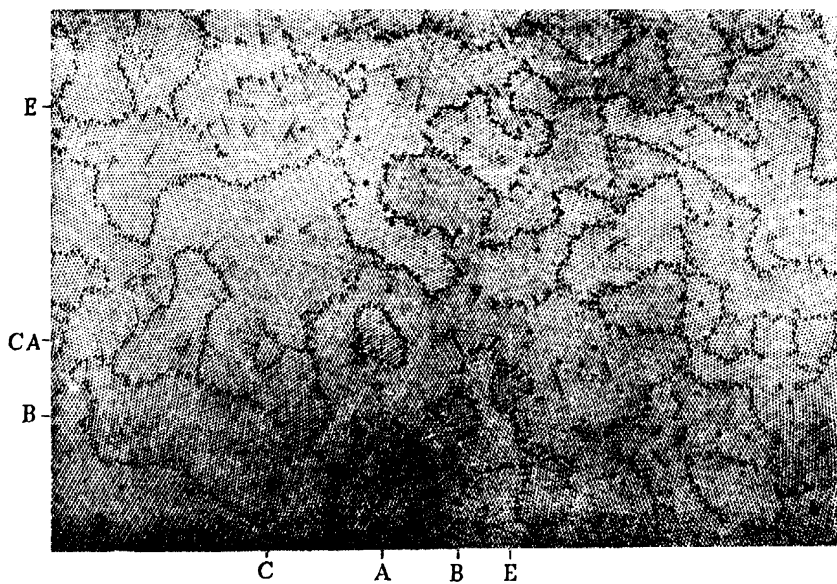




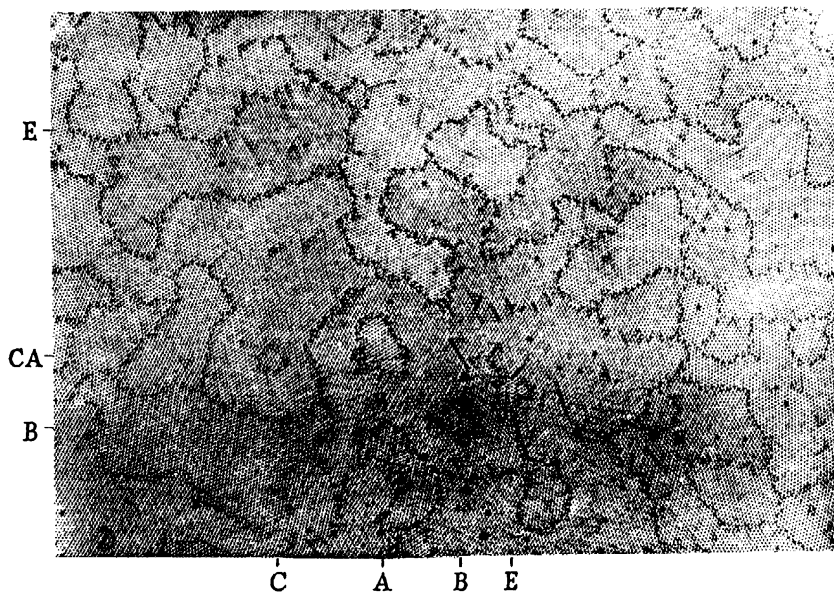
OBR. 11 Typy defektů: a) průměr 0,68 mm, b) průměr 0,68 mm, c) průměr 0,60 mm, d) průměr 0,30 mm, e) průměr 0,60 mm, f) průměr 0,60 mm, g) průměr 0,68 mm



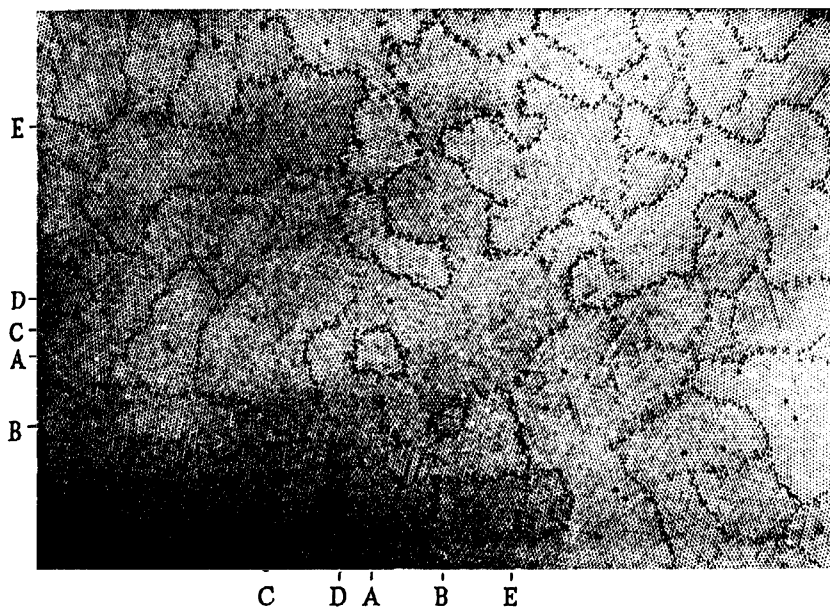
OBR. 12a Rekrystalizace. Průměr 0,60 mm. Hned po rozmíchání.



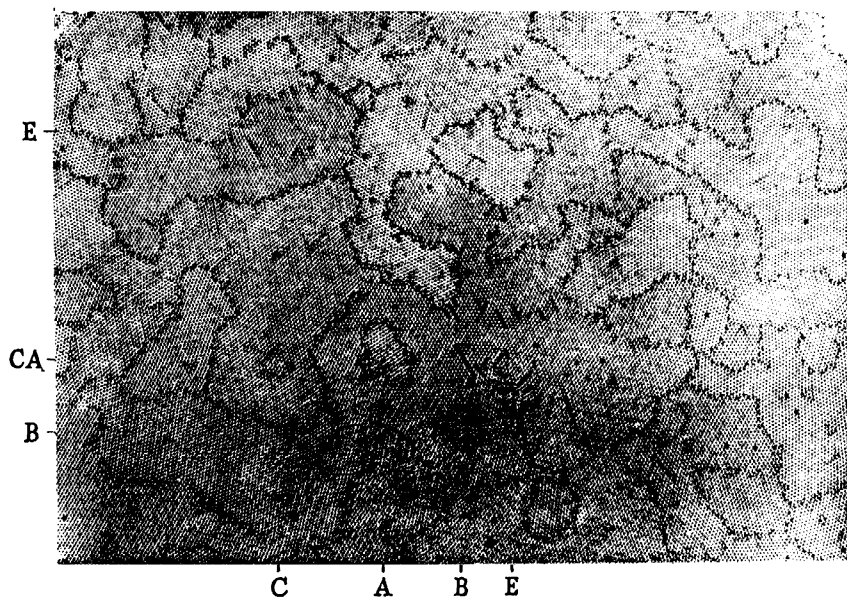
OBR. 12b Po 33 sekundách.



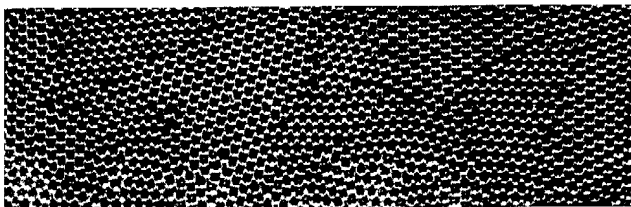
OBR. 12c Po 2 minutách.



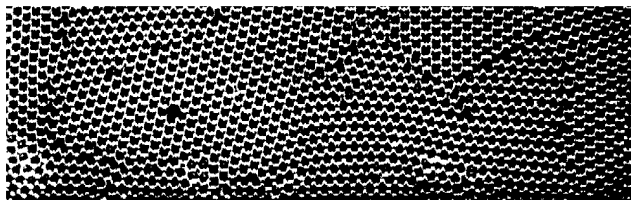
OBR. 12d Po 14 minutách.



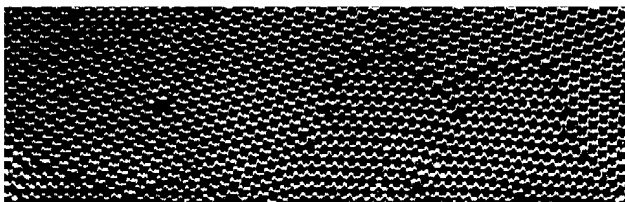
OBR. 12e Po 25 minutách.



a

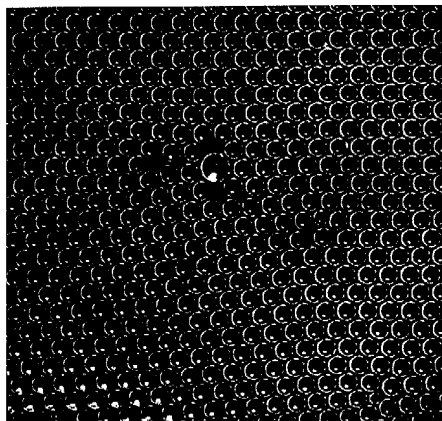


b



c

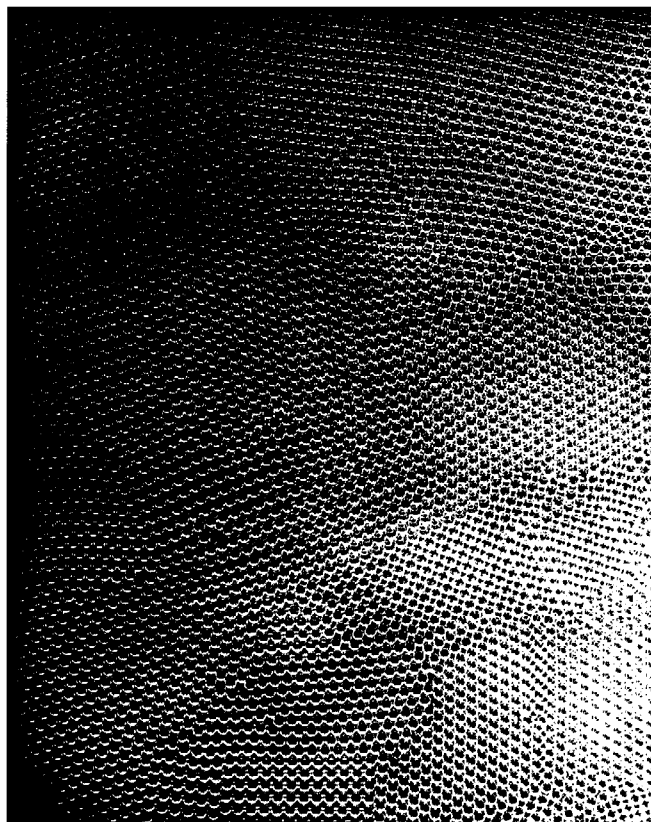
OBR. 13 Dvě stádia rekrytalizace. Průměr 1,64 mm. a) po 1 sekundě, b) po 4 sekundách, c) po 4 minutách.



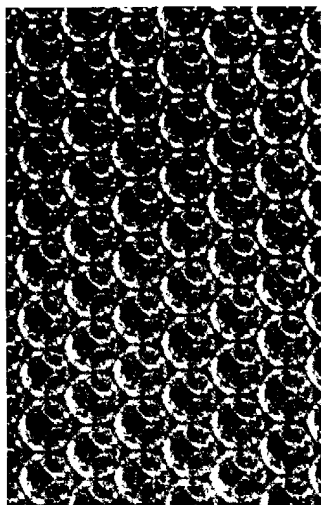
OBR. 14 Efekt příměsových atomů. Průměr stejných bublin 1,3 mm.



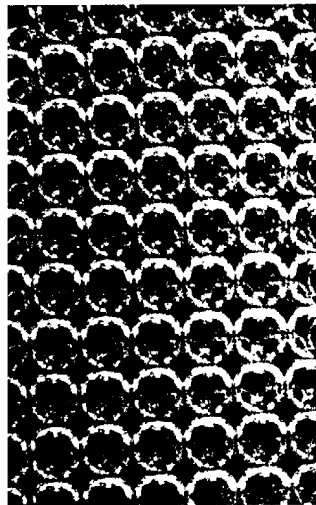
OBR. 15 Boční pohled na trojrozměrnou vrstvu



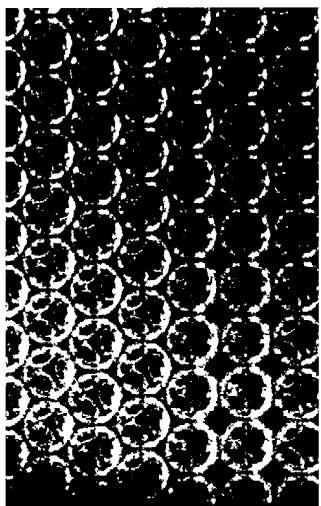
OBR. 16 Trojrozměrná vrstva při pohledu shora. Průměr 0,70 mm.



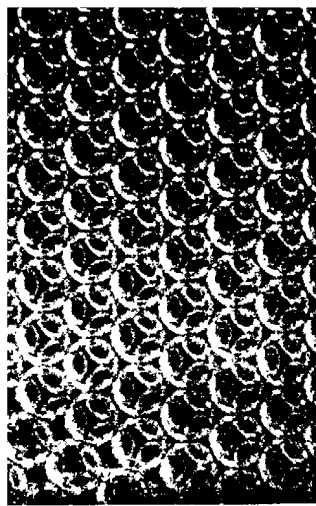
a



b

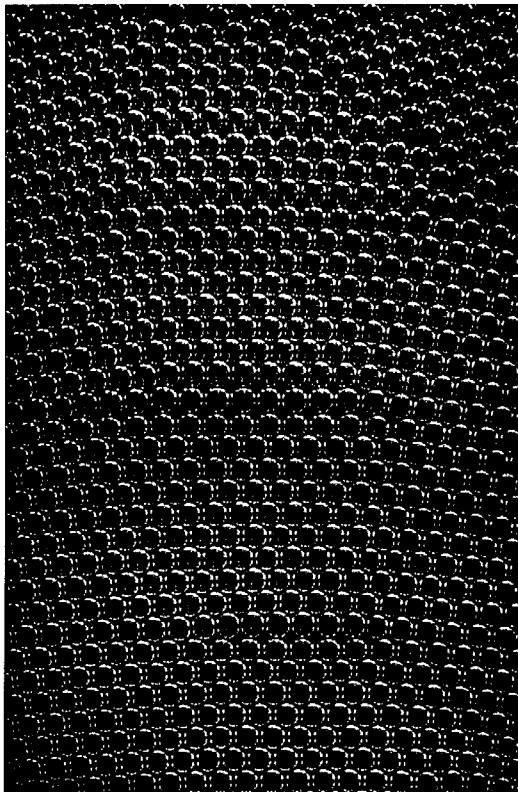


c



d

OBR. 17 Plošně centrovaná krychlová struktura: a) rovina (111),
b) rovina (100),
c) dvojčata v (111), krychlová struktura,
d) příklad šesterečného těsného uspořádání. Průměr 0,70 mm.



OBR. 18 Dislokace v trojrozměrné struktuře. Průměr 0,70 mm.

T 31 enzory

31.1 TENZOR POLARIZOVATELNOSTI

31.2 TRANSFORMACE TENZOROVÝCH SLOŽEK

31.3 ELIPSOID ENERGIE

31.4 JINÉ TENZORY. TENZOR SETRVAČNOSTI

31.5 VEKTOROVÝ SOUČIN

31.6 TENZOR NAPĚTÍ

31.7 TENZORY VYŠŠÍHO ŘÁDU

31.8 ČTYŘTENZOR ELEKTROMAGNETICKÉ ENERGIE A HYBNOSTI

Přečtěte si znovu: kapitolu 11, díl 1, Vektory
kapitolu 20, díl 1, Rotace v prostoru

31.1 TENZOR POLARIZOVATELNOSTI

Fyzici mají ve zvyku zvolit nejjednodušší příklad nějakého jevu a nazvat jej „fyzikou“, přičemž komplikovanější příklady nechávají na starosti jiným odvětvím, například aplikované matematice, elektroinženýrství, chemii nebo krystalografii. Dokonce i fyzika pevných látek je téměř „polofyzikou“, neboť se příliš zajímá o speciální látky. Proto i v těchto přednáškách budeme vynechávat spoustu zajímavých věcí. Například jednou z důležitých vlastností krystalů, nebo většiny látek, je to, že jejich elektrická polarizovatelnost je v různých směrech různá. Nachází-li se látka ve vnějším elektrickém poli, které má určitý směr, posunou se mírně náboje atomů a vytvoří se dipólový moment. Velikost tohoto momentu silně závisí na směru pole. A to je, samozřejmě, určitá komplikace. Ale ve fyzice si to zjednodušíme a obvykle začínáme se speciálním případem, kdy je polarizovatelnost stejná ve všech směrech. Ostatní případy necháváme na starosti jiným vědním oborům. Proto v našich dalších úvahách vůbec nebudeme potřebovat to, o čem budeme mluvit v této kapitole.

Matematika tenzorů je zvláště užitečná při popisu těch vlastností látek, které závisejí na směru, ačkoliv je to jen jeden z příkladů jejího využití. Jelikož většina z vás se nemíní stát fyziky, ale budete se zabývat *reálným* světem, kde věci silně závisejí na směru, budete muset dříve či později používat tenzory. Abychom nic nevynechávali, pohovoříme o tenzorech, i když ne příliš podrobně. Chceme, aby vaše chápání fyziky bylo co nejuplněnější. Například náš výklad elektrodynamiky je úplný – tak úplný jako libovolný kurz elektřiny a magnetizmu, dokonce i pro fyzikální specializace na vysoké škole. Mechanika nebyla úplně ukončena, protože, když jsme ji probírali, nebyly ještě vaše matematické znalosti na takové úrovni, abychom mohli hovořit o tématech, jako je princip nejmenšího účinku, lagranžiány, hamiltoniány atd., které představují *elegantnější způsob* popisu mechaniky. Ale s výjimkou obecné teorie relativity jsme všechny *zákony* mechaniky probírali. Naše elektřina a magnetizmus jsou kompletní a mnoho dalších oblastí je v podstatě uzavřeno. Kvantová mechanika přirozeně ne; musíme si něco nechat do budoucna. Ale co je tenzor, musíte vědět už nyní.

V kapitole 30 jsme zdůrazňovali, že vlastnosti krystalických látek jsou v různých směrech různé, říkáme, že jsou *anizotropní*. Závislost indukovaného dipólového momentu na směru vnějšího elektrického pole je jen jedním z možných příkladů, ale právě ten si vybereme jako příklad tenzoru. Předpokládejme, že při daném směru elektrického pole je indukovaný dipólový moment objemové jednotky P úměrný intenzitě vnějšího pole E . (To je dobrá aproximace pro většinu látek, pokud E není příliš velké.) Konstantu úměrnosti označíme α^{40} . Budeme uvažovat látky, v nichž α závisí na směru vnějšího pole, jako například v krystalech podobných vápenci, který má tu vlastnost, že při průhledu vidíme obraz dvojité.

Předpokládejme, že jsme zjistili, že v určitém krystalu vyvolává elektrické pole E_1 , působící ve směru osy x , polarizaci P_1 ve směru x . Dále nechť elektrické pole E_2 ve směru osy y , které má stejnou *intenzitu* jako E_1 , vyvolává jinou polarizaci P_2 ve směru y . Co by se stalo, kdyby elektrické pole působilo pod úhlem 45° ? Takové pole je superpozicí dvou polí působících podél os x a y , proto polarizace P bude vektorovým součtem P_1 a P_2 , jak je znázorněno na *obr. 31.1a*. Polarizace už nemá tentýž směr jako elektrické pole. Lze pochopit, proč tomu tak je. V látce se mohou nacházet náboje, které se mohou snadno posouvat směrem nahoru a dolů, ale obtížně se pohybují ze strany na stranu. Když síla působí pod úhlem 45° , náboje se posunou víc směrem nahoru než na stranu. Výsledné přemístění nemá směr vnější síly, protože tu působí vnitřní elastické síly, které jsou asymetrické.

Úhel 45° není, samozřejmě, nijak výjimečný. Indukovaná polarizace *obecně nemá* směr elektrického pole. V našem předcházejícím příkladě se nám „poštěstilo“ zvolit osy x a y tak, aby P mělo směr E podél obou os. Kdyby byl krystal potočen vzhledem k osám souřadnic, vyvolalo by elektrické pole E ve směru osy y polarizaci P , která by měla obě složky, x i y . Podobně polarizace, která by vznikla díky poli ve směru osy x , by také měla složky x i y . Polarizace by potom vypadaly tak, jak je to na *obr. 31.1b*, a ne jako na *obr. 31.1a*. Věci se komplikují, ale stále je pro libovolné pole E *velikost* P úměrná velikosti E .

Nyní uvažujme obecný případ libovolné orientace krystalu vzhledem k souřadnicovým osám. Elektrické pole ve směru osy x vede k polarizaci P se složkami x , y , a z . Můžeme psát

$$P_x = \alpha_{xx} E_x, \quad P_y = \alpha_{yx} E_x, \quad P_z = \alpha_{zx} E_x. \quad (31.1)$$

⁴⁰⁾ V kapitole 10 jsme souhlasně s konvencí psali $P = \epsilon_0 \chi E$ a χ („ χ “) jsme nazývali susceptibilita. Nyní bude pohodlnější používat jedno písmeno, proto namísto $\epsilon_0 \chi$ budeme psát α . Pro izotropní dielektrika platí $\alpha = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0$, kde ϵ_r je relativní permitivita (článek 10.4)

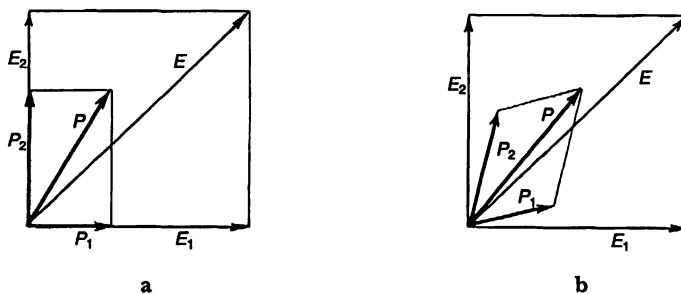
Celé naše tvrzení je založeno na tom, že má-li elektrické pole směr osy x , nemusí mít polarizace tentýž směr, ale má složky ve směru os x , y , z a každá z nich je úměrná E_x . Konstanty úměrnosti označujeme α_{xx} , α_{yx} , α_{zx} . (První index je vztažen k příslušné složce P , druhý ke směru elektrického pole.)

Podobně pro pole ve směru osy y můžeme psát

$$P_x = \alpha_{xy}E_y, \quad P_y = \alpha_{yy}E_y, \quad P_z = \alpha_{zy}E_y \quad (31.2)$$

a pro pole ve směru osy z

$$P_x = \alpha_{xz}E_z, \quad P_y = \alpha_{yz}E_z, \quad P_z = \alpha_{zz}E_z. \quad (31.3)$$



Obr. 31.1 Vektorový součet polarizací v anizotropním krystalu

Řekli jsme, že polarizace závisí na polích lineárně, proto má-li elektrické pole E složku x i y , bude výsledná x -ová složka P součtem dvou P_x z rovnic (31.1) a (31.2). Má-li E složky x , y a z , budou výsledné složky P součtem tří příspěvků z rovnic (31.1), (31.2), (31.3). Jinými slovy P bude určeno rovnicemi

$$\begin{aligned} P_x &= \alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y + \alpha_{xz}E_z \\ P_y &= \alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y + \alpha_{yz}E_z \\ P_z &= \alpha_{zx}E_x + \alpha_{zy}E_y + \alpha_{zz}E_z. \end{aligned} \quad (31.4)$$

Dielektrické vlastnosti krystalu jsou pak zcela určeny devíti veličinami (α_{xx} , α_{xy} , α_{xz} , α_{yx} , α_{yy} , α_{yz} , α_{zx} , α_{zy} , α_{zz}), které mohou být reprezentovány symbolem α_{ij} . (Indexy i, j zastupují libovolné ze tří písmen x, y, z .) Libovolné elektrické pole E může být rozloženo na složky E_x , E_y , E_z . Z nich můžeme použitím α_{ij} najít P_x , P_y a P_z , které nám spolu určují polarizaci P . Soubor devíti koeficientů α_{ij} se nazývá *tenzor* – v tomto případě *tenzor polarizovatelnosti*. Když říkáme, že tři čísla (E_x , E_y , E_z) tvoří vektor E , stejně říkáme, že devět čísel (α_{xx} , α_{xy} , ...) tvoří tenzor α_{ij} .

31.2 TRANSFORMACE TENZOROVÝCH SLOŽEK

Víte, že při přechodu k nové souřadnicové soustavě x' , y' , z' dostáváme jiné složky E_x , E_y , E_z vektoru E a stejně i jiné složky vektoru P . Proto všechny koeficienty α_{ij} mají různou hodnotu v různých souřadnicových soustavách. Změnu koeficientů α při změně E a P lze zjistit, neboť

popisujeme-li *stejně fyzikální* elektrické pole v nové souřadnicové soustavě, měli bychom dostat stejnou polarizaci. Pro libovolnou novou souřadnicovou soustavu je P_x' lineární kombinací P_x , P_y a P_z :

$$P_x' = aP_x + bP_y + cP_z.$$

Podobně je to i pro ostatní složky. Dosadíme-li za P_x , P_y a P_z jejich vyjádření pomocí E z rovnic (31.4), dostaneme

$$P_x' = a(\alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y + \alpha_{xz}E_z) + b(\alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y + \dots) + c(\alpha_{zx}E_x + \dots + \dots).$$

Pak vyjádříme E_x , E_y a E_z pomocí E_x' , E_y' a E_z' , například

$$E_x = a'E_x' + b'E_y' + c'E_z',$$

kde a' , b' , c' jsou v nějakém vztahu k a , b , c , ale navzájem si nejsou rovny. Vyjádřili jsme tedy P_x' pomocí složek E_x' , E_y' a E_z' , tj. máme nové α_{ij} . To je trochu neuspořádaný, ale přímočarý postup.

Když mluvíme o změně os, předpokládáme, že poloha krystalu *v prostoru* je fixována. Kdyby se krystal otáčel *společněs* osami, koeficienty α by se neměnily. Naopak, kdyby se orientace krystalu vzhledem k osám změnila, dostali bychom nový soubor hodnot α . Známe-li však koeficienty α pro nějakou libovolnou orientaci krystalu, můžeme je najít pro *libovolnou* jinou orientaci pomocí transformace, kterou jsme právě popsali. Jinými slovy, dielektrické vlastnosti jsou *úplně* popsány zadáním složek polarizovatelnosti tenzoru α_{ij} vzhledem k libovolně zvolené soustavě souřadnic. Stejně jako částici přiřazujeme vektor rychlosti $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$, vědomi si toho, že tři složky se určitým způsobem mění při změně souřadnicových os, podobně krystalu přiřazujeme tenzor polarizovatelnosti α_{ij} , jehož devět složek se při změně souřadnicové soustavy transformuje určitým způsobem.

Vztah mezi \mathbf{P} a \mathbf{E} určený rovnicí (31.4) můžeme zapsat ve zkráceném tvaru

$$P_i = \sum_j \alpha_{ij} E_j, \quad (31.5)$$

kde i označuje některé z písmen x , y nebo z a sčítáme přes $j = x, y, z$. Pro operace s tenzory bylo vynalezeno mnoho speciálních označení, ale každé z nich se hodí jen pro omezenou třídu problémů. Jednou z obecných konvencí je vynechávání sumačního znaku Σ v rovnici (31.5), přičemž se *rozumí*, že všude, kde se stejný index vyskytuje dvakrát (v našem případě j), musíme sčítat přes všechny jeho hodnoty. Jelikož tenzory nebudeme používat často, nebudeme se trápit s výběrem speciálních označení a konvencí.

31.3 ELIPSOID ENERGIE

Nyní si vyzkoušejme, jak se zachází s tenzory. Položíme si zajímavou otázku: Jaká energie je potřebná k polarizaci krystalu (kromě energie elektrického pole, o níž víme, že je rovna $\epsilon_0 E^2/2$ pro objemovou jednotku)? Zamysleme se nad atomovými náboji, které se posouvají. Práce, která je vykonána při přemístování náboje o vzdálenost dx , je $qE_x dx$ a je-li v jednotkovém

objemu N nábojů, je vykonaná práce $qE_x N dx$. Ale $qN dx$ je změna qP_x dipólového momentu objemové jednotky. Proto energie připadající na *objemovou jednotku* je

$$E_x dP_x.$$

Sečteme-li práci všech tří složek pole, pro práci připadající na objemovou jednotku dostaneme

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{P}.$$

Jelikož velikost \mathbf{P} je úměrná \mathbf{E} , bude práce vykonaná při polarizování objemové jednotky od 0 do \mathbf{P} rovna integrálu výrazu $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{P}$. Označíme-li tuto práci w_p ⁴¹⁾, můžeme psát

$$w_p = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{P} = \frac{1}{2} \sum_i E_i P_i. \quad (31.6)$$

Nyní můžeme vyjádřit \mathbf{P} pomocí \mathbf{E} použitím rovnice (31.5) a dostaneme

$$w_p = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \alpha_{ij} E_i E_j. \quad (31.7)$$

Hustota energie w_p je číslo, které nezávisí na výběru os, je to tedy skalár. Tenzor α_{ij} , bychom měli správně nazývat tenzor druhého řádu, neboť má dva indexy. Vektor (s *jedním* indexem je tenzor prvního řádu a skalár (bez indexu) je tenzor nultého řádu. Říkáme, že elektrické pole \mathbf{E} je tenzor prvního řádu a že hustota energie w_p je tenzor nultého řádu. Pojem tenzoru bychom mohli rozšířit na tři a víc indexů, a tak bychom sestrojili tenzory vyššího než druhého řádu.

Indexy tenzoru polarizovatelnosti mohou nabývat tří různých hodnot – je to trojrozměrný tenzor. Matematici uvažují tenzory ve čtyřech, pěti nebo vyšších rozměrech. My jsme už používali čtyřrozměrný tenzor $F_{\mu\nu}$ při našem relativistickém popisu elektromagnetického pole (kapitola 26).

Tenzor polarizovatelnosti α_{ij} má tu zajímavou vlastnost, že je symetrický, to znamená, že $\alpha_{xy} = \alpha_{yx}$, a totéž platí pro libovolnou dvojici indexů. (To je *fyzikální* vlastnost reálného krystalu, a neplatí nevyhnutelně pro všechny tenzory.) Můžete si sami dokázat, že to tak musí být, výpočtem změny energie krystalu následujícím postupem: 1. Zapněte elektrické pole ve směru osy x . 2. Zapněte pole ve směru osy y . 3. Vypněte pole ve směru osy x . 4. Vypněte pole ve směru osy y .

Krystal je nyní v takovém stavu, jako byl na začátku, a celková práce spotřebovaná na polarizaci musí být rovna nule. Lze však ukázat, že má-li to být pravda, musí být α_{xy} rovno α_{yx} . Stejně úvahy můžeme, samozřejmě, aplikovat i na α_{xz} atd. Tenzor polarizovatelností je tedy symetrický.

To také znamená, že tenzor polarizovatelnosti můžeme určit změřením energie potřebné k polarizaci krystalu v různých směrech. Předpokládejme, že pole \mathbf{E} působí jen ve směru os x a y . Pak souhlasně s rovnicí (31.7) platí

$$w_p = \frac{1}{2} \left[\alpha_{xx} E_x^2 + (\alpha_{xy} + \alpha_{yx}) E_x E_y + \alpha_{yy} E_y^2 \right]. \quad (31.8)$$

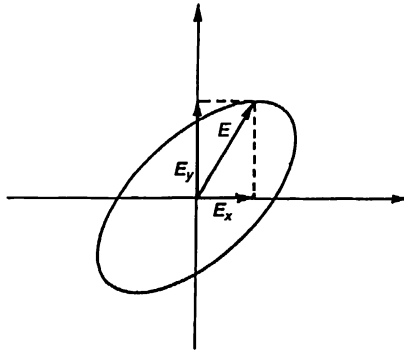
41) Je to práce spotřebovaná na vytvoření polarizace elektrickým polem a není možné ji zaměňovat s potenciální energií $-\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{E}$ konstantního dipólového momentu \mathbf{p}_0 .

Kdybychom měli jen složku E_x , mohli bychom určit α_{xx} , v případě složky E_y můžeme určit α_{yy} , máme-li zároveň E_x i E_y , dostáváme energii pocházející ze členu s $(\alpha_{xy} + \alpha_{yx})$. Jelikož α_{xy} a α_{yx} jsou si navzájem rovny, je tento člen úměrný $2\alpha_{xy}$ a lze jej určit z energie.

Výraz pro energii (31.8) má pěknou geometrickou interpretaci. Předpokládejme, že se ptáme, jaká pole E_x a E_y odpovídají *dané* hustotě energie, například w_0 . Je to matematická úloha řešení rovnice:

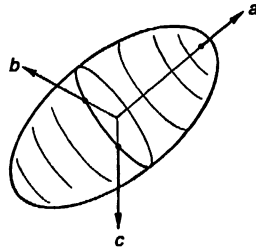
$$\alpha_{xx} E_x^2 + 2\alpha_{xy} E_x E_y + \alpha_{yy} E_y^2 = 2w_0.$$

To je kvadratická rovnice, proto při grafickém znázornění této rovnice (obr. 31.2) budou všechna řešení E_x a E_y ležet na elipse. (Musí to být elipsa, a ne parabola nebo hyperbola, neboť energie je pro libovolné pole vždy kladná a konečná.) Vektor E se složkami E_x a E_y bude znázorněn tak, že jeho počátek je v počátku souřadnic a koncový bod leží na elipse. Pomocí této „energetické elipsy“ názorně vidíme jak „vypadá“ polarizační tenzor.



Obr. 31.2 Množina koncových bodů vektoru $E = (E_x, E_y)$, který odpovídá konstantní energii polarizace

Vezmeme-li nyní v úvahu všechny tři složky vektoru E libovolného směru, který vede k jednotkové hustotě energie, budou jeho koncové body ležet na povrchu elipsoidu, jak je to na obr. 31.3. Tvar tohoto elipsoidu konstantní energie jednoznačně určuje tenzor polarizovatelnosti.



Obr. 31.3 Elipsoid energie tenzoru polarizovatelnosti

Elipsoid má pěknou vlastnost, že vždy může být popsán prostě zadáním směrů tří hlavních os a průměrů elipsoidu podél těchto os. Hlavní osy – osy ve směru nejdelsího a nejkratšího průměru a ve směru kolmém na obě tyto osy. Na obr. 31.3 jsou označeny jako a , b , c . Vzhledem k těmto

osám má rovnice elipsoidu obzvlášť jednoduchého tvaru

$$\alpha_{aa}E_a^2 + \alpha_{bb}E_b^2 + \alpha_{cc}E_c^2 = 2w_0.$$

Tensor polarizovatelnosti má tedy jen tři nenulové složky: α_{aa} , α_{bb} a α_{cc} . To znamená, že pro libovolně komplikovaný krystal je vždy možné vybrat jen takové osy (nemusí to být osy krystalu), pro které má náš tenzor jen tři složky. Pro takové osy nabývají rovnice (31.4) jednoduchý tvar

$$P_a = \alpha_{aa}E_a, \quad P_b = \alpha_{bb}E_b, \quad P_c = \alpha_{cc}E_c. \quad (31.9)$$

Elektrické pole podél jedné z hlavních os vyvolává polarizaci podél téže osy, ale, samozřejmě, koeficienty, které patří třem osám, mohou být různé.

Tensor často píšeme jako tabulku devíti koeficientů uvnitř závorek

$$\begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{bmatrix}. \quad (31.10)$$

Pro hlavní osy a , b , c jsou jen diagonální členy různé od nuly. Říkáme, že tenzor je diagonální a jeho tvar je

$$\begin{bmatrix} \alpha_{aa} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{cc} \end{bmatrix}. \quad (31.11)$$

Důležitým faktorem je, že libovolný tenzor polarizovatelnosti (ve skutečnosti *libovolný symetrický* tenzor druhého stupně pro libovolný počet rozměrů) se může v tomto tvaru psát při vhodném výběru souřadnicových os.

Jsou-li si tři prvky polarizačního vektoru v diagonálním tvaru rovny,

$$\alpha_{aa} = \alpha_{bb} = \alpha_{cc} = \alpha, \quad (31.12)$$

stává se elipsoid energie kulovou plochou a polarizovatelnost je stejná ve všech směrech. Látka je izotropní. V tenzorovém označení

$$\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}, \quad (31.13)$$

kde δ_{ij} je *jednotkový tenzor*

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (31.14)$$

To samozřejmě znamená, že

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= 1, & \text{je-li } i &= j \\ \delta_{ij} &= 0, & \text{je-li } i &\neq j. \end{aligned} \quad (31.15)$$

Tenzor δ_{ij} se často nazývá „Kroneckerovo delta“. Můžete se pobavit tím, že dokážete, že tenzor (31.14) bude mít po záměně jedné pravoúhlé soustavy za druhou přesně tutéž formu. Tenzor polarizovatelnosti typu (31.13) nám dává

$$P_i = \alpha \sum_j \delta_{ij} E_j = \alpha E_i,$$

což je totéž jako náš starý výsledek pro izotropní dielektrika

$$P = \alpha E.$$

Tvar a orientace elipsoidu polarizovatelnosti může někdy souviset s vlastností symetrie krystalu. V kapitole 30 jsme řekli, že existuje 230 různých možných symetrií trojrozměrné mřížky a pro různé účely je vhodné je rozdělit na sedm tříd podle tvaru základní buňky. Elipsoid polarizovatelnosti musí odrážet vnitřní symetrii krystalu. Například trojklonný krystal má nízkou symetrii – elipsoid polarizovatelnosti bude mít nestejně osy a jejich orientace nebude obecně souhlasit se směrem os krystalu. Na druhé straně má jednoklonná mřížka tu vlastnost, že při rotaci o 180° kolem jedné osy se její vlastnosti nemění. Proto polarizační tenzor musí při takové rotaci zůstat nezměněn. Z toho vyplývá, že tenzor polarizovatelnosti se po rotaci o 180° musí transformovat sám v sebe. To je možné jen v tom případě, kdy jedna z os elipsoidu má tentýž směr jako osa symetrie krystalu. Žádná další omezení na orientaci a rozměry elipsoidu nejsou.

Pro kosočtverečný krystal však musí osy elipsoidu souhlasit s osami krystalu, neboť při rotaci o 180° kolem libovolné ze tří os dostáváme tutéž mřížku. Vezmeme-li čtverečný krystal, musí mít elipsoid stejnou symetrii, tj. musí mít dva průměry stejné. Nakonec, pro krychlový krystal musí být všechny tři průměry elipsoidu stejné. Elipsoid se stává kulovou plochou a polarizovatelnost krystalu je ve všech směrech stejná.

Existuje celá věda o určování druhů tenzorů pro všechny možné symetrie krystalu. Je to analýza založená na teorii grup. Ale pro jednoduché případy tenzoru polarizovatelnosti je poměrně snadno vidět, jaké musí příslušné vztahy být.

31.4 JINÉ TENZORY. TENZOR SETRVAČNOSTI

Ve fyzice najdeme mnohé další příklady tenzorů. Například v kovu nebo v libovolném vodiči bývá často proudová hustota j přibližně úměrná elektrickému poli E . Konstanta úměrnosti σ se nazývá měrná vodivost (konduktivita):

$$j = \sigma E.$$

Pro krystaly je však vztah mezi j a E mnohem komplikovanější, vodivost není stejná ve všech směrech. Konduktivita je tenzorem, proto píšeme

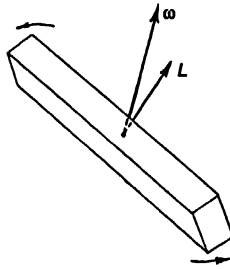
$$j_i = \sum_j \sigma_{ij} E_j.$$

Dalším příkladem fyzikálního tenzoru je moment setrvačnosti. V 18. kapitole 1. dílu jsme viděli, že při rotaci tuhého tělesa kolem fixované osy je jeho moment hybnosti L úměrný úhlové rychlosti ω a koeficient úměrnosti I jsme nazvali momentem setrvačnosti

$$L = I\omega.$$

Moment setrvačnosti libovolně tvarovaného tělesa závisí na jeho orientaci vzhledem k ose otáčení. Například kvádr bude mít různé momenty vzhledem ke každé z jeho tří navzájem kolmých os. Úhlové rychlosti ω i moment hybnosti L jsou vektory. Při rotaci kolem jedné z os symetrie jsou tyto vektory rovnoběžné. Avšak jsou-li momenty setrvačnosti vzhledem ke třem hlavním osám různé, nemusí být ω a L vždy rovnoběžné (obr. 31.4). Jejich vzájemný vztah je podobný jako vztah mezi E a P . Obecně musíme psát

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z \\ L_y &= I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z \\ L_z &= I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z. \end{aligned} \quad (31.16)$$



Obr. 31.4 Moment hybnosti L tuhého tělesa obecně není rovnoběžný s úhlovou rychlostí ω

Devět koeficientů I_{ij} je nazýváno *tenzor setrvačnosti*. Podobně jako v případě polarizace musí být kinetická energie pro libovolný moment hybnosti kvadratickou formou vzhledem k ω_x , ω_y a ω_z :

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{ij} I_{ij} \omega_i \omega_j. \quad (31.17)$$

Energii můžeme využít k definování elipsoidu setrvačnosti. Opět můžeme pomocí úvah o energii dokázat, že tenzor setrvačnosti je symetrický, tj. že $I_{ij} = I_{ji}$.

Tenzor setrvačnosti tuhého tělesa můžeme určit, známe-li jeho tvar. Potřebujeme jen napsat kinetickou energii všech částic tělesa. Částice, která má hmotnost m a rychlost v , má kinetickou energii $1/2 m v^2$ a celková kinetická energie je součtem výrazů

$$\sum \frac{1}{2} m v^2$$

pocházejících od všech částic tělesa. Rychlost v každé částice souvisí s úhlovou rychlostí ω tuhého tělesa. Předpokládejme, že těleso se otáčí kolem svého těžiště, které je v klidu. Je-li r polohový vektor částice vzhledem k těžišti, rychlost částice v je dána výrazem $\omega \times r$. Celková kinetická energie je

$$E_k = \sum \frac{1}{2} m (\omega \times r)^2. \quad (31.18)$$

Nyní už jen stačí rozepsat $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ pomocí složek $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ a x, y, z a porovnat výsledek s rovnicí (31.17). I_{ij} najdeme porovnáním jednotlivých členů. Provedeme algebraické úpravy

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 &= (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_x^2 + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_y^2 + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_z^2 \\ &= (\omega_y z - \omega_z y)^2 + (\omega_z x - \omega_x z)^2 + (\omega_x y - \omega_y x)^2 \\ &= \omega_y^2 z^2 - 2\omega_y \omega_z zy + \omega_z^2 y^2 + \omega_z^2 x^2 - 2\omega_z \omega_x xz + \omega_x^2 z^2 + \omega_x^2 y^2 - 2\omega_x \omega_y yx + \omega_y^2 x^2. \end{aligned}$$

Vynásobíme-li tuto rovnici veličinou $m/2$, sečteme přes všechny částice a porovnáme s rovnicí (31.17), zjistíme, že například I_{xx} je rovno

$$I_{xx} = \sum m (y^2 + z^2).$$

Je to tentýž vzorec, který jsme dostali v 19. kapitole 1. dílu pro moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose x . Jelikož $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, můžeme tento vzorec psát i jako

$$I_{xx} = \sum m (r^2 - x^2).$$

Vypíšeme-li všechny ostatní členy tenzoru setrvačnosti, dostaneme

$$I_{ij} = \begin{bmatrix} \sum m (r^2 - x^2) & -\sum m xy & -\sum m xz \\ -\sum m yx & \sum m (r^2 - y^2) & -\sum m yz \\ -\sum m zx & -\sum m zy & \sum m (r^2 - z^2) \end{bmatrix}. \quad (31.19)$$

Chcete-li, můžete si to zapsat v tenzorovém označení jako

$$I_{ij} = \sum m (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j), \quad (31.20)$$

kde r_i jsou složky (x, y, z) polohového vektoru částice a Σ označuje sumu přes všechny částice. Moment setrvačnosti je tedy tenzorem druhého řádu. Jeho členy jsou určeny vlastnostmi tělesa a vztah mezi L a $\boldsymbol{\omega}$ je vyjádřen pomocí tohoto tenzoru jako

$$L_i = \sum_j I_{ij} \omega_j. \quad (31.21)$$

Pro těleso libovolného tvaru lze najít elipsoid setrvačnosti, a tedy i tři hlavní osy. Vzhledem k těmto osám bude tenzor diagonální, tj. pro libovolný objekt existují vždy tři navzájem kolmé osy, pro něž jsou úhlová rychlost a moment hybnosti paralelní. Nazývají se hlavní osy setrvačnosti.

31.5 VEKTOROVÝ SOUČIN

Vzpomeňme si, že tenzory druhého řádu jsme používali už od 20. kapitoly 1. dílu. Tehdy jsme definovali moment síly v rovině, například složku N_{xy} vztahem

$$N_{xy} = xF_y - yF_x.$$

Po zobecnění na tři rozměry lze psát

$$N_{ij} = r_i F_j - r_j F_i. \quad (31.22)$$

Veličina N_{ij} je tenzor druhého řádu. Lze to ukázat například tak, že zkombinujeme N_{ij} s nějakým vektorem, řekněme s jednotkovým vektorem e , tímto způsobem:

$$\sum_j N_{ij} e_j.$$

Je-li takováto veličina *vektor*, musí se N_{ij} transformovat jako tenzor – to je naše definice tenzoru. Dosadíme za N_{ij} a dostaneme

$$\sum_j N_{ij} e_j = \sum_j r_i F_j e_j - \sum_j r_j F_j e_j F_i = r_i (\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}) F_i.$$

Jelikož skalární součin je skalár, jsou dva členy na pravé straně rovnice vektory a vektorem je i jejich rozdíl. N_{ij} je tedy tenzor.

Ale N_{ij} je speciálním druhem tenzoru – je to *antisymetrický* tenzor, pro nějž platí

$$N_{ij} = -N_{ji},$$

tj. má jen tři nenulové členy – N_{xy} , N_{yz} a N_{zx} . V 20. kapitole 1. dílu se nám podařilo ukázat, že tyto tři členy se téměř „náhodou“ transformují jako tři složky vektoru, takže jsme mohli *definovat*

$$\mathbf{N} = (N_x, N_y, N_z) = (N_{yz}, N_{zx}, N_{xy}).$$

Říkáme „náhodou“, neboť toto platí jen v trojrozměrném případě. Pro čtyři rozměry má například antisymetrický tenzor druhého řádu *šest* nenulových složek a, samozřejmě, nemůže být nahrazen vektorem se čtyřmi složkami.

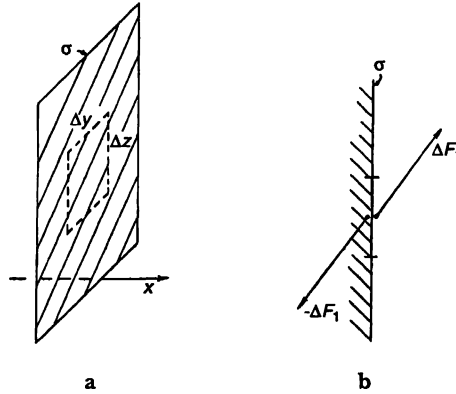
Stejně jako axiální vektor $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ je tenzorem, i každý vektorový součin dvou polárních vektorů je tenzorem. Lze použít stejné argumenty. Naštěstí je možné je psát jako vektory (přesněji pseudovektory), což nám zjednodušuje naši matematiku.

Matematicky, jsou-li \mathbf{a} a \mathbf{b} libovolné dva vektory, tvoří devět veličin $a_i b_j$ tenzor (ačkoliv nemusí mít žádný fyzikální význam). Tak dostáváme z polohového vektoru r_i tenzor $r_i r_j$ a jelikož δ_{ij} je také tenzor, je pravá strana rovnice (31.20) tenzor. Podobně rovnice (31.22) je tenzor, jelikož oba členy na pravé straně jsou tenzory.

31.6 TENZOR NAPĚTÍ

Symetrické tenzory, s nimiž jsme se dosud setkali, vznikly z koeficientů, které dávaly do vzájemného vztahu dva vektory. Nyní se seznámíme s tenzorem, který má jiný fyzikální význam – s tenzorem *napětí*. Předpokládejme, že máme pevné těleso, na nějž působí různé síly. Říkáme, že uvnitř působí různá „napětí“, čímž rozumíme, že mezi sousedními částicemi látky působí vnitřní síly. O takových napětích jsme se zmínili už v článku 12.3, když jsme uvažovali dvojrozměrný případ povrchového napětí napnuté membrány. Nyní si ukážeme, že vnitřní síly působící v látce trojrozměrného tělesa mohou být popsány pomocí tenzoru.

Uvažujme těleso z nějakého pružného materiálu, například kostky želatiny. Když je rozřízneme, látka se na obou stranách řezu působením vnitřních sil posune. Předtím, než jsme řez provedli, musely mezi oběma částmi kostky existovat síly, které udržovaly látku pohromadě: napětí můžeme definovat pomocí těchto sil. Představme si rovinu kolmou na osu x (jako je rovina σ na obr. 31.5) a ptáme se na síly působící na malou plošku $\Delta y \Delta z$ této roviny. Látka nalevo od plošky působí silou ΔF_1 na látku napravo tak, jak je znázorněno na obrázku v části b. Na látku nalevo od plochy působí, samozřejmě, opačná síly reakce $-\Delta F_1$. Je-li ploška dostatečně malá, očekáváme, že síla ΔF_1 je úměrná velikosti plochy $\Delta y \Delta z$.



Obr. 31.5 Látka nalevo od roviny σ působí přes plošku $\Delta x \Delta y$ silou ΔF_1 na látku napravo

Jeden druh napětí už znáte, a to statický tlak v kapalině. V tom případě je síla kolmá na povrchový element a je rovna tlaku vynásobenému povrchem. Pro pevné látky (jakož i pro pohybující se viskózní kapaliny) nemusí být síla kolmá na povrch, působí tu kromě tlaků (kladných nebo záporných) i *smykové síly*. (Smykovou silou rozumíme *tangenciální* složku síly působící na povrch.) Všechny tři složky síly je třeba vzít v úvahu. Všimněte si, že bude-li mít náš řez rovinou jinou orientaci, budou síly jiné. K úplnému popisu vnitřního napětí potřebujeme tenzor.

Tenzor napětí definujeme takovýmto způsobem: Představme si nejdříve řez kolmý na osu x a rozložme sílu ΔF_1 působící v řezu na složky ΔF_{x1} , ΔF_{y1} , ΔF_{z1} (obr. 31.6). Podíl těchto sil a plošky $\Delta y \Delta z$ označujeme S_{xx} , S_{yx} , S_{zx} . Například

$$S_{yx} = \frac{\Delta F_{y1}}{\Delta y \Delta z}.$$

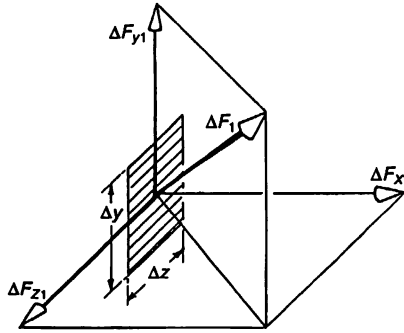
První index y se vztahuje ke směru silové složky a druhý index x ke směru, který má kolmice na plochu. Chcete-li, můžete psát plochu $\Delta y \Delta z$ jako Δa_x , čímž myslíme plošný element kolmý na x . Pak

$$S_{yx} = \frac{\Delta F_{y1}}{\Delta a_x}.$$

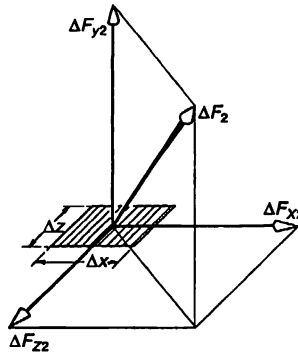
Dále si představíme řez kolmý na osu y . Na malou plošku $\Delta x \Delta z$ působí síla ΔF_2 . Opět rozložíme tuto sílu na tři složky tak, jak je to na obr. 31.7. a definujeme tři složky napětí S_{xy} , S_{yy} , S_{zy} jako sílu

působící na jednotkovou plochu ve třech směrech. Nakonec provedeme řez kolmo na z a definujeme tři složky S_{xz} , S_{yz} , S_{zz} . Máme tedy devět čísel:

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{bmatrix} \quad (31.23)$$

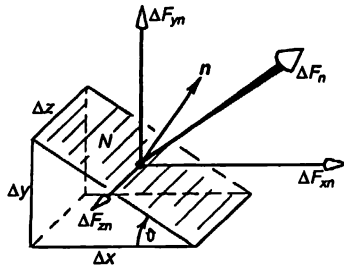


Obr. 31.6 Síla ΔF_1 působící na plošný element $\Delta y \Delta z$ kolmý na osu x se rozkládá na tři složky ΔF_{x1} , ΔF_{y1} a ΔF_{z1}



Obr. 31.7 Síla působící na plošný element kolmý na y se rozkládá na tři navzájem kolmé složky

Nyní chceme ukázat, že těchto devět čísel stačí k úplnému popisu stavu vnitřního napětí a že S_{ij} je skutečně tenzorem. Předpokládejme, že chceme najít sílu působící na povrch pod nějakým libovolným úhlem. Můžeme ji určit z S_{ij} ? Ano, můžeme, a to takovýmto způsobem: představme si malý, pevný hranol, jehož jedna stěna N je šikmá a ostatní dvě jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami. Je-li stěna N rovnoběžná s osou z , máme trojhranný útvar znázorněný na obr. 31.8. (Je to trochu speciální případ, ale dostatečně ilustruje obecnou metodu.) Síly napětí působící na hranolek na obr. 31.8 jsou v rovnováze (přinejmenším v limitě nekonečně malých rozměrů), proto výsledná síla musí být rovna nule. Síly působící na stěny rovnoběžné se souřadnicovými osami zjistíme přímo z S_{ij} . Jejich vektorový součet musí být roven síle působící na stěnu N , takže tuto sílu umíme určit pomocí S_{ij} .



Obr. 31.8 Síla ΔF_n působící na plochu N (s jednotkovým vektorem n) se rozkládá na tři složky

Za našeho předpokladu, že *plošné* síly působící na malý objem jsou v rovnováze, zanedbáváme všechny jiné *objemové* síly, které by mohly být přítomny, například gravitaci nebo pseudosíly v případě, že naše souřadnicová soustava není inerciální soustavou. Všimněte si však, že takové objemové síly budou úměrné *objemu* hranolku, a tedy úměrné $\Delta x \Delta y \Delta z$, zatímco plošné síly jsou úměrné ploškám $\Delta x \Delta y$, $\Delta y \Delta z$ atd. Proto zvolíme-li si hranolek dostatečně malých rozměrů, budou objemové síly vždy zanedbatelné ve srovnání s plošnými silami.

Nyní sečteme všechny síly působící na náš hranolek. Nejdříve vezmeme složku x , která je sumou pěti částí – po jedné z každé stěny. Je-li však Δz dostatečně malé, budou síly působící na trojúhelníkové stěny (kolmé na osu z) stejně velké a opačné, můžeme na ně tedy zapomenout. Složka x síly působící na spodní obdélník je

$$\Delta F_{x2} = S_{xy} \Delta x \Delta z$$

a x -ová složka síly působící na svislý obdélník je

$$\Delta F_{x1} = S_{xx} \Delta y \Delta z.$$

Součet těchto dvou sil musí být roven x -ové složce síly působící na plochu N a směřující *ven*. Necht n je jednotkový vektor kolmý na plochu N a F_n necht je síla působící na N . Pak máme

$$F_{xn} = S_{xx} \Delta y \Delta z + S_{xy} \Delta x \Delta z.$$

Složka S_{xn} napětí působícího na tuto plochu je rovna ΔF_{xn} dělenému velikostí plochy $\Delta z \cdot \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, tj.

$$S_{xn} = S_{xx} \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} + S_{xy} \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}.$$

Výraz $\Delta x / \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ je však kosinem úhlu ϑ , jenž svírají vektor n a osa y , jak to vidíme na obr. 31.8 – lze jej proto psát jako složku y vektoru n , tj. jako n_y . Podobně pro $\Delta y / \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ platí $\sin \vartheta = n_x$. Můžeme psát

$$S_{xn} = S_{xx} n_x + S_{xy} n_y.$$

Zobecníme-li to nyní na libovolný elementární povrch, dostaneme

$$S_{xn} = S_{xx} n_x + S_{xy} n_y + S_{xz} n_z$$

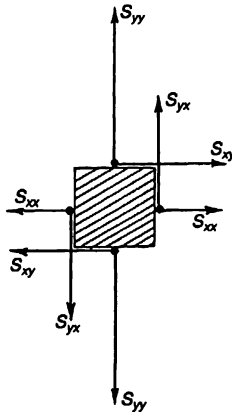
nebo obecně

$$S_{in} = \sum_j S_{ij} n_j. \quad (31.24)$$

Je tedy možné vyjádřit sílu působící na libovolnou elementární plochu pomocí koeficientů S_{ij} , které tak úplně popisují vnitřní napětí v látce.

Rovnice (31.24) nám říká, že tenzor S_{ij} dává do vztahu sílu S_n a jednotkový vektor n právě tak, jako α_{ij} dává do vztahu P a E . Jelikož n a S_n jsou vektory, musí se složky S_{ij} transformovat při změně souřadnic jako tenzor. S_{ij} je tedy skutečně tenzorem.

Také můžeme ukázat, že S_{ij} je symetrickým tenzorem, podíváme-li se, jaké síly působí na látku, která má tvar malé krychle. Předpokládejme, že máme malou krychli, jejíž hrany jsou rovnoběžné s našimi souřadnicovými osami, a podívejme se na její průřez znázorněný na obr. 31.9. Mají-li hrany jednotkovou délku, můžeme x -ové a y -ové složky sil působící na stěny kolmé na osy x a y znázornit tak, jak to vidíme na obr. 31.9. Je-li krychle malá, napětí se při přechodu z jedné stěny krychle na protilehlou podstatně nezmění. Příslušné složky sil jsou stejné a opačné tak, jako to vidíme na obrázku. Navíc moment síly působící na krychli musí být nulový, jinak by se krychle začala otáčet. Celkový moment síly vzhledem ke středu je $(S_{yx} - S_{xy})$ (krát jednotková délka hrany krychle). Má-li být tento výraz roven nule, musí být S_{yx} rovno S_{xy} , a tenzor napětí je tedy symetrický.



Obr. 31.9 Složky sil x a y působících na čtyři stěny malé jednotkové krychle

Jelikož S_{ij} je symetrickým tenzorem, může být popsán elipsoidem se třemi hlavními osami. Pro plochy kolmé na tyto osy jsou napětí obzvláště jednoduchá – odpovídají tlaku nebo tahu kolmému na danou plochu. Podél těchto ploch nepůsobí žádné smykové síly. Pro libovolné napětí můžeme vždy zvolit naše osy tak, aby byla smyková složka síly rovna nule. Je-li elipsoidem koule, působí v libovolném směru jen kolmé složky. To odpovídá hydrostatickému tlaku (kladnému nebo zápornému). Pro hydrostatický tlak je tedy tenzor diagonální a všechny tři složky jsou navzájem rovny. Ve skutečnosti jsou rovny právě tlaku p . Můžeme psát

$$S_{ij} = p \delta_{ij}. \quad (31.25)$$

Tenzor napětí, jakož i jeho elipsoid, se budou obecně měnit v dané látce od bodu k bodu. Chceme-li popsat daný kus látky, musíme udat hodnotu každé složky S_{ij} jako funkci polohy.

Tenzor napětí je tedy *polem*. Poznali jsme už *skalární pole*, jako například teplotu $T(x, y, z)$, v nichž je každému bodu v prostoru přiděleno jedno číslo, a *vektorová pole* jako $E(x, y, z)$, v nichž se každému bodu přiřazuje trojice čísel. Nyní máme tenzorové pole, kde je každému bodu prostoru přiřazeno devět čísel, nebo vlastně šest, protože S_{ij} je symetrický tenzor. Pro úplný popis vnitřních sil působících v libovolně deformované látce potřebujeme šest funkcí proměnných x, y, z .

31.7 TENZORY VYŠŠÍHO ŘÁDU

Tenzor napětí S_{ij} popisuje *vnitřní síly* v látce. Je-li látka elastická, je výhodné popisovat vnitřní *deformace* pomocí jiného tenzoru T_{ij} , která se nazývá tenzor *deformace*. Pro jednoduchý objekt, jako je například kovová tyč, umíme určit změnu délky ΔL podle Hookova zákona, který říká, že prodloužení je přibližně úměrné síle:

$$\Delta L = \gamma F.$$

Pro libovolné deformace pružného tuhého tělesa je vztah mezi deformací T_{ij} a napětím S_{ij} určen systémem lineárních rovnic

$$T_{ij} = \sum_{k,l} \gamma_{ijkl} S_{kl}. \quad (31.26)$$

Také víme, že potenciální energie pružiny (nebo tyče) je rovna

$$\frac{1}{2} F \Delta L = \frac{1}{2} \gamma F^2.$$

Obecný výraz pro hustotu elastické energie pevného tělesa je

$$W_{\text{elast}} = \sum_{ijkl} \frac{1}{2} \gamma_{ijkl} S_{ij} S_{kl}. \quad (31.27)$$

Úplný popis elastických vlastností krystalu je určen koeficienty γ_{ijkl} . Tímto představujeme novou „obludu“ – tenzor *čtvrtého řádu*. Jelikož každý index může nabývat libovolnou ze tří hodnot x, y nebo z , dostáváme dohromady $3^4 = 81$ koeficientů. Jenže ve skutečnosti je to jen 21 *různých* čísel. Zaprvé, jelikož tenzor S_{ij} je symetrický, obsahuje jen šest různých hodnot a v rovnici (31.27) potřebujeme jen 36 *různých* koeficientů. Zároveň však můžeme zaměnit S_{ij} za S_{kl} , aniž bychom změnili energii, proto γ_{ijkl} musí být symetrický při záměně ij za kl . Tím se snižuje počet různých koeficientů na 21. Proto k popisu elastických vlastností krystalu s nejnižší možnou symetrií je třeba 21 elastických konstant! Tento počet je, samozřejmě, nižší pro krystaly s vyšší symetrií. Například krychlový krystal má jen tři pružné konstanty a izotropní látka má jen dvě.

O správnosti předcházejícího tvrzení se můžeme přesvědčit. Jak mohou být složky tenzoru γ_{ijkl} nezávislé na směru os tak, jak to vyžadujeme pro izotropní látky? Odpověď je následující. Mohou být nezávislé *jen* tehdy, když je lze vyjádřit pomocí tenzoru δ_{ij} . Existují dva možné výrazy $\delta_{ij} \delta_{kl}$ a $\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}$, které mají požadovanou symetrii, proto γ_{ijkl} musí být jejich lineární kombinací. Proto pro izotropní látky platí

$$\gamma_{ijkl} = a(\delta_{ij} \delta_{kl}) + b(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

a potřebujeme dvě konstanty a a b k popisu elastických vlastností látky. Důkaz, že krychlový krystal potřebuje tři konstanty, přenecháme vám.

Jako poslední příklad, tentokrát na tenzor třetího řádu, uvádíme piezoelektrický efekt. Působením napětí se v krystalu vytváří elektrické pole úměrné napětí. Obecný zákon má tvar

$$E_i = \sum_{j,k} P_{ijk} S_{jk},$$

kde E_i je elektrické pole a P_{ijk} jsou piezoelektrické koeficienty nebo piezoelektrický tenzor. Uměli byste dokázat, že má-li krystal střed inverze (invariance při záměně $x, y, z \rightarrow -x, -y, -z$), všechny piezoelektrické koeficienty jsou rovny nule?

31.8 ČTYŘTENZOR ELEKTROMAGNETICKÉ ENERGIE A HYBNOSTI

Všechny tenzory, které jsme v této kapitole dosud probírali, se vztahují k trojrozměrnému prostoru. Jsou definovány jako veličiny, které mají určité transformační vlastnosti při trojrozměrných rotacích. V kapitole 26 jsme měli možnost pracovat s tenzorem ve čtyřrozměrném relativistickém časoprostoru, a to s tenzorem elektromagnetického pole $F_{\mu\nu}$. Složky takového čtyřtenzoru se při Lorentzově transformaci souřadnic transformují určitým způsobem, který jsme odvodili. (Ačkoli jsme to tak nedělali, mohli jsme Lorentzovy transformace považovat za „rotace“ ve čtyřrozměrném „prostoru“, který se nazývá Minkowského prostor. Pak by i analogie s tím, co nyní děláme, byla jasnější.)

Jako náš poslední příklad zmíníme ještě jeden čtyřrozměrný tenzor z teorie relativity. Když jsme hovořili o tenzoru napětí, definovali jsme S_{ij} jako složky sil působících na jednotlivé plochy. Ale síla je rovna časové změně hybnosti. Proto místo výroku „ S_{xy} je složkou x síly působící na jednotkovou plochu kolmou na y “ bychom stejně správně mohli říci „ S_{xy} je rychlost změny toku složky x hybnosti jednotkovou plochou kolmou na y “. Jinými slovy, každá složka S_{ij} představuje i hustotu toku i -té složky hybnosti jednotkovou plochou kolmou na směr j . Tyto čistě prostorové složky jsou však součástí „většího“ tenzoru $S_{\mu\nu}$ ve čtyřech rozměrech (μ a $\nu = t, x, y, z$), který obsahuje navíc složky typu S_{tx}, S_{ty}, S_{tz} atd. Nyní se pokusíme najít fyzikální význam těchto dodatečných složek.

Víme, že prostorové složky představují hustotu toku hybnosti. Klíč k interpretaci časové složky nám poskytne jiný druh „toků“ – tok elektrického náboje. Rychlosti toku skalární veličiny, náboje (jednotkovou plochou kolmou na tok), přiřazujeme prostorový vektor – vektor proudové hustoty j . Viděli jsme, že časová složka tohoto vektoru toku představuje hustotu toho, co teče. Například j můžeme kombinovat s hustotou náboje ρ a dostaneme čtyřvektor $j_\mu = (\rho, j)$, tj. index μ v i_μ nabývá hodnoty t, x, y, z , což postupně označuje hustotu, hustotu toku ve směru x , hustotu toku ve směru y , hustotu toku ve směru z skalárního náboje.

Nyní, v analogii s naším tvrzením o časové složce toku skalární veličiny, bychom mohli očekávat, že vedle S_{xx}, S_{xy} a S_{xz} , které popisují tok x -ové složky hybnosti, existuje i časová složka S_{xt} , která představuje hustotu toho, co teče, tj. S_{xt} by měla být hustotou x -ové složky hybnosti. Náš tenzor tak můžeme horizontálně rozšířit o složku t . Dostaneme:

$$\begin{aligned} S_{xt} &= \text{hustota } x\text{-ové složky hybnosti} \\ S_{xx} &= \text{hustota toku } x\text{-ové složky hybnosti ve směru } x \\ S_{xy} &= \text{hustota toku } x\text{-ové složky hybnosti ve směru } y \\ S_{xz} &= \text{hustota toku } x\text{-ové složky hybnosti ve směru } z. \end{aligned}$$

Podobně pro y -ovou složku hybnosti máme tři složky hustoty toku S_{yx} , S_{yy} , S_{yz} , k nimž přidáme čtvrtou složku

$$S_{yt} = \text{hustota } y\text{-ové složky hybnosti.}$$

A samozřejmě, k S_{zx} , S_{zy} , S_{zz} bychom měli přidat

$$S_{zt} = \text{hustota } z\text{-ové složky hybnosti.}$$

Ve čtyřech rozměrech existuje i složka t hybnosti, a to je, jak víme, energie. Proto by tenzor S_{ij} měl být rozšířen i vertikálně o složky S_{tx} , S_{ty} a S_{tz} , kde

$$\begin{aligned} S_{tx} &= \text{hustota toku energie ve směru } x \\ S_{ty} &= \text{hustota toku energie ve směru } y \\ S_{tz} &= \text{hustota toku energie ve směru } z. \end{aligned} \quad (31.28)$$

tj. S_{tx} je tok energie jednotkovou plochou kolmou k ose x na jednotku času atd. Nakonec, abychom zkompletovali náš tenzor, potřebujeme S_{tt} , a to by měla být *hustota energie*. Náš trojrozměrný tenzor napětí S_{ij} jsme tak rozšířili na čtyřrozměrný *tenzor energie a hybnosti* $S_{\mu\nu}$. Index μ může nabývat čtyř hodnot t, x, y, z , které postupně označují hustotu, hustotu toku ve směru x , hustotu toku ve směru y a hustotu toku ve směru z . Podobně ν nabývá čtyř hodnot t, x, y, z , které označují to, co teče: energii, hybnost ve směru x , hybnost ve směru y a hybnost ve směru z .

Jako příklad budeme tento tenzor uvažovat ne v látce, ale v nějaké oblasti volného prostoru, kde působí elektromagnetické pole. Víme, že hustota toku energie je určena Poyntingovým vektorem $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Z relativistického hlediska jsou složky x, y, z vektoru \mathbf{S} složkami S_{tx}, S_{ty}, S_{tz} našeho čtyřrozměrného tenzoru energie a hybnosti. Symetrie tenzoru S_{ij} platí stejně i pro časové složky, proto je čtyřrozměrný tenzor $S_{\mu\nu}$ symetrický

$$S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu}. \quad (31.29)$$

Jinými slovy, složky S_{xt}, S_{yt}, S_{zt} , které představují hustoty složek x, y a z hybnosti, jsou zároveň složkami x, y a z Poyntingova vektoru \mathbf{S} , který představuje hustotu toku energie, jak jsme už ukázali v jedné z předcházejících kapitol.

Zbývající složky elektromagnetického tenzoru energie a hybnosti $S_{\mu\nu}$ lze také vyjádřit pomocí elektrického a magnetického pole \mathbf{E} a \mathbf{B} . Musíme tedy připustit existenci napětí nebo, aby to neznělo tak záhadně, existenci toku hybnosti v elektromagnetickém poli. Mluvili jsme o tom v kapitole 27 v souvislosti s rovnicí (27.12), ale tehdy jsme nešli do detailů.

Ti, kteří si chtějí vyzkoušet svou zručnost v zacházení s tenzory ve čtyřech rozměrech, by možná rádi viděli $S_{\mu\nu}$ vyjádřeno pomocí polí:

$$S_{\mu\nu} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\sum_{\alpha} F_{\mu\alpha} F_{\nu\alpha} - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} \sum_{\alpha, \beta} F_{\beta\alpha} F_{\beta\alpha} \right),$$

kde sčítání přes α, β znamená sčítání přes t, x, y, z , ale (jak to bývá zvykem v teorii relativity) sumační znak Σ a symbol δ mají speciální význam. Při sumaci se členy s x, y, z odčítají a $\delta_{tt} = +1$, zatímco $\delta_{xx} = \delta_{yy} = \delta_{zz} = -1$ a $\delta_{\mu\nu} = 0$ pro $\mu \neq \nu$ ($c=1$). Uměli byste ověřit, že toto vyjádření vede k hustotě energie $S_{tt} = (\varepsilon_0/2)(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$ a k Poyntingovu vektoru $\varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$? Uměli byste ukázat, že v elektrostatickém poli, kde $\mathbf{B} = 0$, mají hlavní osy napětí směr elektrického pole a že ve směru pole vzniká napětí $\varepsilon_0 E^2/2$, zatímco ve směru kolmém na pole vzniká stejně velký tlak?

Index lomu opticky hustých látek

32.1 POLARIZACE LÁTKY

32.2 MAXWELLOVY ROVNICE V DIELEKTRIKU

32.3 VLNY V DIELEKTRIKU

32.4 KOMPLEXNÍ INDEX LOMU

32.5 INDEX LOMU SMĚSI

32.6 VLNY V KOVECH

32.7 NÍZKOFREKVENČNÍ A VYSOKOFREKVENČNÍ PŘIBLÍŽENÍ. TLOUŠŤKA SKINOVÉ VRSTVY A PLAZMOVÁ FREKVENCE

32.1 POLARIZACE LÁTKY

Dále se budeme zabývat lomem světla, a tedy i absorpcí světla v opticky hustých látkách. V 31. kapitole 1. dílu jsme hovořili o původu indexu lomu, ale protože naše matematické znalosti nebyly v té době dostatečné, museli jsme se omezit jen na hledání indexu lomu pro látky s malou hustotou, pro plyny. Fyzikální principy, které vedly k indexu lomu, však byly jasné. Elektrické pole světelných vln polarizuje molekuly plynu, čímž vznikají oscilující dipólové momenty. Urychlené oscilující náboje vyzařují nové vlny pole. Toto nové pole interferuje se starým a vzniká změněné pole, které je ekvivalentní s původním, ale je posunuto o určitou fázi. Protože je tento fázový posun úměrný tloušťce látky, je to stejný efekt, jako kdyby v látce existovala jiná fázová rychlost. Když jsme tehdy tento jev uvažovali, zanedbávali jsme komplikace vznikající z takových efektů, jako je vliv nové vlny na pole oscilujících dipólů. Předpokládali jsme, že síly, působící na náboje v atomech, pocházejí jen od *dopadající* vlny, ve skutečnosti jsou však oscilace ovlivňovány nejen

dopadající vlnou, ale i vlnami vyzářenými všemi ostatními atomy. V té době bychom těžko uměli zahrnout tento efekt, proto jsme se zabývali jen zředěným plynem, kde tyto efekty nejsou důležité.

Teď vidíme, že tuto úlohu lze velmi snadno řešit pomocí diferenciálních rovnic. Je to metoda, která zastírá fyzikální původ indexu lomu (jako důsledek interference znovu vyzářených vln s původními vlnami), ale teorii hustých látek zjednodušuje. V této kapitole shrneme mnoho věcí, které už známe. Vše, co budeme potřebovat, jsme už prakticky nasbírali, takže nám zbývá jen uvést několik nových myšlenek. Pro osvěžení paměti uvádíme v *tab. 32.1* přehled rovnic, které budeme používat, spolu s odvolávkami na místo, kde je lze najít. Ve většině případů nebudeme ztrácet čas s opětovným fyzikálním zdůvodněním, ale prostě použijeme tyto rovnice.

Tabulka 32.1

Předmět	Odkaz	Rovnice
Tlumené oscilace	23. kap., 1. díl	$m(\dot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x) = F$
Index lomu plynů	31. kap., 1. díl	$n = 1 + \frac{1}{2} \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2)}$ $n = n' - i n''$
Pohyblivost	41. kap., 1. díl	$m \dot{x} + \mu \dot{x} = F$
Elektrická vodivost	43. kap., 1. díl	$\mu = \frac{\tau}{m}, \quad \sigma = \frac{Nq_e^2 \tau}{m}$
Polarizovatelnost	10. kap., 2. díl	$\epsilon_{\text{pol}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$
Pole v dielektriku	11. kap., 2. díl	$\mathbf{E}_{\text{lok}} = \mathbf{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}$

Úvodem si připomeneme mechanismus lomu v plynech. Předpokládejme, že máme N částic v jednotce objemu a že se každá částice chová jako harmonický oscilátor. Používáme model, podle kterého je elektron v atomu nebo v molekule vázán silou, úměrnou výchylce (jako kdyby byl elektron udržován na svém místě pružinou). Zdůrazňovali jsme, že to není legitimní *klasický* model atomu. Později však ukážeme, že přesná kvantově mechanická teorie dává výsledky, které jsou s tímto modelem ekvivalentní (v jednoduchých případech). V našem původním přístupu jsme nebrali v úvahu možnou existenci tlumící síly v atomových oscilátorech, nyní ji však už v úvahu brát budeme. Taková síla je podobná síle odporu, tj. je to síla úměrná rychlosti elektronu. Pohybová rovnice má pak tvar

$$F = q_e E = m(\dot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x), \quad (32.1)$$

kde x je posunutí rovnoběžně se směrem E . (Předpokládáme, že jde o *izotropní* oscilátor, u kterého je síla vracející elektron do původní polohy stejná ve všech směrech. Kromě toho zatím uvažujeme lineárně polarizovanou vlnu, tj. E nemění směr.) Závis-li elektrické pole působící na atom na čase sinusoidálně, můžeme psát

$$E = E_0 e^{i\omega t}. \quad (32.2)$$

Posunutí pak bude oscilovat s toutéž frekvencí a můžeme psát

$$x = x_0 e^{i\omega t}.$$

Dosadíme-li $\dot{x} = i\omega x$ a $\ddot{x} = -\omega^2 x$, můžeme x vyjádřit pomocí E takto

$$x = \frac{\frac{q_e}{m}}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2} E. \quad (32.3)$$

Známe-li posunutí, umíme vypočítat zrychlení \ddot{x} a umíme najít vyzařovanou vlnu odpovědnou za vznik lomu. Tímto způsobem jsme vypočítali index lomu v 31. kapitole 1. dílu.

Nyní však chceme postupovat jinak. Indukovaný dipólový moment p atomu je $q_e x$, nebo použijeme-li rovnici (32.3)

$$p = \frac{\frac{q_e^2}{m}}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2} E. \quad (32.4)$$

Jelikož p je úměrné E , píšeme

$$p = \varepsilon_0 \alpha(\omega) E, \quad (32.5)$$

kde α je *atomová polarizovatelnost*.⁴²⁾ Při takové definici máme

$$\alpha = \frac{\frac{q_e^2}{m\varepsilon_0}}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2}. \quad (32.6)$$

Kvantově mechanické řešení pohybu elektronů v atomech vede k podobnému výsledku kromě následujících modifikací: Atomy mají několik vlastních frekvencí a každá má svou vlastní disipativní konstantu γ . Taktéž efektivní síla každého modu je jiná a můžeme ji vyjádřit jako součin polarizovatelnosti při dané frekvenci a vazbové konstanty f , což je číslo, o němž předpoklá-

⁴²⁾ V celé této kapitole používáme označení z 31. kapitoly 1. dílu a α představuje *atomovou* polarizovatelnost tak, jak je definována zde. V předcházející kapitole jsme používali α pro označení *objemové* polarizovatelnosti, tj. poměru P a E . Podle označení této kapitoly $P = N\alpha\varepsilon_0 E$ (viz rovnici (32.8)).

dáme, že je řádově rovno jedné. Když trojici parametrů ω , γ , f příslušející danému oscilačnímu modu označíme ω_k , γ_k , f_k a provedeme-li sčítání přes různé mody, můžeme místo (32.6) psát modifikovanou rovnici

$$\alpha(\omega) = \frac{q_e^2}{\epsilon_0 m} \sum_k \frac{f_k}{-\omega^2 + i\gamma_k \omega + \omega_{0k}^2}. \quad (32.7)$$

Je-li N počet atomů v jednotkovém objemu látky, je polarizace P jednoduše rovna $Np = \epsilon_0 N\alpha E$, tj. je úměrná E :

$$P = \epsilon_0 N\alpha(\omega) E. \quad (32.8)$$

Jinými slovy, působí-li v látce sinusoidální elektrické pole, připadá na jednotkový objem látky určitý indukovaný dipólový moment úměrný elektrickému poli. Je třeba zdůraznit, že konstanta úměrnosti α závisí na frekvenci. Při velmi vysokých frekvencích je α malé, tj. odezva je slabá. Ale při nízkých frekvencích může být reakce látky silná. Kromě toho konstanta úměrnosti je komplexní číslo, a to znamená, že polarizace nesleduje přesně změny elektrického pole, ale může být do určité míry posunutá ve fázi. V každém případě je to polarizace, jejíž velikost je úměrná intenzitě elektrického pole.

32.2 MAXWELLOVY ROVNICE V DIELEKTRIKU

Existence polarizace v látce znamená, že jsou v ní přítomny polarizační náboje nebo proudy, které musíme dosadit do úplné soustavy Maxwellových rovnic, abychom našli příslušná pole. Tentokrát budeme řešit Maxwellovy rovnice pro případ, kdy náboje a proudy nejsou rovny nule, jako tomu bylo ve vakuu, ale jsou implicitně určeny vektorem polarizace. Naším prvním krokem bude najít explicitní vyjádření pro nábojovou hustotu ρ a proudovou hustotu j , obě vztahené na tak malý objem, jaký jsme měli při definování P . Požadované ρ a j pak lze určit z polarizace.

V kapitole 10 jsme viděli, že mění-li se polarizace od bodu k bodu, vzniká nábojová hustota určená vztahem

$$\rho_{\text{pol}} = -\nabla \cdot P. \quad (32.9)$$

Tehdy jsme se zabývali statickými poli, ale stejný vzorec platí i pro pole měnící se v čase. Mění-li se však s časem P , musí být náboje v pohybu, a je tu tedy i polarizační proud. Každý z pohybujících se nábojů přispívá proudem, který je roven velikosti náboje q_e krát jeho rychlost v . Je-li v jednotkovém objemu N takových nábojů, je proudová hustota

$$j = Nq_e v.$$

Jelikož víme, že $v = dx/dt$, bude $j = Nq_e(dx/dt)$ a to je právě dP/dt . Proto je proudová hustota pocházející z proměnné polarizace

$$j_{\text{pol}} = \frac{dP}{dt}. \quad (32.10)$$

Naši úlohu lze nyní řešit přímo a snadno. Napíšeme Maxwellovy rovnice s nábojovou a proudovou hustotou vyjádřenou pomocí P podle rovnic (32.9) a (32.10). (Předpokládáme, že v látce

nejsou žádné jiné proudy a náboje.) Pak z rovnice (32.5) určíme vztah mezi \mathbf{P} a \mathbf{E} , rovnice řešíme vzhledem k \mathbf{E} a \mathbf{B} a hledáme vlnová řešení.

Dříve než přistoupíme k řešení, uděláme jednu historickou poznámku. Maxwell původně psal své rovnice ve tvaru, který byl odlišný od toho, který používáme dnes. Jelikož byly rovnice v této formě psány po dlouhé roky, a někteří lidé je tak stále ještě pší, vysvětlíme, v čem je rozdíl. V těch dobách nebyl mechanismus dielektrické konstanty plně a jasně pochopen. Nebyla jasná podstata atomů a ani to, že v látce dochází k polarizaci. Lidé nevěděli, že k hustotě náboje ρ přispívá také $\nabla \cdot \mathbf{P}$. Náboje chápali jen jako volné náboje, které nejsou vázány v atomech (jako ty, které se pohybují ve vodiči, nebo které vznikají třením na povrchu látky).

Dnes pokládáme za ρ celou hustotu náboje včetně té, která pochází z nábojů vázaných v atomu. Označíme-li tuto část ρ_{pol} , můžeme psát

$$\rho = \rho_{\text{pol}} + \rho_{\text{ost}},$$

kde ρ_{ost} je nábojová hustota, kterou uvažoval Maxwell a vztahuje se na ostatní náboje, které nejsou vázány k jednotlivým atomům. Pak lze psát

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{pol}} + \rho_{\text{ost}}}{\epsilon_0}.$$

Za ρ_{pol} dosadíme z rovnice (32.9)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{ost}}}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{P}$$

nebo

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_{\text{ost}}. \quad (32.11)$$

K proudové hustotě v Maxwellových rovnicích pro $\nabla \times \mathbf{B}$ také přispívají obecně i vázané atomové proudy. Proto můžeme psát

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{pol}} + \mathbf{j}_{\text{ost}}$$

a Maxwellovy rovnice budou mít tvar

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}_{\text{ost}}}{\epsilon_0} + \frac{\mathbf{j}_{\text{pol}}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (32.12)$$

Využijeme (32.10) a rostaneme

$$\epsilon_0 c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}_{\text{ost}} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}). \quad (32.13)$$

Nyní vidíte, že kdybychom *definovali* nový vektor

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (32.14)$$

získali by dvě rovnice pole tvar

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{ost}} \quad (32.15)$$

$$\epsilon_0 c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}_{\text{ost}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (32.16)$$

To je ve skutečnosti tvar rovnic, který Maxwell používal pro dielektrika. Jeho zbylé dvě rovnice byly

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

a

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

což jsou tytéž rovnice, které používáme my.

Maxwell a jiní vědci té doby měli problémy i s magnetickými látkami (jimiž se zanedlouho budeme zabývat). Jelikož nevěděli o cirkulujících proudcích, které jsou zodpovědné za atomový magnetismus, používali proudovou hustotu, v níž chyběla ještě jedna část. Místo rovnice (32.16) ve skutečnosti psali

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}' + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (32.17)$$

kde se \mathbf{H} liší od $\varepsilon_0 c^2 \mathbf{B}$, tím, že zahrnuje i efekty z atomových proudů. (\mathbf{j}' představuje zbytkovou část proudů.) Proto měl Maxwell čtyři vektory pole $-\mathbf{E}$, \mathbf{D} , \mathbf{B} a \mathbf{H} . V zavedení \mathbf{D} a \mathbf{H} byla skryta neznalost toho, co se děje uvnitř látky. Rovnice psané tímto způsobem najdete na mnoha místech.

Abychom mohli rovnice řešit, potřebujeme najít vztah \mathbf{D} a \mathbf{H} k ostatním polím. Je zvykem psát

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \text{a} \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (32.18)$$

Tyto vztahy jsou však jen přibližně správné pro některé látky a to jen tehdy, když se pole nemění rychle s časem. (Pro pole, která se mění sinusoidálně, můžeme občas psát vztahy tímto způsobem, jsou-li ε a μ komplexní funkce frekvence, ale nelze to udělat pro pole libovolně závislá na čase.) Jak je vidět, při řešení rovnic se používaly různé druhy podvodů. Myslíme si, že nejsprávnější je mít rovnice zapsané pomocí základních veličin tak, jak je nyní chápeme a jak s nimi nyní pracujeme.

32.3 VLNY V DIELEKTRIKU

Chceme zjistit, jaké druhy elektromagnetických vln mohou existovat v dielektrické látce, kde nejsou žádné náboje, kromě těch, které jsou vázány v látce. Zvolíme tedy $\rho = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ a $\mathbf{j} = \partial \mathbf{P} / \partial t$. Maxwellovy rovnice budou mít tvar

$$\begin{aligned} \text{a) } \nabla \cdot \mathbf{E} &= -\frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\varepsilon_0} & \text{b) } c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} + \mathbf{E} \right) \\ \text{c) } \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \text{d) } \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (32.19)$$

Tyto rovnice můžeme řešit tak, jako jsme to dělali předtím. Začneme tím, že na rovnici (32.19c) aplikujeme rotaci

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B}.$$

Dále využijeme vektorovou identitu

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

a zároveň za $\nabla \times \mathbf{B}$ dosadíme z rovnice (32.19b). Dostaneme

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2 \epsilon_0} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Pro $\nabla \cdot \mathbf{E}$ použijeme rovnici (32.19a) a dostaneme

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{P}) + \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \quad (32.20)$$

Tak jsme místo vlnové rovnice dostali vztah, podle něž je d'alembertián \mathbf{E} roven dvěma členům obsahujícím polarizaci \mathbf{P} .

Jelikož však \mathbf{P} závisí na \mathbf{E} , může mít rovnice (32.20) přece jen vlnová řešení. Omezíme se nyní na *izotropní* dielektrika, takže \mathbf{P} má vždy tentýž směr jako \mathbf{E} . Pokusme se najít řešení pro vlnu, která postupuje ve směru osy z . Elektrické pole se v tom případě může měnit jako $e^{i(\omega t - kz)}$. Budeme také předpokládat, že vlna je polarizována ve směru x , tj. elektrické pole má jen složku x . Zapišeme to jako

$$E_x = E_0 e^{i(\omega t - kz)}. \quad (32.21)$$

Víte, že libovolná funkce proměnné $(z - vt)$ představuje vlnu, která postupuje rychlostí v . Exponent v rovnici (32.21) lze psát jako

$$-ik \left(z - \frac{\omega}{k} t \right),$$

tj. rovnice (32.21) představuje vlnu s fázovou rychlostí

$$v_f = \frac{\omega}{k}.$$

Index lomu n je definován (viz 31. kapitolu 1. dílu) vztahem

$$v_f = \frac{c}{n}.$$

Rovnice (32.21) tak získá tvar

$$E_x = E_0 e^{i\omega \left(t - \frac{n}{c} z \right)}.$$

Můžeme tedy n najít tím způsobem, že zjistíme, jaké musí být k , aby rovnice (32.21) vyhovovala rovnicím pole, a pak využijeme vztah

$$n = \frac{kc}{\omega}. \quad (32.22)$$

V izotropní látce má P jen složku x a ta se nemění podél osy x . Proto $\nabla \cdot P = 0$, a tak se zbavíme prvního členu na pravé straně rovnice (32.20). Navíc uvažujeme lineární dielektrikum, v němž P_x se mění jako $e^{i\omega t}$, a $\partial^2 P_x / \partial t^2 = -\omega^2 P_x$. Laplasiján v rovnici (32.20) bude prostě $\partial^2 E_x / \partial z^2 = -k^2 E_x$, takže dostaneme

$$-k^2 E_x + \frac{\omega^2}{c^2} E_x = -\frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2} P_x. \quad (32.23)$$

Na chvíli předpokládejme, že pro sinusoidální E můžeme P položit úměrné E tak, jak je to v rovnici (32.5). (O tomto předpokladu pohovoříme později.) Pšeme

$$P_x = \epsilon_0 N \alpha E_x.$$

Pak E_x z rovnice (32.23) vypadne a dostaneme

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (1 + N\alpha). \quad (32.24)$$

Zjistili jsme, že vlna typu (32.21) s vlnovým číslem k určeným rovnicí (32.24) vyhovuje rovnicím pole. Využijeme-li rovnici (32.22), dostaneme index n ze vztahu

$$n^2 = 1 + N\alpha. \quad (32.25)$$

Porovnejme tento vzorec s tím, který jsme dostali v naší teorii indexu lomu pro plyny (31. kapitola 1. dílu). Tam jsme získali rovnici (31.29), která měla tvar

$$n = 1 + \frac{1}{2} \frac{Nq_e^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{-\omega^2 + \omega_0^2}. \quad (32.26)$$

Dosadíme-li α z rovnice (32.6) do rovnice (32.25), dostaneme

$$n^2 = 1 + \frac{Nq_e^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2}. \quad (32.27)$$

Vidíme, že tu jsou určité rozdíly. Zaprvé, máme tu nový člen $i\gamma\omega$, protože jsme brali v úvahu tlumení oscilátorů. Za druhé, levá strana je n místo n^2 a navíc je tu faktor $1/2$. Ale všimněme si, že je-li N dostatečně malé, a n je tedy blízké jedné (jako v případě plynů), rovnice (32.27) říká, že n^2 je jedna plus malé číslo: $n^2 = 1 + \epsilon$. Pak můžeme psát $n = \sqrt{1 + \epsilon} \approx 1 + \epsilon/2$ a oba výrazy jsou ekvivalentní. Tak nám naše metoda dává pro plyny tentýž výsledek, který jsme dostali dříve.

Nyní bychom si mohli pomyslet, že rovnice (32.27) nám dává index lomu i pro husté látky. Z několika důvodů je tu však třeba modifikace. Zaprvé, při odvozování této rovnice jsme předpokládali, že polarizačním polem působícím na každý atom je pole E_x . Tento předpoklad však není správný, neboť v hustých látkách působí i pole produkované jinými atomy v okolí, které může být srovnatelné s E_x . Podobný případ jen uvažovali při studiu statických polí v dielektrikách (viz kapitola 11). Vzpomínáte si, že při odhadu pole, které působí na jednotlivé atomy, jsme si představili, že atom je obklopen dielektrikem jakoby seděl ve sférické jámě? Pole v takové jámě, (nazvali jsme jej *lokální*) je v porovnání se středním polem E zvětšeno o hodnotu $P/3\epsilon_0$. (Nezapomeňte však, že tento výsledek platí přesně jen pro izotropní látky včetně speciálního případu kubického krystalu.)

Stejně argumenty platí i pro elektrické pole ve vlně, pokud je vlnová délka mnohem větší než vzdálenost mezi atomy. Omezíme-li se na takovéto případy, můžeme psát

$$E_{\text{lok}} = E + \frac{P}{3\epsilon_0}. \quad (32.28)$$

Právě toto lokální pole bychom měli používat místo E v rovnici (32.3), tj. rovnici (32.8) bychom měli přepsat na

$$P = \epsilon_0 N\alpha E_{\text{lok}}. \quad (32.29)$$

Dosadíme E_{lok} z rovnice (32.28), dostaneme

$$P = \epsilon_0 N\alpha \left(E + \frac{P}{3\epsilon_0} \right)$$

neboli

$$P = \frac{N\alpha}{1 - \frac{N\alpha}{3}} \epsilon_0 E. \quad (32.30)$$

Jinými slovy, pro opticky husté látky je P stále úměrné E (pro sinusoidální pole). Ale konstanta úměrnosti není $\epsilon_0 N\alpha$, jak jsme psali za rovnic (32.23), ale má být $\epsilon_0 N\alpha / [1 - (N\alpha/3)]$. Rovnici (32.25) bychom měli opravit na

$$n^2 = 1 + \frac{N\alpha}{1 - \frac{N\alpha}{3}}. \quad (32.31)$$

Vhodnější bude, když tuto rovnici přepíšeme na tvar

$$3 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = N\alpha, \quad (32.32)$$

kteřá je s ní algebraicky ekvivalentní. Tato rovnice je známa jako Clausiova-Mosottiova rovnice.

V opticky hustých látkách je ještě další komplikace. Jelikož sousední atomy jsou blízko sebe, je mezi nimi silné vzájemné působení. Proto se vnitřní oscilační módy mění. Vlastní frekvence atomových oscilací jsou v důsledku vzájemných působení rozmazané a obvykle jsou silně

potlačeny – koeficient tření se podstatně zvýší. Proto všechna ω_0 a γ budou pro pevnou látku docela jiná než pro volné atomy. Při těchto výhradách ještě stále můžeme určovat α , alespoň přibližně, z rovnice (32.7). Pak dostaneme

$$3 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{Nq_e^2}{m\epsilon_0} \sum_k \frac{f_k}{-\omega^2 + i\gamma_k\omega + \omega_{0k}^2}. \quad (32.33)$$

A na závěr poslední komplikace. Je-li hustá látka směsí různých složek, bude každá z nich přispívat k polarizaci. Celkové α bude sumou příspěvků každé složky směsi (kromě nepřesnosti aproximace lokálního pole (32.28) pro uspořádané krystaly – efekty, o nichž jsme hovořili, když jsme analyzovali feroelektrika). Označíme-li počet atomů každé složky připadající na jednotkový objem N_j , měli bychom rovnicí (32.32) nahradit vztahem

$$3 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \sum_j N_j \alpha_j, \quad (32.34)$$

kde každé α_j bude určeno výrazem typu (32.7). Rovnicí (32.34) uzavíráme naši teorii indexu lomu. Veličina $3(n^2 - 1)/(n^2 + 2)$ je určena nějakou komplexní funkcí frekvence, která představuje atomovou polarizovatelnost $\alpha(\omega)$. Přesné určení $\alpha(\omega)$, (tj. nalezení f_k , γ_k a ω_{0k}) v opticky hustých látkách představuje náročný kvantově mechanický problém. Byl vyřešen pomocí základních principů jen pro několik zvláště jednoduchých látek.

32.4 KOMPLEXNÍ INDEX LOMU

Nyní se podíváme na důsledky vyplývající z našeho výsledku – z rovnice (32.33). Zaprvé, jak vidíme, α je komplexní, takže n bude komplexním číslem. Co to znamená? Řekněme, že n píšeme jako sumu reálné a imaginární části

$$n = n_R - i n_I, \quad (32.35)$$

kde n_R a n_I jsou reálné funkce ω . Část $i n_I$ píšeme se znaménkem minus tak, aby n_I bylo kladnou veličinou ve všech běžných optických látkách. (V běžných neaktivních látkách, které nejsou samy zdrojem světla, jako například lasery, je γ kladným číslem, a to dělá imaginární část n zápornou.) Naši rovinnou vlnu v rovnici (32.21) můžeme pomocí n vyjádřit jako

$$E_x = E_0 e^{-i\omega\left(t - n\frac{z}{c}\right)}.$$

Dosadíme-li za n vyjádření (32.35), dostaneme

$$E_x = E_0 e^{-\omega n_I \frac{z}{c}} e^{i\omega\left(t - n_R \frac{z}{c}\right)}. \quad (32.36)$$

Člen $e^{i\omega(t - n_R z/c)}$ představuje vlnu, která se šíří rychlostí c/n_R , takže n_R je to, co normálně pokládáme za index lomu. Ale *amplituda* této vlny je

$$E_0 e^{-\omega n_1 \frac{z}{c}}$$

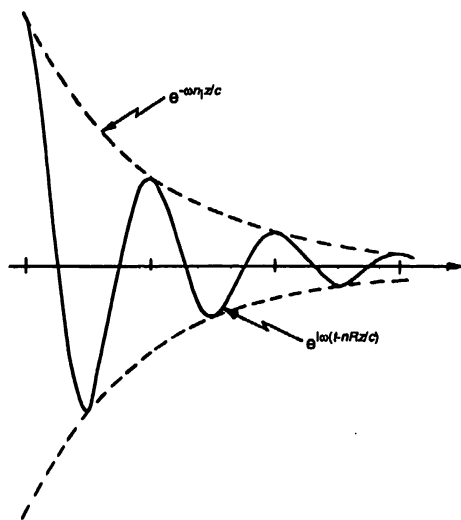
a klesá tedy exponenciálně se z . Graf intenzity elektrického pole jako funkce z při nějakém fixovaném t je znázorněn na obr. 32.1 pro $n_1 \approx n_R / 2\pi$. Imaginární část indexu lomu představuje oslabení vlny v důsledku energetických ztrát v atomových oscilátorech. Intenzita vlny je úměrná druhé mocnině amplitudy, takže

$$\text{Intenzita} \sim e^{-2\omega n_1 \frac{z}{c}}.$$

Často se to píše jako

$$\text{Intenzita} \sim e^{-\beta z},$$

kde $\beta = 2\omega n_1 / c$ a nazývá se *koefficient absorpce*. Rovnice (32.33) představuje tedy nejen teorii indexu lomu látek, ale zároveň i teorii absorpce světla.



Obr. 32.1 Graf intenzity E_x v určitém časovém okamžiku t , je-li $n_1 \approx n_R / 2\pi$

V látkách, které se obvykle nazývají průhledné, je veličina $c/\omega n_1$, která má rozměr délky, ve srovnání s tloušťkou materiálu velká.

32.5 INDEX LOMU SMĚSI

Naše teorie indexu lomu nám dává ještě další předpověď, kterou můžeme porovnat s experimentem. Předpokládejme, že máme směs dvou látek. Index této směsi není střední hodnotou obou indexů, ale lze ho určit pomocí součtu dvou polarizovatelností jako v rovnici (32.34). Ptáme-li se na index, řekněme cukrového roztoku, bude celková polarizovatelnost součtem polarizovatelností vody a cukru. Každá z nich se musí, samozřejmě, počítat pro počet molekul N dané složky připadající na objemovou jednotku. Jinak řečeno, má-li daný roztok

N_1 molekul vody s polarizovatelností α_1 a N_2 molekul sacharózy ($C_{12}H_{22}O_{11}$) s polarizovatelností α_2 , měli bychom mít

$$3 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = N_1 \alpha_1 + N_2 \alpha_2. \quad (32.37)$$

Tento vzorec můžeme použít k experimentálnímu ověření naší teorie, a to tak, že budeme měřit index lomu pro různé koncentrace sacharózy ve vodě. Musíme však přitom vzít v úvahu několik předpokladů. Naš vzorec předpokládá, že při rozpouštění sacharózy nedochází k žádné chemické reakci a narušení oscilací jednotlivých atomů se pro různé koncentrace navzájem příliš neliší. Proto je náš výsledek jistě jen přibližný. Podívejme se, nakolik je správný.

Příklad s cukrovým roztokem jsme vybrali proto, že máme k dispozici dobrou tabulku z fyzikálně-chemické příručky obsahující naměřené hodnoty indexu lomu, jakož i proto, že cukr je molekulární krystal a přechází do roztoku bez ionizace nebo jiných změn chemického stavu.

V prvních třech sloupcích *tab. 32.2* uvádíme údaje z příručky. Ve sloupci *A* je váhový podíl sacharózy, sloupec *B* je naměřená hustota ($g \cdot cm^{-3}$) a sloupec *C* index lomu naměřený pro světlo s vlnovou délkou 589,3 nm. Čistému cukru jsme přiřadili index lomu krystalů cukru. Krystaly nejsou izotropní, proto je jejich index lomu různý podél různých směrů. Příručka udává tři hodnoty:

$$n_1 = 1,5376, \quad n_2 = 1,5651, \quad n_3 = 1,5705.$$

My jsme vzali střední hodnotu.

Nyní bychom se mohli pokusit vypočítat n pro každou koncentraci, ale nevíme, jaké hodnoty máme zvolit pro α_1 nebo α_2 . Ověříme si naši teorii tímto způsobem: Budeme předpokládat, že polarizovatelnost vody (α_1) je stejná při všech koncentracích, a vypočteme polarizovatelnost sacharózy tak, že použijeme hodnotu n z experimentu, a vyřešíme rovnici (32.37) pro α_2 . Je-li teorie přesná, měli bychom dostat stejné α_2 pro všechny koncentrace.

Tabulka 32.2 Index lomu roztoků sacharózy a porovnání s předpověďmi rovnice (32.37)

A	B	C	D	E	F	G	H	J
Váhový podíl sacharózy	hustota ($g \cdot cm^{-3}$)	n při 20 °C	Látkové množství sacharózy ^d na litr N_2/N_0	Látkové množství vody ^c na litr N_1/N_0	$3 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$	$N_1 \alpha_1$	$N_2 \alpha_2$	$N_0 \alpha_2$ litr/mol
0 ^a	0,9982	1,333	0	55,5	0,617	<u>0,617</u>	0	–
0,30	1,1270	1,3811	0,970	43,8	0,698	0,487	0,211	0,213
0,50	1,2296	1,4200	1,798	34,15	0,759	0,379	0,380	0,211
0,85	1,4454	1,5033	3,59	12,02	0,886	0,1335	0,752	0,210
1,00 ^b	1,558	1,5577 ^c	4,64	0	0,960	0	0,960	0,207

^ačistá voda

^cstřední hodnota

^erelativní molekulová hmotnost vody = 18

^bkrystaly cukru

^drelativní molekulová hmotnost sacharózy = 342

Nejdříve potřebujeme znát hodnoty N_1 a N_2 . Vyjádříme je pomocí Avogadrovy konstanty N_0 . Jako naši objemovou jednotku zvolíme jeden litr (1000 cm^3). Pak N_i/N_0 je podíl hmotnosti

v objemové jednotce k hmotnosti v jednom molu. A hmotnost na jeden litr je rovna součinu hustoty (vynásobené 1 000, chceme-li dostat gramy na litr) a váhové části sacharózy nebo vody. Tímto způsobem dostaneme N_2/N_0 a N_1/N_0 ve sloupcích *D* a *E* tabulky.

Ve sloupci *F* je vypočtena hodnota $3(n^2 - 1)/(n^2 + 2)$ z experimentálních hodnot *n* ve sloupci *C*. Pro čistou vodu je $3(n^2 - 1)/(n^2 + 2)$ rovno 0,617, což je právě $N_1 \alpha_1$. Pak můžeme vyplnit zbytek sloupce *G*, protože pro každý řádek musí být *G/E* stejné číslo, a to 0,617 : 55,5. Odečteme-li sloupec *G* od sloupce *F*, dostaneme příspěvek $N_2 \alpha_2$ od sacharózy, uvedený ve sloupci *H*. Vydělíme-li tento údaj hodnotou N_2/N_0 ve sloupci *D*, dostaneme hodnotu $N_0 \alpha_2$ uvedenou ve sloupci *J*.

Dalo by se čekat, že podle naší teorie budou všechny hodnoty $N_0 \alpha_2$ stejné. Vyšly nám ne úplně stejné, ale dost blízké hodnoty. Na závěr můžeme říci, že naše myšlenky byly správné. Navíc jsme zjistili, že polarizovatelnost molekuly cukru zjevně málo závisí na jejím okolí – polarizovatelnost je téměř stejná ve zředěném roztoku, jakož i v krystalu.

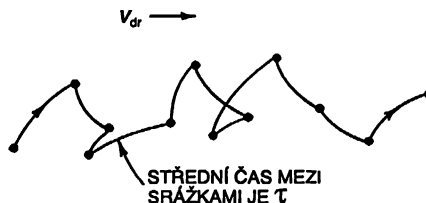
32.6 VLNY V KOVECH

Teorie, kterou jsme v této kapitole vypracovali pro pevné látky, se může s malými úpravami aplikovat i na dobré vodiče, jako jsou kovy. Některé elektrony v kovech nejsou vázány žádnou silou k nějakému konkrétnímu atomu – jsou to volné elektrony, které jsou zodpovědné za vodivost. Kromě toho jsou tam elektrony, které jsou vázané, a na ty lze naši teorii aplikovat přímo. Jejich vliv je však obvykle překryt efekty vodivostních elektronů. Budeme nyní uvažovat jen efekty volných elektronů.

Nepůsobí-li na elektron žádná buďící síla, ale síla odporu působí, liší se pohybová rovnice od rovnice (32.1) tím, že nemá člen $\omega_0^2 x$. Proto stačí položit $\omega_0 = 0$ při všech zbývajících odvozováních. Je tu však ještě jeden rozdíl. V dielektrikách musíme rozlišovat střední pole od lokálního, a to z následujícího důvodu: V izolátoru je každý dipól ve fixované poloze ve vztahu k ostatním dipólům. Ale vodivostní elektrony v kovu se pohybují všude, po celé látce, proto v průměru na ně působí právě střední pole *E*. Takže korekce, které jsme provedli v rovnici (32.5) pomocí rovnice (32.28) by se neměly dělat pro vodivostní elektrony. Proto výraz pro index lomu pro kovy by měl mít tvar (32.27) s tím rozdílem, že ω_0 by bylo rovno nule, tj.

$$n^2 = 1 + \frac{Nq_e^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{-\omega^2 + i\gamma\omega}. \quad (32.28)$$

To je příspěvek jen vodivostních elektronů, který pokládáme v kovech za nejpodstatnější.



Obr. 32.2 Pohyb volného elektronu

Nyní dokonce umíme zjistit, jakou hodnotu máme použít pro γ , neboť je ve vztahu k vodivosti kovu. V 43. kapitole 1. dílu jsme hovořili o tom, jak souvisí vodivost kovů s difúzí volných elektro-

nů v krystalu. Elektrony se pohybují po lomené dráze od jedné srážky k druhé a mezitím se pohybují volně až na zrychlení způsobené středním elektrickým polem (obr. 32.2). V 43. kapitole 1. dílu jsme našli, že střední driftová rychlost je rovna zrychlení krát střední doba τ mezi srážkami. Zrychlení je $q_e E / m$, proto

$$v_{\text{dr}} = \frac{q_e E}{m} \tau. \quad (32.39)$$

V tomto vyjádření se předpokládalo, že E bylo konstantní, proto v_{dr} bylo konstantní. Jelikož střední zrychlení je nulové, bude brzdná síla rovna působící síle. γ jsme definovali tak, že jsme řekli, že $\gamma m v$ je brzdná síla (viz rovnice (32.1)) a ta je rovna $q_e E$. Dostáváme tedy

$$\gamma = \frac{1}{\tau}. \quad (32.40)$$

I když τ nelze měřit přímo, můžeme jej určit měřením vodivosti kovu. Experimentálně je zjištěno, že elektrické pole E vyvolává proud s hustotou j úměrnou E (pro izotropní látky):

$$j = \sigma E.$$

Konstanta úměrnosti σ se nazývá *měrná vodivost (konduktivita)*. Položíme-li

$$j = N q_e v_{\text{dr}},$$

dostaneme podle očekávání z rovnice (32.39)

$$\sigma = \frac{N q_e^2}{m} \tau. \quad (32.41)$$

Veličiny τ a γ tak souvisejí s pozorovanou elektrickou vodivostí. Použijeme-li rovnice (32.40) a (32.41), můžeme přepsat náš výraz pro index lomu (32.38) na následující tvar

$$n^2 = 1 + \frac{\frac{\sigma}{\epsilon_0}}{i\omega(1 + i\omega\tau)}, \quad (32.42)$$

kde

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{m\sigma}{N q_e^2}. \quad (32.43)$$

Dostáváme známý výraz pro index lomu v kovech.

32.7 NÍZKOFREKVENČNÍ A VYSOKOFREKVENČNÍ PŘIBLÍŽENÍ. TLOUŠŤKA SKINOVÉ VRSTVY A PLAZMOVÁ FREKVENCE

Náš výsledek (32.42) pro index lomu kovů předpovídá různé charakteristiky pro šíření elektromagnetických vln při různých frekvencích. Nejdříve se podívejme, co se stane při velmi *nízkých* frekvencích. Je-li ω dostatečně malé, můžeme rovnici (32.42) přibližně nahradit vztahem

$$n^2 = -i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}. \quad (32.44)$$

Umocněním na druhou si můžeme ověřit, že platí vztah⁴³⁾

$$\sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}},$$

proto při nízkých frekvencích

$$n = \sqrt{\frac{\sigma}{2\epsilon_0\omega}} (1-i). \quad (32.45)$$

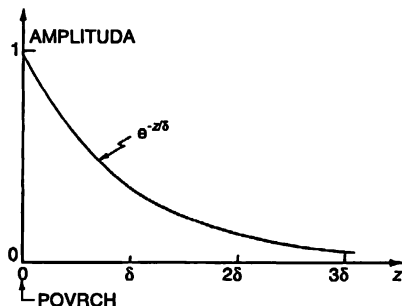
Reálná i imaginární část n mají tutéž velikost. Při tak velké imaginární části n se vlna v kovu rychle zeslabuje. Souhlasně s rovnicí (32.36) klesá amplituda vlny postupující ve směru osy z jako

$$\exp\left[-\sqrt{\frac{\sigma\omega}{2\epsilon_0 c^2}} z\right]. \quad (32.46)$$

Napíšeme to jako

$$e^{-\frac{z}{\delta}}, \quad (32.47)$$

kde δ je vzdálenost, na níž se amplituda vlny zmenší faktorem $e^{-1} = 1/2,72$, tj. přibližně třikrát. Na obr. 32.3 je amplituda takové vlny znázorněna jako funkce z .



Obr. 32.3 Amplituda příčné elektromagnetické vlny jako funkce vzdálenosti v kovu

43) Nebo můžeme psát $-i = e^{-i\pi/2}$; $\sqrt{-i} = \cos \pi/4 - i \sin \pi/4$, což dává tentýž výsledek.

Jelikož elektromagnetické vlny proniknou do kovu jen po tuto vzdálenost, nazývá se δ tloušťkou *skinové vrstvy* (z angl. skin = kůže, kůra). Je určena vztahem

$$\delta = \sqrt{\frac{2 \varepsilon_0 c^2}{\sigma \omega}}. \quad (32.48)$$

Co však považujeme za nízké frekvence? Podíváme-li se na rovnici (32.42), vidíme, že může být nahrazena přibližnou rovnicí (32.44) jen tehdy, když je $\omega \tau$ mnohem menší než jedna a je-li $\omega \varepsilon_0 / \sigma$ také mnohem menší než jedna, tj. naše nízkofrekvenční aproximace platí pro

$$\omega \ll \frac{1}{\tau}$$

a

$$\omega \ll \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (32.49)$$

Podívejme se, jaké frekvence odpovídají pro typický kov, jakým je například měď. Vypočítáme τ z rovnice (32.43) a σ / ε_0 z naměřené hodnoty vodivosti. Z příručky vybereme tyto údaje:

$$\begin{aligned} \sigma &= 5,76 \cdot 10^7 \text{ } (\Omega \cdot \text{m})^{-1} \\ \text{relativní atomová hmotnost} &= 63,5 \text{ g} \\ \text{hustota} &= 8,9 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} \\ \text{Avogadrova konstanta} &= 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}. \end{aligned}$$

Předpokládáme-li, že na jeden atom připadá jeden volný elektron, je počet elektronů, připadajících na jeden kubický metr

$$N = 8,5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}.$$

Využijeme-li, že

$$\begin{aligned} q_e &= 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\ \varepsilon_0 &= 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1} \\ m &= 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \end{aligned}$$

dostaneme

$$\begin{aligned} \tau &= 2,4 \cdot 10^{-14} \text{ s} \\ \frac{1}{\tau} &= 4,1 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1} \\ \frac{\sigma}{\varepsilon_0} &= 6,5 \cdot 10^{18} \text{ s}^{-1}. \end{aligned}$$

Pro frekvence menší než 10^{12} Hz bude mít měď nízkofrekvenční chování, které jsme popsali předtím (to znamená, že jsou to vlny, jejichž vlnová délka je větší než 0,3 mm – *velmi* krátké rádiové vlny!).

Pro tyto vlny je tloušťka skinové vrstvy v mědi

$$\delta = \sqrt{\frac{0,028 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}}{\omega}}$$

Pro mikrovlny s frekvencí 10 000 MHz (3-centimetrové vlny) platí

$$\delta = 6,7 \cdot 10^{-4} \text{ cm.}$$

Vlna pronikne na velmi malou vzdálenost.

Z toho vidíme, proč se při studiu dutin (nebo vlnodů) zajímáme jen o pole uvnitř dutiny, a ne o pole v kovu nebo mimo dutiny. Také vidíme, proč lze ztráty v dutině redukovat pozlacením nebo postříbřením. Ztráty pocházejí z proudů a jsou nezanedbatelné jen v tenké vrstvě, jejíž tloušťka je rovna hloubce skinové vrstvy.

Nyní se podívejme, jaký je index lomu kovu typu měď při vysokých frekvencích. Pro velmi vysoké frekvence je $\omega\tau$ mnohem větší než jedna a rovnici (32.42) můžeme dobře aproximovat výrazem

$$n^2 = 1 - \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega^2 \tau} \quad (32.50)$$

Pro vlny s vysokými frekvencemi se index lomu stává reálným – a je menší než jedna! Je to zřejmé i z rovnice (32.38), zanedbáváme-li disipativní člen s γ , což můžeme udělat při velmi velkých ω . Z výrazu (32.38) dostaneme

$$n^2 = 1 - \frac{Nq_e^2}{m\epsilon_0\omega^2} \quad (32.51)$$

To je, samozřejmě, totéž jako (32.50). V článku 7,3 jsme se setkali s veličinou $Nq_e^2/m\epsilon_0$, která byla druhou mocninou veličiny nazývané plazmová frekvence:

$$\omega_p^2 = \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m}$$

Proto rovnici (32.50) nebo (32.51) můžeme psát jako

$$n^2 = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2$$

Plazmová frekvence je něco jako „kritická“ frekvence.

Pro $\omega < \omega_p$ má index lomu v kovech i imaginární část a vlny se zeslabují. Pro $\omega \gg \omega_p$ je index lomu reálný a kovy se stávají průhlednými. Samozřejmě víte, že kovy jsou průhledné pro rentgenové paprsky. Ale některé kovy jsou dokonce průhledné i pro ultrafialové paprsky. V *tab. 32.3* uvádíme některé experimentálně pozorované vlnové délky, při nichž se příslušné kovy stávají průhlednými. V druhém sloupci je uvedena vypočtená kritická vlnová délka $\lambda_p = 2\pi c/\omega_p$. Vezmeme-li v úvahu, že experimentální vlnová délka není dostatečně dobře definována, je shoda docela dobrá.

Tabulka 32.3 Vlnové délky, při kterých se kov stává průhledným¹

Kov	λ (experimentálně) (nm)	$\lambda_p = 2\pi c/\omega_p$ (nm)
Li	155	155
Na	210	209
K	315	287
Rb	340	322

¹ Z knihy Ch. Kittel: Introduction to Solid State Physics, John Wiley and Sons, Inc. New York, 1956. Vyšlo také v českém překladu v nakladatelství Academia, Praha, 1985.

Možná, že vás překvapuje, že existuje souvislost mezi plazmovou frekvencí a šířením elektromagnetických vln v kovech. Plazmová frekvence se objevila v 7. kapitole jako vlastní frekvence oscilací hustoty volných elektronů. (Elektrické odpuzování shluku elektronů a jejich setrvačnost vedou k oscilacím hustoty.) *Podélné* vlny v plazmě rezonují při ω_p . My však nyní hovoříme o *příčných* elektromagnetických vlnách a zjistili jsme, že příčné vlny jsou absorbovány při frekvencích pod ω_p . (Je to zajímavá, a ne náhodná shoda okolností.)

Ačkoliv jsme dosud hovořili o šíření vln v kovech, jistě jste si už uvědomili univerzálnost tohoto fyzikálního jevu, tj. že není žádný rozdíl mezi volnými elektrony v kovu a elektrony v plazmatu, v ionosféře Země nebo v atmosféře hvězdy. Chceme-li pochopit šíření rádiových vln v ionosféře, můžeme použít tentýž výraz, samozřejmě, s vhodnými hodnotami pro N a τ . Teď chápeme, proč jsou dlouhé rádiové vlny absorbovány nebo odraženy ionosférou, zatímco krátké vlny jí procházejí. (Pro komunikaci s umělými družicemi se musí používat krátké vlny.)

Hovořili jsme o vysoko- a nízkofrekvenčních extrémních šíření vln v kovech. Pro frekvence mezi extrémními se musí používat výraz (32.42) v plném znění. Obecně má index lomu reálnou i imaginární část a vlna se při šíření v kovu zeslabuje. Pro velmi tenké vrstvy jsou kovy částečně průhledné i při optických frekvencích. Jako příklad uvedeme speciální ochranné brýle s napařenou tenkou vrstvou zlata, které používají lidé pracující u vysokoteplotních pecí. Viditelné světlo jimi proniká docela dobře, získává silný zelený odstín, zatímco infračervené paprsky jsou silně absorbovány.

A nakonec čtenáři jistě neuniklo, že mnohé ze vzorců částečně připomínají vzorce pro dielektrickou konstantu ϵ_r , o níž jsme hovořili v kapitole 10. Dielektrická konstanta ϵ_r je mírou reakce materiálu na konstantní pole, tj. když $\omega = 0$. Když se pozorně podíváte na definice n a ϵ_r , zjistíte, že ϵ_r je prostě limita n^2 , když $\omega \rightarrow 0$. Skutečně, dosadíme-li $\omega = 0$ a $n^2 = \epsilon_r$ do rovnic v této kapitole, získáme opět rovnice teorie dielektrické konstanty z kapitoly 11.

PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 32.1 ■ Jak jsme ukázali, při šíření elektromagnetických vln v látce tvořené nepolárními molekulami je čtverec indexu lomu při nízkých frekvencích roven relativní permitivitě. Bude to platit i pro jiné izotropní látky?
- 32.2 ■ Na frekvenci asi 6 MHz se ionosféra stává průzračnou. V rámci modelu volných elektronů odhadněte hustotu elektronů v ionosféře.
- 32.3 ■ Kovové těleso se nachází po dlouhou dobu v konstantním elektrickém poli, které je pak náhle vypnuto. V rámci modelu volných elektronů ukažte, že relaxační doba (tj. doba během níž driftová rychlost elektronů klesne e -krát) je rovna střední době mezi srážkami τ .
- 32.4 ■ Uvnitř kovu existují řešení Maxwellových rovnic ve tvaru rovinných vln $E_x = E_0 e^{i(\omega t - kz)}$, kde k je komplexní číslo. Pro nízké frekvence platí $k = (1 - i) \sqrt{\frac{\sigma \omega}{2 \epsilon_2 c^2}}$.
- a) Napište výraz pro magnetické pole takové vlny.
b) Jaký úhel svírají vektory E a B pro libovolné z ?
c) Jaký je fázový rozdíl vektorů E a B ? (Odpovídá-li okamžik t_1 maximální hodnotě E a okamžik t_2 maximální hodnotě B , rozumíme fázovým rozdílem $\pm \omega(t_1 - t_2)$.)
- 32.5 ■ Při odvozování výrazu (32.50) jsme předpokládali, že přechod od reálných hodnot n^2 k imaginárním v ultrafialové oblasti je velmi ostrý. Experimentálně se však takový přechod nepozoruje. Ukažte, že při použití vhodnějšího přiblížení lze dosáhnout souhlasu s experimentem.

Odraz od povrchů

- 33.1 ODRAZ A LOM SVĚTLA
- 33.2 VLNY V OPTICKY HUSTÝCH LÁTKÁCH
- 33.3 HRANIČNÍ PODMÍNKY
- 33.4 ODRAŽENÉ A LOMENÉ VLNY
- 33.5 ODRAZ OD KOVU
- 33.6 ÚPLNÝ VNITŘNÍ ODRAZ

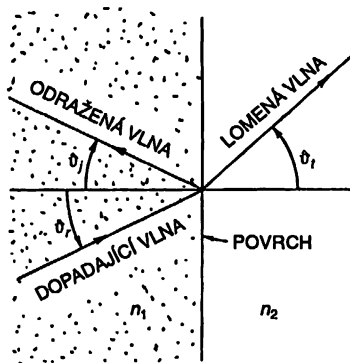
Přečtěte si znovu: kapitolu 33, díl 1., Polarizace

33.1 ODRAZ A LOM SVĚTLA

Předmětem této kapitoly je odraz a lom světla (nebo obecně elektromagnetických vln) na površích. O zákonech odrazu a lomu jsme hovořili už v 33. kapitole 1. dílu. Podíváme se, co jsme tehdy zjistili:

1. Úhel odrazu je roven úhlu dopadu. Jsou-li úhly definovány, jako je to na *obr. 33.1*, platí

$$\vartheta_r = \vartheta_i \quad (33.1)$$



Obr. 33.1 Odraz a lom světelných vln na povrchu (Směr šíření vln je kolmý na jejich čela.)

2. Součin $n \sin \vartheta$ je stejný pro dopadající i pro lomený paprsek (Snellův zákon):

$$n_1 \sin \vartheta_i = n_2 \sin \vartheta_r \quad (33.2)$$

3. Intenzita odraženého světla závisí na úhlu dopadu, jakož i na směru polarizace. Pro E kolmé na rovinu dopadu je koeficient odrazu

$$R_{\perp} = \frac{I_r}{I_i} = \frac{\sin^2(\vartheta_i - \vartheta_r)}{\sin^2(\vartheta_i + \vartheta_r)} \quad (33.3)$$

Pro E rovnoběžné s rovinou dopadu je koeficient odrazu

$$R_{\parallel} = \frac{I_r}{I_i} = \frac{\operatorname{tg}^2(\vartheta_i - \vartheta_r)}{\operatorname{tg}^2(\vartheta_i + \vartheta_r)} \quad (33.4)$$

4. Pro kolmý dopad (pro libovolnou polarizaci, samozřejmě!)

$$\frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2 \quad (33.5)$$

(Označení ϑ_i používáme pro úhel dopadu, ϑ_r pro úhel odrazu a ϑ_l pro úhel lomu.)

Našimi předcházejícími úvahami jsme v dané oblasti obsáhli prakticky všechno, ale nyní to budeme dělat celé znovu a jiným způsobem. Proč? Jeden z důvodů je ten, že předtím jsme předpokládali, že indexy lomu jsou reálné (žádná absorpce v látkách). Ale další důvod je ten, že bychom se mohli naučit zacházet s vlnami na površích z hlediska Maxwellových rovnic. Dostaneme tytéž výsledky jako předtím, ale nyní přímo řešením vlnového problému, a ne nějakými šikovnými spekulacemi.

Chtěli bychom zdůraznit, že amplituda vlny při odrazu není *vlastností* materiálu, jako je to při indexu lomu. Je to povrchová vlastnost, která závisí na tom, jak je povrch opracován. Tenká vrstva vnější nečistoty na rozhraní dvou materiálů s indexy lomu n_1 a n_2 obvykle odraz změní. (Jsou tu různé možnosti interference jako při zbarvení tenké vrstvy oleje. Při vhodné tloušťce lze pro určitou frekvenci dokonce amplitudu zredukovat na nulu. Tak se vyrábějí čočky s antireflexní vrstvou.) Vzorce, které odvodíme, platí jen při náhlých změnách indexu lomu – na vzdálenostech, které jsou srovnatelné s vlnovou délkou. Světlo má vlnovou délku přibližně 500 nm, proto hladkým povrchem rozumíme takový povrch, při němž se podmínky mění při přechodu na vzdálenost několika atomů (nebo desetin nm). Naše rovnice pro světlo budou tedy platit jen pro vysoce leštěné povrchy. Obecně, mění-li se povrch postupně, v průběhu vzdálenosti několika vlnových délek, nedochází k téměř žádnému odrazu.

33.2 VLNY V OPTICKY HUSTÝCH LÁTKÁCH

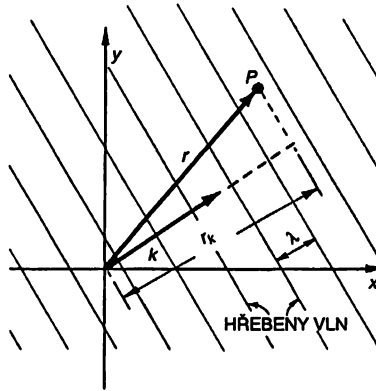
Nejdříve si připomeňme, jak lze vhodným způsobem popsat rovinnou vlnu (viz 36. kapitola 1. dílu). Libovolná složka pole ve vlně (jako příklad vezměme E) může být zapsána ve tvaru

$$E = E_0 e^{i(\omega t - k \cdot r)} \quad (33.6)$$

kde E představuje amplitudu v bodě r (vzhledem k počátku) a v čase t . Vektor k má směr postupující vlny a jeho velikost $|k| = k = 2\pi/\lambda$ je vlnové číslo. Fázová rychlost vlny je $v_f = \omega/k$. Pro světelnou vlnu v látce s indexem lomu n platí $v_f = c/n$, a tedy

$$k = \frac{\omega n}{c}. \quad (33.7)$$

Předpokládejme, že k má směr osy z . Potom $k \cdot r$ je právě kz , jak jsme často používali. Pro k v jiném libovolném směru bychom měli místo z psát r_k , což je průmět polohového vektoru do směru k , tj. kz bychom měli nahradit kr_k , což je právě $k \cdot r$ (obr. 33.2). Rovnice (33.6) je tak vhodným vyjádřením pro vlnu libovolného směru.



Obr. 33.2 Vlna pohybující se ve směru k má v libovolném bodě P fázi $(\omega t - k \cdot r)$

Samozřejmě si musíme pamatovat, že

$$k \cdot r = k_x x + k_y y + k_z z,$$

kde k_x, k_y, k_z jsou průměty vektoru k do jednotlivých os. Jak jsme už jednou zdůrazňovali, (ω, k_x, k_y, k_z) ve skutečnosti tvoří čtyřvektor a jeho skalární součin s (t, x, y, z) je invariant. Proto fáze je invariantem a rovnici (33.6) můžeme psát jako

$$E = E_0 e^{ik_r \cdot r}.$$

Ale zrovna teď takovou eleganci nepotřebujeme.

Pro sinusoidální E v rovnici (33.6) je $\partial E / \partial t$ totéž jako $i\omega E$ a $\partial E / \partial x$ je $-ik_x E$ a podobně pro další složky. Sami vidíte, proč je velmi výhodné používat vyjádření (33.6), když pracujeme s diferenciálními rovnicemi – derivování lze nahradit násobením. A další důležitý bod: operace $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ je nahrazena třemi násobeními $(-ik_x, -ik_y, -ik_z)$. Jenže tyto tři faktory se transformují jako složky vektoru k , proto lze působení operátoru ∇ nahradit násobením vektorem $-ik$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega$$

$$\nabla \rightarrow -ik. \quad (33.8)$$

To platí pro libovolnou operaci ∇ , ať už je to gradient, divergence, nebo rotace. Například z-ová složka $\nabla \times \mathbf{E}$ je

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}.$$

Mění-li se E_y i E_x jako $e^{-ik \cdot r}$, dostaneme

$$-ik_x E_y + ik_y E_x,$$

což je, jak vidíte, složka z vektoru $-i\mathbf{k} \times \mathbf{E}$.

Získali jsme tak velmi užitečný obecný poznatek, že vždy, když máme vypočítat gradient vektoru, který se mění jako vlna v trojrozměrném prostoru (ty ve fyzice hrají důležitou úlohu), můžeme najít derivace rychle a téměř bez rozmyšlení, zapamatujeme-li si, že operace ∇ je ekvivalentní násobením vektorem $-i\mathbf{k}$.

Například Faradayova rovnice

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

získá pro vlnu tvar

$$-i\mathbf{k} \times \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{B}.$$

To nám říká, že

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}{\omega}, \quad (33.9)$$

což odpovídá výsledku, který jsme našli dříve pro vlny ve vakuu, tj. že vektor \mathbf{B} ve vlně je kolmý na \mathbf{E} a na směr šíření vlny. (Ve vakuu platí $\omega/k=c$.) Znaménko v rovnici (33.9) si můžete zapamatovat podle toho, že \mathbf{k} má směr Poyintingova vektoru $\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Použijeme-li stejné pravidlo pro ostatní Maxwellovy rovnice, dostaneme opět výsledky předcházející kapitoly, jako například

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = k^2 = \frac{\omega^2 n^2}{c^2}. \quad (33.10)$$

Ale když už to víme, nebudeme to dělat znovu.

Chcete-li se zabavit, pokuste se vyřešit následující problém, který byl postrachem na závěrečných zkouškách pro studenty v roce 1890: Řešte Maxwellovy rovnice pro rovinné vlny v *anizotropním* krystalu, tj. když polarizace \mathbf{P} závisí na elektrickém poli \mathbf{E} prostřednictvím tenzoru polarizovatelnosti. Měli byste si, samozřejmě, zvolit své osy rovnoběžně s hlavními osami tenzoru tak, aby vztahy byly co nejjednodušší (pak $P_x = \alpha_a E_x$, $P_y = \alpha_b E_y$ a $P_z = \alpha_c E_z$), ale vlny necht' mají libovolný směr a polarizaci. Měli byste umět určit vztahy mezi \mathbf{B} a \mathbf{E} a závislost \mathbf{k} na směru šíření vlny a její polarizaci. Pak budete chápat optiku anizotropního krystalu. Nejlépe je začít s jednodušším případem dvojlomného krystalu, jako je kalcit, v němž jsou dvě z polarizovatelností stejné (řekněme $\alpha_a = \alpha_b$), a zkusit, zda pochopíme, proč vidíme dvojmo, díváme-li se takovým krystalem. Když to uděláte, pokuste se o nejtěžší případ, kdy jsou všechna tři α různá. Pak budete vědět, zda jste na úrovni absolventa vysoké školy z r. 1890. V této kapitole však budeme uvažovat jen izotropní látky.

Ze zkušenosti víme, že dopadne-li rovinná vlna na rozhraní dvou různých látek, řekněme vzduchu a skla nebo vody a oleje, vznikne odražená vlna a lomená vlna. Předpokládejme, že žádné další efekty neuvažujeme a podívejme se, co z toho můžeme získat. Souřadnice si zvolíme tak, aby

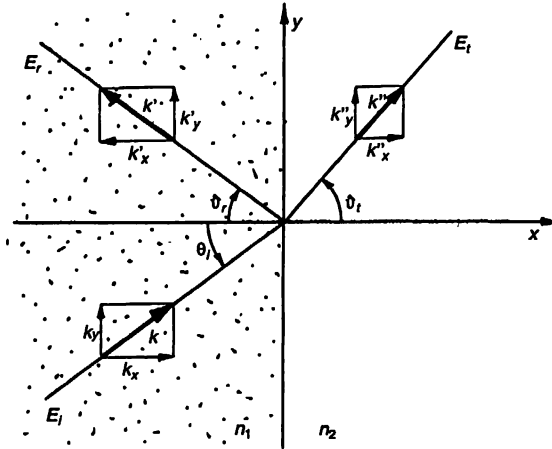
rovina yz splývala s rovinou rozhraní a rovina xy byla kolmá na čelo dopadající vlny, jak je znázorněno na obr. 33.3.

Elektrický vektor dopadající vlny lze psát jako

$$E_i = E_0 e^{i(\omega t - k \cdot r)}. \quad (33.11)$$

Jelikož k je kolmé na osu z , platí

$$k \cdot r = k_x x + k_y y. \quad (33.12)$$



Obr. 33.3 Vektory šíření k , k' a k'' pro dopadající, odraženou a lomenou vlnu

Odraženou vlnu píšeme jako

$$E_r = E'_0 e^{i(\omega' t - k' \cdot r)}, \quad (33.13)$$

tj. její frekvence je ω' , vlnové číslo je k' a její amplituda je E'_0 . (Samozřejmě víme, že frekvence a velikost vektoru k jsou stejné jako u dopadající vlny, ale nyní to nebudeme dokonce ani předpokládat. Necháme to vyjít z matematického postupu.) Nakonec pro lomenou vlnu dostaneme

$$E_t = E''_0 e^{i(\omega'' t - k'' \cdot r)}. \quad (33.14)$$

Víme, že z jedné z Maxwellových rovnic dostáváme rovnici (33.9), proto pro každou z vln máme

$$B_i = \frac{k \times E_i}{\omega}, \quad B_r = \frac{k' \times E_r}{\omega'}, \quad B_t = \frac{k'' \times E_t}{\omega''}. \quad (33.15)$$

Označíme-li indexy jednotlivých prostředí n_1 a n_2 , z rovnice (33.10) dostaneme

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 = \frac{\omega^2 n_1^2}{c^2}. \quad (33.16)$$

Jelikož se odražená vlna nachází v témž prostředí, platí

$$k'^2 = \frac{\omega'^2 n_1^2}{c^2}, \quad (33.17)$$

zatímco pro lomenou vlnu

$$k''^2 = \frac{\omega''^2 n_2^2}{c^2}. \quad (33.18)$$

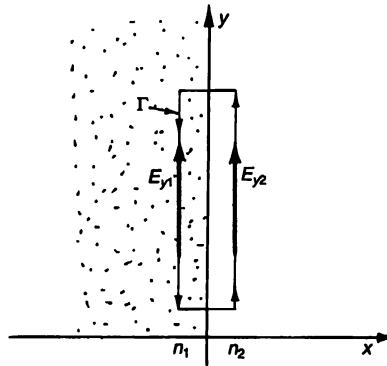
33.3 HRANIČNÍ PODMÍNKY

Vše, co jsme dosud dělali, byl popis tří vln. Nyní máme za úkol určit parametry odražené a lomené vlny pomocí parametrů dopadající vlny. Jak to můžeme udělat? Tři vlny, které jsme popsali, vyhovují Maxwellovým rovnicím v homogenní látce, ale Maxwellovy rovnice musí platit i na rozhraní mezi dvěma různými látkami. Proto se musíme podívat na to, co se stane právě na rozhraní. Zjistíme, že Maxwellovy rovnice požadují, aby se tyto tři vlny určitým způsobem navzájem přizpůsobily.

Jako příklad může posloužit složka y elektrického pole \mathbf{E} , která musí být stejná na obou stranách rozhraní. Vyplývá to z Faradayova zákona

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (33.19)$$

o čemž se můžeme přesvědčit následujícím způsobem. Uvažujme malou obdélníkovou smyčku Γ , která obklopuje rozhraní tak, jak je znázorněno na obr. 33.4.



Obr. 33.4 Hraniční podmínka $E_{y1} = E_{y2}$ získaná ze vztahu $\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$

Rovnice (33.19) říká, že křivkový integrál \mathbf{E} podél Γ je roven změně toku \mathbf{B} smyčkou:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Představme si, že obdélník je velmi úzký, takže smyčka obklopuje nekonečně malou plochu. Zůstává-li \mathbf{B} konečné (a není důvodu, proč by mělo být na hranici nekonečné!), je tok plochou nulový. Proto křivkový integrál \mathbf{E} musí být roven nule. Jsou-li E_{y1} a E_{y2} složky pole na dvou stranách rozhraní a je-li délka obdélníka l , dostaneme

$$E_{y1}l - E_{y2}l = 0$$

neboli

$$E_{y1} = E_{y2} \quad (33.20)$$

jak jsme řekli. Tak dostaneme jeden vztah mezi poli tří vln.

Postup odvozování důsledků Maxwellových rovnic na rozhraní se nazývá určování hraničních podmínek. Obvykle se provádí tak, že pomocí úvah o malých obdélnících, jako je Γ na obr. 33.4, nebo o malých gaussovských ploškách obklopujících rozhraní se najde tolik rovnic typu (33.20) kolik jen lze. Ačkoliv je takový postup naprosto správný, vzbuzuje dojem, že v různých fyzikálních úvahách se problém rozhraní řeší různým způsobem.

Například, jaký je vztah mezi teplotami na obou stranách rozhraní při toku tepla rozhraním? Mohli bychom docela správně tvrdit, že tok tepla k rozhraní z jedné strany má být roven toku *od rozhraní* na druhé straně. Obvykle lze odvodit (obecně je to docela užitečné) hraniční podmínky pomocí takových fyzikálních úvah. Může se však stát, že při řešení nějakého problému máme jen několik málo rovnic a není ihned zřejmé, jaké fyzikální úvahy bychom měli použít. Proto nyní, i přesto, že se zajímáme o elektromagnetické úlohy, v nichž *můžeme* použít fyzikální úvahy, chceme ukázat metodu, kterou lze použít pro libovolný problém. Je to *obecný* způsob, jak zjistit přímo z diferenciálních rovnic, co se děje na rozhraní.

Začneme tím, že napíšeme všechny Maxwellovy rovnice pro dielektrikum – tentokrát budeme velmi detailně a explicitně vypíšeme všechny složky:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= -\frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0} \\ \epsilon_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) &= - \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (33.21)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\partial B_x}{\partial t} \end{aligned} \quad (33.22a)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad (33.22b)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad (33.22c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (33.23)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$c^2 \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial P_x}{\partial t} + \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (33.24a)$$

$$c^2 \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial P_y}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (33.24b)$$

$$c^2 \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial P_z}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (33.24c)$$

Všechny tyto rovnice nyní musí platit v oblasti 1 (nalevo od rozhraní) a v oblasti 2 (napravo od rozhraní). Řešení v oblastech 1 a 2 jsme už napsali. Rovnice musí být splněny i *na* rozhraní, které budeme nazývat oblast 3. Ačkoliv si obvykle představujeme rozhraní jako ostrou nespojitost, ve skutečnosti to tak není. Fyzikální vlastnosti se mění velmi rychle, ale ne nekonečně rychle. V každém případě si můžeme představit, že jde o velmi rychlou, ale spojitou změnu indexu lomu mezi oblastmi 1 a 2 na krátké vzdálenosti nazývané oblast 3. I libovolné jiné veličiny pole jako P_x nebo E_y atd. projdou podobnou změnou v oblasti 3. V této oblasti musí diferenciální rovnice platit stále, a právě zkoumáním diferenciálních rovnic v této oblasti můžeme získat požadované hraniční podmínky.

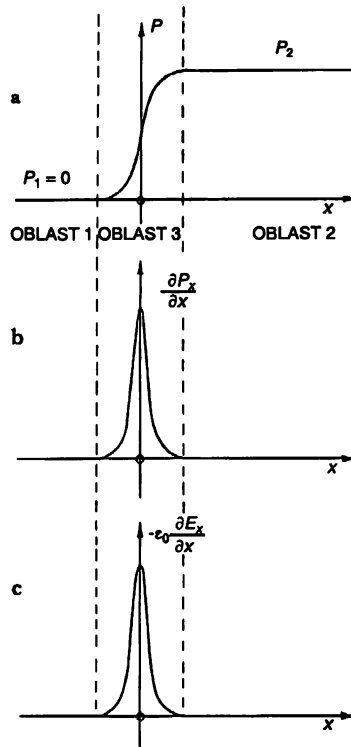
Například předpokládejme, že máme rozhraní mezi vakuem (oblast 1) a sklem (oblast 2). Ve vakuu se nemá co polarizovat, proto $P_1 = 0$. Řekněme, že ve skle je nějaká polarizace P_2 . Mezi vakuem a sklem je hladký, ale rychlý přechod. Zkoumáme-li nějakou složku P , řekněme P_x , může se měnit tak, jak je to nakresleno na *obr. 33.5a*. Předpokládejme, že jsme si vybrali první z našich rovnic – rovnici (33.21). Obsahuje derivace složek P podle x , y , z . Derivace podle y a z nejsou zajímavé, v těch směrech nejde o nic zvláštního. Ale derivace P_x podle x bude nabývat velmi velkých hodnot v oblasti 3 díky obrovskému spádu P_x . Derivace $\partial P_x / \partial x$ bude mít na rozhraní ostrý vrchol, jak je znázorněno na *obr. 33.5b*. Když si představíme, že rozhraní se stlačí na ještě tenčí vrstvu, bude vrchol mnohem větší. Je-li rozhraní skutečně ostré pro vlny, o které se zajímáme, bude velikost $\partial P_x / \partial x$ v oblasti 3 mnohem větší než příspěvek od změny P v oblasti mimo rozhraní, proto zanedbáváme všechny změny s výjimkou těch, které pocházejí z rozhraní.

Jak může být nyní splněna rovnice (33.21), obsahuje-li její pravá strana obrovský vrchol? Jedině tak, že na její druhé straně je stejně velký vrchol.

Na levé straně musí být něco, co je také velké. Jediným kandidátem je $\partial E_x / \partial x$, neboť změny v y a z , to jsou ty malé efekty, o nichž jsme hovořili. Proto musí být $-\epsilon_0 (\partial E_x / \partial x)$ takové, jak je nakresleno na *obr. 33.5c* – právě kopie $\partial P_x / \partial x$. Dostáváme, že

$$\epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x} = - \frac{\partial P_x}{\partial x}.$$

ODRAZ OD POVRCHŮ



Obr. 33.5 Pole v oblasti přechodu (3) mezi dvěma různými materiály v oblastech (1) a (2)

Integrujeme-li tuto rovnici podle x přes oblast 3, dojdeme k závěru, že

$$\epsilon_0 (E_{x2} - E_{x1}) = -(P_{x2} - P_{x1}). \quad (33.25)$$

Jinými slovy, skok v $\epsilon_0 E_x$ při přechodu z oblasti 1 do oblasti 2 musí být roven skoku v $-P_x$.

Rovnici (33.25) můžeme přepsat jako

$$\epsilon_0 E_{x2} + P_{x2} = \epsilon_0 E_{x1} + P_{x1}, \quad (33.26)$$

což znamená, že veličina $(\epsilon_0 E_x + P_x)$ má stejnou hodnotu v oblastech 1 a 2. Říkáme, že veličina $(\epsilon_0 E_x + P_x)$ je *spojitá* na hranici. Tímto způsobem jsme získali jednu z našich hraničních podmínek.

Přesto, že jsme si na ilustraci vybrali případ, v němž bylo P_1 rovno nule, neboť oblast 1 byla vakuum, je zřejmé, že stejné úvahy lze aplikovat na libovolné dvě látky ve dvou oblastech, takže rovnice (33.26) má obecnou platnost.

Nyní přejdeme k dalším Maxwellovým rovnicím a podívejme se, co nám říká každá z nich. Vyberme si jako další rovnici (33.22a). Neobsahuje žádné derivace podle x , proto nám neříká nic. (Pamatujte si, že *samotná* pole nenabývají na hranici zvláště velkých hodnot. Jsou to jen derivace podle x , které se mohou stát natolik obrovskými, že budou v rovnici dominovat.) Dále se podívejme na rovnici (33.22b). V ní se objevuje derivace podle x ! Na levé straně máme $\partial E_z / \partial x$. Předpokládejme, že derivace je obrovská. Ale pozor! Na pravé straně nemáme nic, co by se jí vyrovnalo. Proto E_z *nemůže* mít při přechodu z oblasti 1 do oblasti 2 žádný skok. (Kdyby mělo, na levé straně

rovnice (33.22a) by byl skok a na pravé straně ne, takže rovnice by nebyla správná.) Máme tedy novou podmínku:

$$E_{z2} = E_{z1}. \quad (33.27)$$

Na základě stejných úvah z rovnice (33.22c) dostaneme

$$E_{y2} = E_{y1}. \quad (33.28)$$

Tento poslední výsledek je právě to, co jsme dostali v rovnici (33.20) pomocí úvah s křivkovým integrálem.

Pokračujeme dále k rovnici (33.23). Jedním členem, který by mohl mít vrchol, je $\partial B_x / \partial x$. Ale na pravo není nic, co by se k tomu hodilo, proto usoudíme, že

$$B_{x2} = B_{x1}. \quad (33.29)$$

A přistoupíme k poslední Maxwellově rovnici! Rovnice (33.24a) nedá žádný výsledek, protože tam derivace podle x nejsou. Rovnice (33.23b) má jednu, a to $\epsilon^2 \partial B_z / \partial x$, ale opět nemá nic, co by jí odpovídalo. Dostáváme

$$B_{z2} = B_{z1}. \quad (33.30)$$

Poslední rovnice je podobná a dává

$$B_{y2} = B_{y1}. \quad (33.31)$$

Poslední tři rovnice nám říkají, že $B_2 = B_1$. Chceme však zdůraznit, že tento výsledek dostáváme jen tehdy, když jsou látky na obou stranách rozhraní nemagnetické, nebo přesněji, když můžeme zanedbat všechny magnetické efekty v látkách. To lze obvykle udělat u většiny látek s výjimkou feromagnetik. (Magnetickými vlastnostmi látek se budeme zabývat v některé z dalších kapitol.)

Náš program nás přivedl k šesti vztahům mezi poli v oblastech 1 a 2. Shrnuli jsme je v tab. 33.1. Nyní je můžeme použít na propojení vln ve dvou oblastech. Chceme však zdůraznit, že myšlenka, kterou jsme právě využívali, bude použitelná v libovolné fyzikální situaci, kdy máme diferenciální rovnice a hledáme řešení, které popisuje přechod přes ostrou hranici oddělující dvě oblasti s různými vlastnostmi. Pro náš nynější účel bychom mohli tytéž rovnice snadno odvodit pomocí úvah o tocích a rotacích na rozhraní. (Můžete si prověřit, zda takovým způsobem dostanete tentýž výsledek.) Uvedli jsme však metodu, kterou lze použít v případě, že nevíte jak dál, kdy se nenabízí žádná jednoduchá fyzikální úvaha o tom, co se děje na rozhraní – tehdy můžete prostě pracovat s rovnicemi.

Tabulka 33.1 Hraniční podmínky na povrchu dielektrika

$$\begin{aligned} (\epsilon_0 \mathbf{E}_1 + \mathbf{P}_1)_x &= (\epsilon_0 \mathbf{E}_2 + \mathbf{P}_2)_x \\ (E_1)_y &= (E_2)_y \\ (E_1)_z &= (E_2)_z \\ B_1 &= B_2 \end{aligned}$$

(leží v rovině yz)

33.4 ODRAŽENÉ A LOMENÉ VLNY

V této chvíli jsme připraveni aplikovat naše hraniční podmínky na vlny, které jsme vypsalí v článku 33.2, kde jsme měli

$$E_i = E_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)} \quad (33.32)$$

$$E_r = E'_0 e^{i(\omega' t - k'_x x - k'_y y)} \quad (33.33)$$

$$E_t = E''_0 e^{i(\omega'' t - k''_x x - k''_y y)} \quad (33.34)$$

$$B_i = \frac{k \times E_i}{\omega} \quad (33.35)$$

$$B_r = \frac{k' \times E_r}{\omega'} \quad (33.36)$$

$$B_t = \frac{k'' \times E_t}{\omega''}. \quad (33.37)$$

Navíc máme ještě další poznatek: E je pro každou vlnu kolmé na vektor jejího šíření k .

Výsledky budou záviset na směru vektoru E (na polarizaci) dopadající vlny. Analýza je mnohem jednodušší, když se zabýváme odděleně případem dopadající vlny s vektorem *rovnoběžným* s rovinou dopadu (tj. s rovinou xy) a případem, kdy dopadající vlna má vektor E *kolmý* na rovinu dopadu. Každá jiná vlna s libovolnou polarizací je jen lineární kombinací dvou takových vln. Jinými slovy, intenzity odražených a lomených vln jsou různé pro různé polarizace a nejsnadnější je vybrat dva nejjednodušší případy a řešit je odděleně.

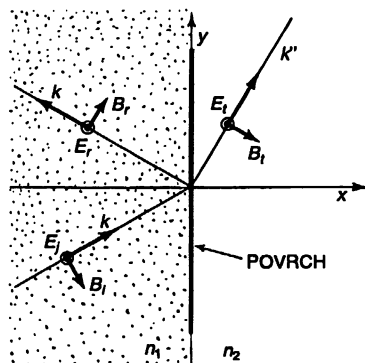
Provedeme podrobnou analýzu případu s dopadající vlnou polarizovanou kolmo na rovinu dopadu a výsledek pro druhý případ pak pouze uvedeme. Tím, že si vybíráme jednodušší případ, tak trochu „švindlujeme“, ale princip je stejný pro oba případy. Předpokládáme, že E_i má jen složku z a protože všechny vektory E mají stejný směr, můžeme vektorové označení vynechat.

Pokud jsou obě látky izotropní, budou mít i indukované oscilace v látce směr osy z , a pole E lomené a odražené vlny budou mít jen složky z . Proto pro všechny vlny jsou E_x , E_y , P_x a P_y rovny nule. Vektory E a B jednotlivých vln jsou znázorněny na obr. 33.6. (Nyní si zvolíme kratší cestu oproti našemu původnímu plánu získat vše z rovnic. Tento výsledek by nám vyšel i z hraničních podmínek, ale pomocí fyzikálních úvah se vyhneme zdlouhavým výpočtům. Máte-li dost času, zjistěte si, zda dostanete stejný výsledek z rovnic. Je zřejmé, že to co jsme řekli, je v souhlasu s rovnicemi. Neukázali jsme však, že nejsou jiné možnosti.)

Naše hraniční podmínky (33.26) až (33.31) určují vztahy mezi složkami E a B v oblastech 1 a 2. V oblasti 2 máme jen lomenou vlnu, ale v oblasti 1 máme dvě vlny. Kterou máme vybrat? Pole v oblasti 1 jsou, samozřejmě, superpozicí polí dopadající a odražené vlny. (Jelikož každá z nich vyhovuje Maxwellovým rovnicím, vyhovuje jim i jejich suma.) Proto když používáme hraniční podmínky, musíme uvažovat

$$E_1 = E_i + E_r, \quad E_2 = E_t$$

a podobně pro vektory B .



Obr. 33.6 Polarizace odražené a lomené vlny v případě, kdy pole E dopadající vlny je kolmé na rovinu dopadu

Pro polarizaci, kterou uvažujeme, nám rovnice (33.26) až (33.28) nedávaj žádnou informaci. Užitečná je jen rovnice (33.27), která říká, že *na rozhraní*, tj. pro $x=0$, platí

$$E_i + E_r = E_t.$$

Máme tedy

$$E_0 e^{i(\omega t - k_y y)} + E'_0 e^{i(\omega' t - k'_y y)} = E''_0 e^{i(\omega'' t - k''_y y)}, \quad (33.38)$$

což musí platit pro *všechna* t a *všechna* y . Nejdříve se podíváme na $y=0$. Máme tedy

$$E_0 e^{i(\omega t)} + E'_0 e^{i(\omega' t)} = E''_0 e^{i(\omega'' t)}.$$

Tato rovnice nám říká, že dva oscilační členy jsou rovny třetí oscilaci. To se může stát jen tehdy, když mají všechny oscilace tutéž frekvenci. (Není možné, aby tři nebo libovolný počet členů s různými frekvencemi spolu dávaly nulu v libovolném čase.) Proto

$$\omega'' = \omega' = \omega. \quad (33.39)$$

Jak je nám už známo, frekvence odražené a lomené vlny jsou tytéž jako frekvence dopadající vlny.

Mohli bychom si ušetřit námahu, kdybychom to zmínili hned na počátku, ale chtěli jsme vám ukázat, že to lze odvodit z rovnic. Ve skutečnosti, když řešíte nějaký problém, je obvykle nejlepší využívat od samého začátku vše, co je nám známo, a ušetříte si mnoho slavností.

Podle definice je *velikost* k určena vztahem $k^2 = n^2 \omega^2 / c^2$, proto máme i

$$\frac{k''^2}{n_2^2} = \frac{k'^2}{n_1^2} = \frac{k^2}{n_1^2}. \quad (33.40)$$

Podíváme se teď na rovnici (33.38) pro $t=0$. Použijeme stejné úvahy jako předtím, jen tentokrát vycházíme z toho, že rovnice musí platit pro všechny hodnoty y . Dostaneme

$$k''_y = k'_y = k_y. \quad (33.41)$$

Z rovnice (33.40) $k'^2 = k^2$, proto

$$k_x'^2 + k_y'^2 = k_x^2 + k_y^2.$$

Zkombinujeme-li to s rovnicí (33.41), dostaneme

$$k_x'^2 = k_x^2,$$

neboli $k_x' = \pm k_x$. Kladné znaménko nemá smysl, nedalo by nám *odraženou* vlnu, ale další dopadající vlnu, a my jsme na začátku řekli, že řešíme problém jen jedné dopadající vlny. Máme tedy

$$k_x' = -k_x. \quad (33.42)$$

Dvě rovnice (33.41) a (33.42) nám říkají, že úhel odrazu je roven úhlu dopadu tak, jak jsme čekali (viz (33.3)). Odražená vlna je

$$E_r = E_0' e^{i(\omega t - k_x x + k_y y)}. \quad (33.43)$$

Pro lomenou vlnu už máme rovnice

$$k_y'' = k_y$$

a

$$\frac{k_x''^2}{n_2^2} = \frac{k_x^2}{n_1^2}. \quad (33.44)$$

Můžeme je vyřešit a najít k_x'' . Dostaneme

$$k_x''^2 = k_x'^2 - k_y'^2 = \frac{n_2^2}{n_1^2} k_x^2 - k_y^2. \quad (33.45)$$

Na chvíli předpokládejme, že n_1 a n_2 jsou reálná čísla (že imaginární části indexů lomu jsou velmi malé). Pak jsou všechna k také reálná čísla a z *obr. 33.3* zjistíme, že

$$\frac{k_y}{k} = \sin \vartheta_i, \quad \frac{k_y''}{k''} = \sin \vartheta_t. \quad (33.46)$$

Z rovnice (33.44) dostaneme

$$n_2 \sin \vartheta_t = n_1 \sin \vartheta_i, \quad (33.47)$$

což je Snellův zákon lomu – opět něco, co už jsme znali. Nejsou-li indexy lomu reálné, vlnová čísla jsou komplexní a musíme použít rovnici (33.45). (Mohli bychom definovat úhly ϑ_i a ϑ_t pomocí rovnice (33.46) a Snellův zákon (33.47) by platil obecně. Pak by však i úhly byly komplexními čísly a ztratily by jako úhly svou jednoduchou geometrickou interpretaci. Nejlepší je proto popisovat chování vln pomocí komplexních hodnot k_x nebo k_x'' .)

Dosud jsme nenašli nic nového. Dopřáli jsme si jen prosté potěšení ze získávání zřejmých odpovědí z komplikovaného matematického aparátu. Nyní jsme připraveni najít amplitudy vln, které jsme dosud neznali. Využijeme-li naše výsledky pro ω a k , můžeme rovnici (33.38) vydělit exponenciálními faktory a dostaneme

$$E_0 + E_0' = E_0''. \quad (33.48)$$

Jelikož E'_0 , E''_0 neznáme, potřebujeme ještě jeden vztah. Musíme použít další hraniční podmínku. Rovnice pro E_x a E_y nám nepomohou, neboť všechna E mají jen složku z . Proto musíme využít podmínky pro B . Zkusme rovnici (33.29):

$$B_{x2} = B_{x1}.$$

Z rovnic (33.35) až (33.37) vyplývá

$$B_{xi} = \frac{k_y E_i}{\omega}, \quad B_{xr} = \frac{k'_y E_r}{\omega'}, \quad B_{xt} = \frac{k''_y E_t}{\omega''}.$$

Připomeňme si, že $\omega'' = \omega' = \omega$ a $k''_y = k'_y = k_y$, a dostaneme

$$E_0 + E'_0 = E''_0.$$

Ale to je opět rovnice (33.48)! Zbytečně jsme ztráceli čas získáváním něčeho, co už víme.

Mohli bychom zkusit rovnici (33.30), $B_{z2} = B_{z1}$, ale my žádné z -ové složky B nemáme! Takže nám zůstává jen jedna rovnice, a to (33.31), $B_{y2} = B_{y1}$. Pro tři vlny platí

$$B_{yi} = -\frac{k_x E_i}{\omega}, \quad B_{yr} = -\frac{k'_x E_r}{\omega'}, \quad B_{yt} = -\frac{k''_x E_t}{\omega''}.$$

Dosadíme-li za E_p , E_r a E_t vlnové vyjádření pro $x=0$ (jsme na rozhraní), bude hraniční podmínka

$$\frac{k_x}{\omega} E_0 e^{i(\omega t - k_y y)} + \frac{k'_x}{\omega'} E'_0 e^{i(\omega' t - k'_y y)} = \frac{k''_x}{\omega''} E''_0 e^{i(\omega'' t - k''_y y)}.$$

Opět jsou všechna ω a k_y stejná, proto se rovnice redukuje na

$$k_x E_0 + k'_x E'_0 = k''_x E''_0. \quad (33.50)$$

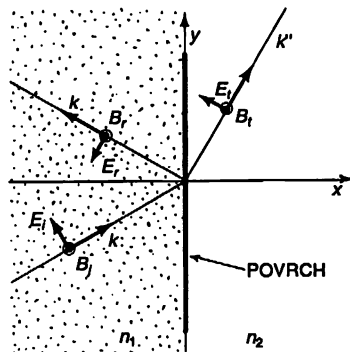
To nám dává rovnici pro amplitudu E , která je různá od rovnice (33.48). Máme-li dvě rovnice, můžeme je řešit vzhledem k E'_0 a E''_0 . Vzpomeňme si, že $k'_x = -k_x$, a dostaneme

$$E'_0 = \frac{k_x - k''_x}{k_x + k''_x} E_0 \quad (33.51)$$

$$E''_0 = \frac{2k_x}{k_x + k''_x} E_0. \quad (33.52)$$

Tyto rovnice nám spolu s (33.45) nebo (33.46) dávají to, co jsme chtěli vědět. O důsledcích tohoto výsledku budeme hovořit v následující části.

Začneme-li s vlnou, která je polarizována tak, že vektor E je rovnoběžný s rovinou dopadu, bude mít E složku x i y , jak je ukázáno na obr. 33.7.



Obr. 33.7 Polarizace vln v případě, kdy pole E dopadající vlny je rovnoběžné s rovinou dopadu

Algebra je jasná, ale komplikovanější. (Výpočty lze částečně zredukovat, vyjádříme-li vše pomocí *magnetických* polí, která mají všechny směr osy z .) Zjistíme, že

$$|E'_0| = \frac{n_2^2 k_x - n_1^2 k''_x}{n_2^2 k_x + n_1^2 k''_x} |E_0| \quad (33.53)$$

$$|E''_0| = \frac{2 n_1 n_2 k_x}{n_2^2 k_x + n_1^2 k''_x} |E_0|. \quad (33.54)$$

Podívejme se, zda naše výsledky souhlasí s těmi, které jsme dostali dříve. Rovnice (33.3) je výsledek, který jsme odvodili v 33. kapitole 1. dílu pro poměr intenzit odražené a dopadající vlny. Tehdy jsme však uvažovali jen *reálné* indexy. Pro reálné indexy (a vektory k) můžeme psát

$$k_x = k \cos \vartheta_i = \frac{\omega n_1}{c} \cos \vartheta_i,$$

$$k''_x = k'' \cos \vartheta_t = \frac{\omega n_2}{c} \cos \vartheta_t.$$

Dosadíme-li do rovnice (33.51), dostaneme

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{n_1 \cos \vartheta_i - n_2 \cos \vartheta_t}{n_1 \cos \vartheta_i + n_2 \cos \vartheta_t}, \quad (33.55)$$

což nevypadá stejně jako rovnice (33.3). Bude však tak vypadat, použijeme-li Snellův zákon a zbavíme se indexů lomu n . Položíme-li $n_2 = n_1 \sin \vartheta_i / \sin \vartheta_t$ a násobíme čitatele i jmenovatele výrazem $\sin \vartheta_t$, dostaneme

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{\cos \vartheta_i \sin \vartheta_t - \sin \vartheta_i \cos \vartheta_t}{\cos \vartheta_i \sin \vartheta_t + \sin \vartheta_i \cos \vartheta_t}.$$

Čitatel i jmenovatel jsou vlastně siny úhlů $(\vartheta_i - \vartheta_r)$ a $(\vartheta_i + \vartheta_r)$. Dostáváme

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{\sin(\vartheta_i - \vartheta_r)}{\sin(\vartheta_i + \vartheta_r)}. \quad (33.56)$$

Jelikož amplitudy E'_0 a E_0 se vztahují k téže látce a intenzity jsou úměrné druhé mocnině elektrického pole, dostáváme tentýž výsledek jako předtím, Podobně rovnice (33.56) je tatáž jako rovnice (33.4).

Pro vlny, které dopadají kolmo, platí $\vartheta_i = 0$ a $\vartheta_r = 0$. Rovnice (33.56) nám dává $0/0$, což není velmi užitečné. Můžeme se však vrátit k rovnici (33.55), která nám dá

$$\frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{E'_0}{E_0} \right)^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2. \quad (33.57)$$

Tento výsledek, samozřejmě, platí pro obě polarizace, protože při kolmém dopadu neexistuje speciální rovina dopadu.

33.5 ODRAZ OD KOVU

Naše výsledky můžeme nyní využít k pochopení zajímavého jevu – odrazu od kovu. Co je příčinou toho, že jsou kovy lesklé? V předcházející kapitole jsme viděli, že index lomu kovů má při určitých frekvencích velkou imaginární část. Podívejme se, co bychom dostali pro intenzitu odražené vlny, kdyby světlo dopadalo za vzduchu ($n = 1$) na látku s $n = -i n_1$. Pak rovnice (33.55) dává (pro kolmý dopad)

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{1 + i n_1}{1 - i n_1}.$$

Pro *intenzitu* odražené vlny potřebujeme druhou mocninu absolutních hodnot

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{|E'_0|^2}{|E_0|^2} = \frac{|1 + i n_1|^2}{|-i n_1|^2}$$

neboli

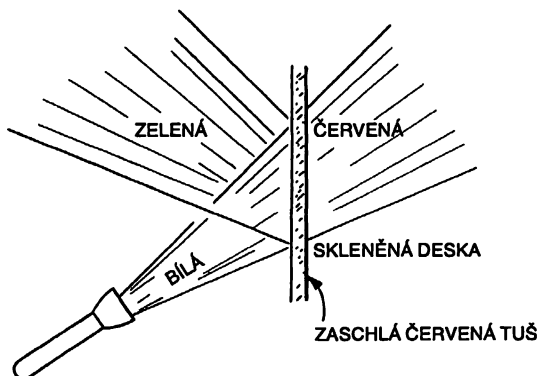
$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{1 + n_1^2}{1 + n_1^2} = 1. \quad (33.58)$$

Pro látku s čistě imaginárním indexem lomu nastává stoprocentní odraz.

Kovy neodrážejí 100 procent, ale mnohé z nich odrážejí viditelné světlo velmi dobře. Jinými slovy, imaginární část jejich indexu lomu je velmi velká. Viděli jste však, že velká imaginární část indexu lomu znamená silnou absorpci. Platí tedy obecné pravidlo, že pohlcuje-li *libovolný* materiál *velmi* dobře při určité frekvenci, vlny se silně odrážejí od povrchu a jen malá část je absorbována. Tento efekt můžete pozorovat u silných barviv. Čisté krystalky nejsilnějších barviv mají kovový lesk. Možná, že jste si všimli, že na okraji lahvičky s purpurovou tuší má zaslhlé barvivo kovový lesk,

nebo že zaschlá červená tuš má někdy nazelenalý kovový lesk. Červená tuš pohlcuje z lomeného světla zelenou barvu, takže je-li tuš silně koncentrovaná, nastává silný povrchový odraz pro frekvenci zeleného světla.

Tento jev můžeme demonstrovat tak, že natřete skleněnou desku červenou tuší a necháte ji zaschnout. Osvítíte-li opačnou stranu bílým světlem tak, jak je to na obr. 33.8, dostanete lomený paprsek červeného světla a odražený paprsek zeleného světla.



Obr. 33.8. Látka, která silně absorbuje světlo při frekvenci ω , zároveň světlo této frekvence odráží

33.6. ÚPLNÝ VNITŘNÍ ODRAZ

Prochází-li světlo z látky typu sklo s indexem lomu reálným a větším než 1 do vzduchu, pro nějž je index lomu roven 1, Snellův zákon říká, že

$$\sin \vartheta_t = n \sin \vartheta_i.$$

Úhel ϑ_t lomené vlny získá hodnotu 90° tehdy, když úhel dopadu ϑ_i je roven kritickému úhlu ϑ_c určenému vztahem

$$n \sin \vartheta_c = 1. \quad (33.59)$$

Co se stane při ϑ_i větším než je kritický úhel? Víte, že nastává úplný vnitřní odraz. Ale jak vzniká? Vraťme se k rovnici (33.45), která nám dává vlnové číslo k''_x pro lomenou vlnu. Z ní máme

$$k''_x{}^2 = \frac{k^2}{n^2} - k_y^2.$$

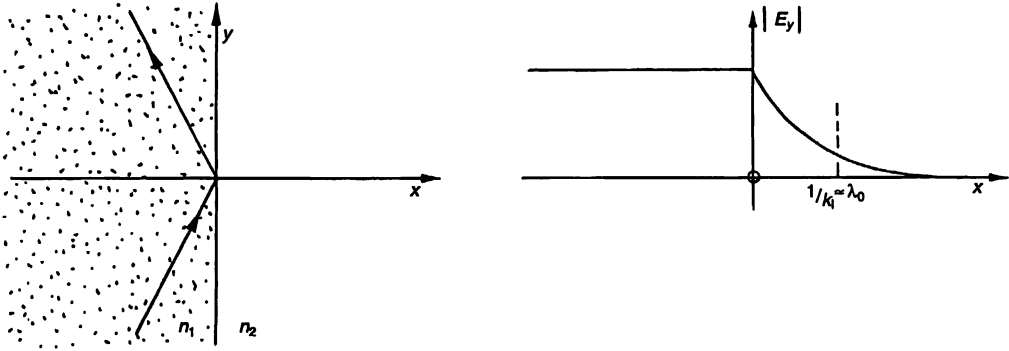
Zároveň $k_y = k \sin \vartheta_i$ a $k = \omega n / c$, takže

$$k''_x{}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (1 - n^2 \sin^2 \vartheta_i).$$

Je-li ϑ_i větší než jedna, je $k''_x{}^2$ záporné a k''_x je imaginární číslo, řekněme $\pm i k_1$. Nyní už víte, co to znamená! Lomená vlna (33.34) bude mít tvar

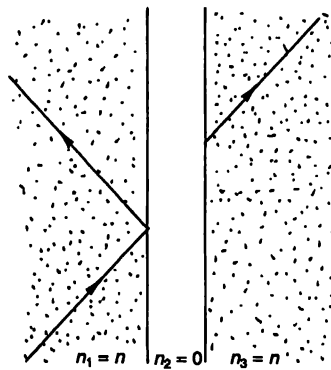
$$E_t = E''_0 e^{\pm k_1 x} e^{i(\omega t - k_y y)}.$$

Amplituda vlny amplituda s rostoucím x buď exponenciálně roste, nebo klesá. Je zřejmé, že chceme záporné znaménko. Pak bude mít *amplituda* vlny napravo od rozhraní průběh znázorněný na obr. 33.9. Všimněte si, že k_1 je řádově ω/c , tj. λ_0 je rovno vlnové délce světla ve vakuu. Když se světlo totálně odráží zevnitř od povrchu sklo – vzduch, pole se ve vzduchu objeví, ale nešíří se od povrchu dále než na vzdálenost řádově rovnou světelné vlnové délce.



Obr. 33.9 Úplný vnitřní odraz

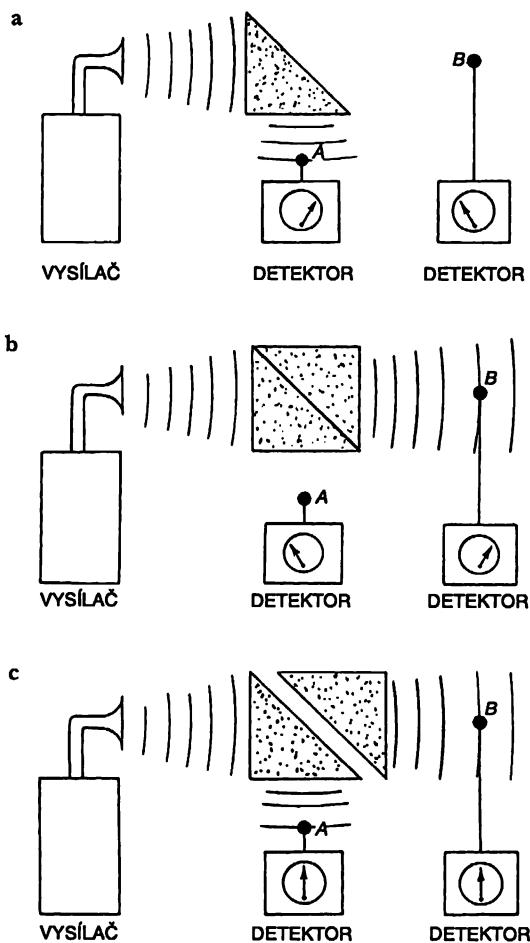
Nyní víme, jak odpovědět na následující otázku: Dopadne-li světelná vlna ve skle na povrch pod dostatečně velkým úhlem, bude odrazena. Přiložíme-li k povrchu jiný kousek skla (takže povrch efektivně zmizí), bude se světlo lámat. Kdy přesně k tomu dojde? Přejít od úplného k žádnému odrazu musí být, samozřejmě, spojitý. Odpověď je následující: Je-li vzduchová mezera tak malá, že exponenciální „chvost“ vlny ve vzduchu je ještě dostatečně velký v druhém kusu skla, rozkmitá se v něm elektrony a generuje novou vlnu tak, jak je znázorněno na obr. 33.10. Část světla bude sklem procházet. (Samozřejmě, naše řešení je neúplné. Měli bychom opět řešit všechny rovnice pro tenkou vrstvu vzduchu mezi dvěma oblastmi skla.)



Obr. 33.10 Při malé mezeře není vnitřní odraz „úplný“ – lomená vlna se objevuje za mezerou

Pro obyčejné světlo lze tento jev přechodu pozorovat jen tehdy, když je vzduchová mezera velmi malá (je-li řádově rovna vlnové délce světla, tj. 10^{-5} cm), ale lze jej snadno demonstrovat na třicentimetrových vlnách. Mikrovlnná aparatura, pomocí níž lze tento jev demonstrovat, je

nakreslena na *obr. 33.11*. Třicentimetrové vlny z malého vysílače jsou nasměrovány na hranol parafínu, který má úhel sklonu 45° . Index lomu parafínu je při těchto frekvencích 1,50 a kritický úhel je $41,5^\circ$. Proto se vlna úplně odrazí od 45-stupňové stěny a je registrována detektorem *A* tak, jak vidíme na *obr. 33.11a*. Je-li další parafínový hranol umístěn tak, aby se dotýkal prvního (viz obrázek část *b*), vlna prochází přímo hranoly a je registrována detektorem *B*. Je-li mezi hranoly několikacentimetrová mezera, jako je to v části *c* obrázku, budou existovat odražené i prošlé vlny. Elektrické pole může být detekováno i v blízkosti 45-stupňové stěny hranolu na *obr. 33.11a*, přisuneme-li detektor *B* na vzdálenost několika centimetrů k povrchu.



Obr. 33.11 Demontrace průniku vnitřně odražených vln

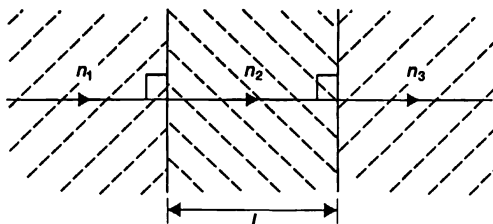
PŘÍKLADY A CVIČENÍ

33.1 ■ a) Určete koeficient propustnosti rovinné elektromagnetické vlny procházející trojvrstvým dielektrikem ukázaným na obrázku.

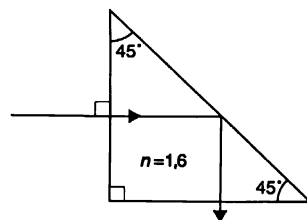
b) Ukažte, že pro $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$ a $l = \lambda_2/4$ je koeficient propustnosti roven jedné. (Takové vrstvy se používají k prosvětlení optiky brýlí a kvalitních fotoaparátů.)

c) Jaká je tloušťka l u obyčejného binoklu, tj. pro světelné vlny?

d) Je možno prosvětlovat jen jednu plochu čočky? Záleží na tom, která strana čočky je prosvětlena? Proč?



33.2 ■ Světelný paprsek o vlnové délce 450 nm (ve vakuu) dopadá na hranol a úplně se odráží pod úhlem 90° k původnímu směru (viz obrázek). Index lomu hranolu je 1,6. Vypočítejte vzdálenost od delší strany hranolu na níž intenzita elektrického pole vlny klesá e -krát ve srovnání s její hodnotou na povrchu. Předpokládá se, že světlo je polarizováno tak, že vektor E je kolmý k rovině dopadu. Změní se vaše odpověď bude-li E ležet v rovině dopadu?



Magnetismus látek

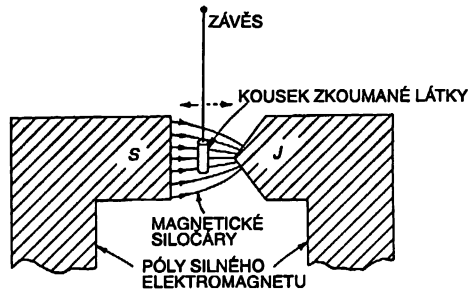
- 34.1 DIAMAGNETIZMUS A PARAMAGNETIZMUS
- 34.2 MAGNETICKÉ MOMENTY A MOMENT HYBNOSTI
- 34.3 PRECESE ATOMOVÝCH MAGNETŮ
- 34.4 DIAMAGNETIZMUS
- 34.5 LARMOROVA VĚTA
- 34.6 KLASICKÁ FYZIKA NEVYSVĚTLUJE ANI
DIAMAGNETIZMUS ANI PARAMAGNETIZMUS
- 34.7 MOMENT HYBNOSTI V KVANTOVÉ MECHANICE
- 34.8 MAGNETICKÁ ENERGIE ATOMŮ

Přečtěte si znovu: článek 15.1, Síly, které působí na proudovou smyčku. Energie dipólu

34.1 DIAMAGNETIZMUS A PARAMAGNETIZMUS

V této kapitole budeme hovořit o magnetických vlastnostech látek. Látkou s nejpozoruhodnějšími magnetickými vlastnostmi je, samozřejmě, železo. Podobné magnetické vlastnosti však mají i další prvky: nikl, kobalt a při nízkých teplotách (pod $16\text{ }^{\circ}\text{C}$), i gadolinium, jakož i celá řada speciálních slitin. Tento druh magnetizmu, který nazýváme *feromagnetizmus*, je natolik složitý a zajímavý jev, že mu věnujeme zvláštní kapitolu. I všechny obyčejné látky však ukazují určité, i když slabé, magnetické projevy, tisíc- až milionkrát slabší než ve feromagnetických látkách. V této kapitole si všimneme obyčejného magnetizmu, tj. magnetizmu neferomagnetických látek.

Tento slabý magnetizmus je dvou druhů. Některé látky jsou magnetickými poli *přitahovány*, jiné zase *odpuzovány*. Narozdíl od elektrických jevů v látkách, díky nimž jsou dielektrika vždy přitahována, mají magnetické jevy dvě znaménka. Tato dvě znaménka lze snadno demonstrovat pomocí silného elektromagnetu, jehož jeden pól je zaostřen a druhý je plochý (*obr. 34.1*). Magnetické pole je mnohem silnější u zaostřeného pólu než u plochého pólu.



Obr. 34.1 Bismutový váleček je slabě odpuzován od zaostřeného pólu, kousek hliníku je k němu přitahován

Připevníme-li malý kousek látky na dlouhý závěs a spustíme ho mezi póly magnetu, bude na něj obecně působit malá síla. Tato malá síla se po zapnutí magnetu projeví jako malý posun zavěšené látky. Některé látky, které jsou feromagnetické, silně přitahuje zaostřený pól; na všechny ostatní působí jen malá síla. Některé jsou k pólu slabě přitahovány, jiné zase slabě odpuzovány.

Tento jev lze nejlépe pozorovat na bismutovém válečku, který je *odpuzován* z oblasti silného magnetického pole. Takto odpuzované látky se nazývají *diamagnetické*. Bismut je jedním z nejsilnějších *diamagnetik*; i tak je však pozorovaný jev dost slabý. Diamagnetizmus je vždy velmi slabý. Zavěsíme-li mezi póly magnetu kus hliníku, také na něj bude působit malá síla, ale směrem k zaostřenému pólu. Látky podobné hliníku se nazývají *paramagnetické*. (Při zapínání a vypínání magnetu vznikají síly, způsobené vířivými proudy, které mohou vyvolat silné impulzy. V pokusu tohoto typu je potřeba jisté opatrnosti: všimněte si jen výsledného posunu po ustálení pohybu zavěšeného tělesa.)

Nyní stručně popíšeme podstatu těchto dvou jevů. Atomy v mnoha látkách nemají permanentní magnetické momenty, nebo – přesněji – všechny magnetické momenty se v každém atomu ruší, takže *celkový* magnetický moment atomu je nulový. Spiny elektronů a jejich orbitální pohyby jsou přesně v rovnováze, takže každý atom má střední magnetický moment nulový. Zapneme-li za těchto podmínek magnetické pole, indukují se v atomu dodatkové proudy. Podle Lenzova zákona mají tyto proudy takový směr, že vznikající magnetické pole brání růstu vnějšího pole. Indukované magnetické momenty jsou tedy orientovány *proti směru* magnetického pole. To je podstata diamagnetizmu.

Dále existují látky, jejichž atomy *mají* permanentní magnetické momenty – v nich se spiny elektronů a orbitální pohyby skládají na nenulový výsledný smyčkový proud. Kromě diamagnetického jevu (který nikdy nechybí) existuje také možnost pootočení jednotlivých atomových magnetických momentů. V takovém případě se magnetické momenty snaží orientovat *do směru* magnetického pole (podobně jako se permanentní dipóly v dielektriku natáčejí do směru pole) a indukovaný magnetizmus magnetické pole zesiluje. Taková je situace v paramagnetických látkách. Obecně je paramagnetizmus dost slabý, neboť síly, které se snaží vyrovnat magnetické momenty do směru pole, jsou poměrně malé ve srovnání se silami, které jsou způsobeny tepelným pohybem a které se snaží porušit pravidelné uspořádání. Paramagnetizmus je proto obvykle citlivý na teplotu. (Výjimkou je paramagnetizmus, který způsobují spiny vodivostních elektronů v kovech. Tímto jevem se tu zabývat nebudeme.) Obvykle čím je nižší teplota, tím je paramagnetizmus silnější. Tendence k orientaci do směru pole je silnější při nízkých teplotách, kdy je porušování pořádku v důsledku srážek malé. Naopak, diamagnetizmus na teplotě více méně nezávisí. V každé látce s permanentními magnetickými momenty existuje jak jev diamagnetizmu, tak i jev paramagnetizmu a paramagnetizmus obvykle převládá.

V 11. kapitole jsme popsali *feroelektrickou* látku, v níž se všechny elektrické dipóly uspořádají do jediného směru v důsledku působení jejich vlastních vzájemných elektrických polí. Lze si představit i magnetický analog feroelektrické látky, v níž se všechny atomové magnetické momenty uspořádají a udrží pohromadě. Kdybyste spočítali, za jakých podmínek se něco podobného stane, zjistili byste, že tepelný pohyb rozruší každé pravidelné uspořádání momentů i při tak nízkých teplotách jako je několik desítek kelvinů. Magnetické síly jsou totiž mnohem slabší než elektrické. Trvalé pravidelné uspořádání magnetů je tedy při pokojových teplotách nemožné.

A přesto, právě to se děje v železe – atomové magnety *mají* pravidelné uspořádání. Mezi magnetickými momenty různých atomů železa totiž existuje efektivní síla, která je mnohem větší než *přímá magnetická* interakce. Je to jev nepřímý, který lze vysvětlit jen v rámci kvantové mechaniky. Síla, která uspořádává magnetické momenty ve feromagnetických látkách, je asi desíttisíckrát silnější než *přímá magnetická* interakce. Tohoto zvláštního vzájemného působení si všimneme v jedné z následujících kapitol.

Po tom, co jsme se pokusili o kvalitativní vysvětlení diamagnetizmu a paramagnetizmu, musíme přiznat, že vycházíme-li z klasické fyziky *není možné* magnetické vlastnosti látek poctivě vysvětlit. Magnetické jevy mají *vylučně kvantově mechanickou povahu*. Abychom však získali představu o tom, co se děje, můžeme se pokusit o jisté klamavé klasické argumenty. Lze to říci takto: Můžete si vymyslet klasické argumenty a získat tak odhad chování některých látek, ale tyto argumenty nejsou v žádném smyslu „legální“, neboť je absolutně nevyhnutelné, aby se při vysvětlení magnetických jevů uplatnila kvantová mechanika. Existují však situace (např. v plazmatu nebo v oblasti prostoru s větším počtem volných elektronů), v nichž se elektrony řídí zákony klasické mechaniky. Tehdy mají některá tvrzení z klasické mechaniky jistou cenu. Klasické argumenty jsou také užitečné z „historických důvodů“. Když lidé poprvé dokázali uhodnout význam a chování magnetických látek, používali klasické argumenty. Konečně, jak už jsme objasnili, klasická mechanika nám poskytuje užitečné představy o tom, co se může stát – ačkoliv nejpoctivějším přístupem k magnetizmu by bylo nejdříve se naučit kvantovou mechaniku a až potom – v jejím jazyce – pochopit magnetické jevy.

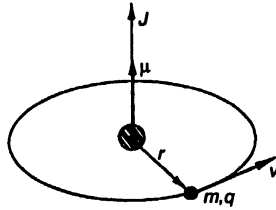
Nechce se nám však čekat, než se dostaneme „pod kůži“ kvantové mechaniky, na to, abychom pochopili takovou jednoduchou věc jako diamagnetismus. Budeme se muset opírat o klasickou mechaniku jako prostředek polopravdivého vysvětlení jevů, budeme si však ustavičně připomínat, že naše argumenty ve skutečnosti nejsou přesné. Vyslovíme proto řadu tvrzení o klasickém magnetizmu, které vás možná zmatou, nebo budou dokazovat odlišné věci. Kromě posledního tvrzení však budou všechna chybná. Navíc se žádné nehodí k popisu fyzikálního světa, neboť bychom ze hry vypustili kvantovou mechaniku.

34.2 MAGNETICKÉ MOMENTY A MOMENT HYBNOSTI

První tvrzení klasické mechaniky, které chceme dokázat, je následující: Pohybuje-li se elektron po kružnici (např. obíhá-li kolem jádra pod vlivem dostředivé síly), jsou si jeho magnetický moment a moment hybnosti úměrné. Moment hybnosti označme J a magnetický moment elektronu na kruhové dráze μ . Velikost momentu hybnosti je rovna hmotnosti elektronu vynásobené jeho rychlostí a poloměrem dráhy (*obr. 34.2*). Jeho směr je kolmý na rovinu dráhy.

$$J = mvr. \quad (34.1)$$

(Je to ovšem nerelativistický vztah. Pro atomy je však dobrým přiblížením, neboť jejich elektrony mají v/c obecně řádu $e^2/\hbar c = 1/137$, tj. přibližně 1%.)



Obr. 34.2 Na kruhové dráze je magnetický moment μ ($q/2m$)-násobkem momentu hybnosti J

Magnetický moment tohoto pohybu určíme jako proud krát obsah plochy kruhu (článek 14.5). Proud se vypočítá jako náboj, který za jednotku času projde libovolným bodem dráhy, tj. náboj q krát frekvence kruhového pohybu. Frekvence je zase rychlost dělená délkou dráhy, takže

$$I = \frac{qv}{2\pi r}.$$

Plocha má obsah πr^2 , a magnetický moment je tedy

$$\mu = \frac{qv r}{2}. \quad (34.2)$$

Směřuje také kolmo na rovinu dráhy. J a μ tedy mají stejný směr a platí

$$\mu = \frac{q}{2m} J \quad (\text{orbitální pohyb}). \quad (34.3)$$

Jejich poměr nezávisí na rychlosti ani na poloměru dráhy. Magnetický moment každé částice na kruhové dráze je ($q/2m$)-násobkem momentu hybnosti. Náboj elektronu je záporný (nazveme jej $-q_e$), proto pro elektron platí

$$\mu = -\frac{q_e}{2m} J \quad (\text{orbitální pohyb elektronu}). \quad (34.4)$$

To nám dává výpočet a stejný vztah zázrakem platí i v kvantové mechanice. To se stává. Budete-li se však i nadále držet klasické mechaniky najdete místa, v nichž poskytuje chybné odpovědi. Je uměním si zapamatovat, co je správné a co ne. Raději vám proto hned povíme, co *obecně* platí v kvantové mechanice. Zprvu, rovnice (34.4) je správná pro *orbitální pohyb*, ale to není jediný existující druh magnetizmu. Elektron má i spinovou rotaci kolem vlastní osy (něco jako pohyb Země kolem své osy) a jako důsledek i spinový moment hybnosti a magnetický moment. Z výlučně kvantově mechanických důvodů je poměr μ a J dvakrát tak velký jako v případě orbitálního pohybu elektronu:

$$\mu = -\frac{q_e}{m} J \quad (\text{spin elektronu}). \quad (34.5)$$

Tato skutečnost nemá klasické vysvětlení. Obecně existuje v každém atomu několik elektronů a složením jejich spinových a orbitálních momentů vzniká celkový moment hybnosti a celkový magnetický moment. Ačkoliv proto neexistuje klasické vysvětlení, v kvantové mechanice *obecně platí* tvrzení, že směr magnetického momentu izolovaného atomu je přesně opačný než směr momentu hybnosti. Jejich poměr však nemusí být $-q_e/m$ nebo $-q_e/2m$, ale někde mezi těmito hodnotami, neboť magnetický moment je směs orbitálních a spinových příspěvků. Jejich vztah můžeme zapsat jako

$$\boldsymbol{\mu} = -g \left(\frac{q_e}{2m} \right) \mathbf{J}, \quad (34.6)$$

kde g je činitel, který charakterizuje stav atomu. Je roven jedné pro čistě orbitální moment, dvěma pro čistě spinový moment a nějakému jinému číslu mezi jednou a dvěma pro složitou soustavu, jakou je atom. Samozřejmě, tento vztah neobsahuje příliš mnoho. Říká, že magnetický moment je *rovnoběžný* s momentem hybnosti, může však mít libovolnou velikost. Zápis rovnice (34.6) je však výhodný proto, že g , tzv. *Landého faktor*, je bezrozměrná konstanta, jejíž velikost je řádu jedné. Předpovídat hodnotu g pro libovolný stav atomu je jednou z úloh kvantové mechaniky.

Možná že vás bude zajímat, jaká je situace v případě atomových jader. Jádra se skládají z protonů a neutronů, které se pohybují po určitých drahách a mají zároveň, podobně jako elektrony, i vlastní spin. Magnetický moment je opět rovnoběžný s momentem hybnosti. Nyní je však řád jejich poměru takový, jaký bychom očekávali pro *proton*, který se pohybuje po kružnici, tj. podle vztahu (34.3), v němž je m hmotnost *protonu*. Pro jádra proto obvykle píšeme

$$\boldsymbol{\mu} = g \left(\frac{q_e}{2m_p} \right) \mathbf{J}, \quad (34.7)$$

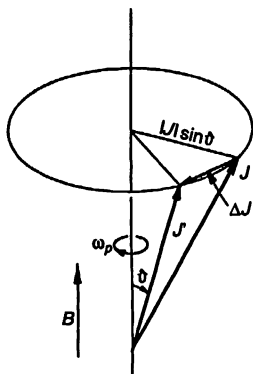
kde m_p označuje hmotnost protonu a g *jaderný faktor* g , je číslo blízke jedné, které je třeba určit pro každé jádro zvlášť.

Další podstatná odlišnost v případě jader spočívá v tom, že *spinový* magnetický moment protonu *nemá* grovné dvěma jako v případě elektronu. Proton má $g = 2 \cdot (2,79)$. Kupodivu i *neutron* má spinový magnetický moment a jeho poměr k momentu hybnosti je $2 \cdot (-1,93)$. Jinými slovy, v magnetickém smyslu není neutron absolutně „neutrální“. Chová se jako malý magnet a jeho magnetický moment je podobný magnetickému momentu rotujícího *záporného* náboje.

34.3 PRECESE ATOMOVÝCH MAGNETŮ

Jedním z důsledků skutečnosti, že magnetický moment atomu je úměrný momentu hybnosti, je *precesní pohyb* atomových magnetů v magnetickém poli. Podívejme se nejdříve na předpověď klasické teorie. Představme si magnetický moment $\boldsymbol{\mu}$, který se volně vznáší v homogenním magnetickém poli. Působí na něj moment síly $\mathbf{N} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$, která se jej snaží pootočit do směru pole. Atomový magnet je však jako setrvačnick – má spinový moment hybnosti \mathbf{J} . Moment síly, způsobený magnetickým polem, proto nedokáže udržet magnet v daném směru. Magnet bude místo toho vykonávat *precesní pohyb*, podobný tomu, s jakým jsme se setkali v případě setrvačnicku v kapitole 20 prvního dílu. Moment hybnosti (a spolu s ním i magnetický moment) precedují kolem osy, která je rovnoběžná se směrem magnetického pole. Rychlost precese najdeme stejným způsobem jako v kapitole 20 prvního dílu.

Nechť se za *krátký čas* Δt změní vektor momentu hybnosti z J na J' (obr. 34.3), přičemž se však nezmění úhel ϑ , který svírá se směrem magnetického pole B .



Obr. 34.3 Těleso s momentem hybnosti J a s ním rovnoběžným magnetickým momentem μ , které je umístěno v poli s magnetickou indukcí B , vykonává precesní pohyb s úhlovou rychlostí ω_p

Jako ω_p označme úhlovou rychlost precese, takže za čas Δt je úhel *precese* $\omega_p \Delta t$. Z geometrie na obrázku je vidět, že změna velikosti momentu hybnosti za čas Δt je

$$\Delta J = (J \sin \vartheta) (\omega_p \Delta t).$$

Rychlost této změny pak je

$$\frac{dJ}{dt} = \omega_p J \sin \vartheta \quad (34.8)$$

a musí být rovna momentu síly:

$$N = \mu B \sin \vartheta. \quad (34.9)$$

Úhlová rychlost precese pak je

$$\omega_p = \frac{\mu}{J} B. \quad (34.10)$$

Dosadíme-li μ/J ze vztahu (34.6), vidíme, že pro atomový systém platí

$$\omega_p = g \frac{q_e B}{2m}, \quad (34.11)$$

tj. úhlová rychlost precese je úměrná magnetické indukci B . Je užitečné si zapamatovat, že v případě atomu (nebo elektronu) je odpovídající frekvence

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = (14 \text{ GHz/T}) g B \quad (34.12)$$

a v případě jádra

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = (7,6 \text{ MHz/T}) g B. \quad (34.13)$$

(Poslední dva vztahy se liší jen díky odlišným konvencím pro g v obou případech.)

Podle *klasické* teorie by tedy elektronové dráhy a spiny v atomu měly vykonávat precesní pohyb. Platí toto tvrzení i v kvantové mechanice? V podstatě ano, jiný je jen význam pojmu precese. V kvantové mechanice na rozdíl od klasické teorie není dost dobře možné hovořit o *směru* momentu hybnosti; existuje však velmi blízká analogie, a proto budeme i nadále hovořit o precesi. Pohovoříme si o ní později, až se vrátíme k problému z kvantově mechanického hlediska.

34.4 DIAMAGNETIZMUS

Nyní se podívejme z klasického hlediska na diamagnetismus. Lze to provést různými způsoby, a jeden z nejkratších je tento: Předpokládejme, že v blízkosti atomu pomalu zapínáme magnetické pole. V průběhu změny tohoto pole, vzniká v důsledku magnetické indukce i *elektrické* pole. Podle Faradayova zákona je křivkový integrál E podél nějaké uzavřené křivky roven rychlosti změny magnetického toku plochou, která je křivkou uzavřena. Vyberme si křivku Γ , jíž je kružnice s poloměrem r . Její střed je totožný se středem atomu, jak je znázorněno na *obr. 34.4*. Střední tangenciální elektrické pole E na této křivce je dáno vztahem

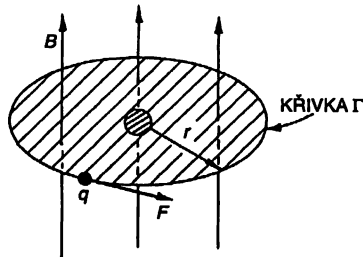
$$E \cdot 2\pi r = -\frac{d}{dt}(B \cdot \pi r^2)$$

a intenzita cirkulujícího pole tedy je

$$E = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}.$$

Indukované elektrické pole, které působí na elektron v atomu, vyvolává moment síly, jehož velikost je rovna $-q_e E r$. Tento moment síly musí být roven rychlosti změny momentu hybnosti dJ/dt :

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{q_e r^2}{2} \frac{dB}{dt}. \quad (34.14)$$



Obr. 34.4 Indukované elektrické síly, které působí na elektrony v atomu

Integrováním posledního vztahu podle času zjistíme, že změna momentu hybnosti v důsledku zapnutí magnetického pole z nulové hodnoty na hodnotu B je

$$\Delta J = \frac{q_e r^2}{2} B. \quad (34.15)$$

Takový přírůstek momentu hybnosti vede ke změně magnetického momentu, která je rovna $(-q_e/2m)$ -násobku přírůstku momentu hybnosti (jde tu o *orbitální* pohyb). Indukovaný diamagnetický moment je

$$\Delta\mu = -\frac{q_e}{2m}\Delta J = -\frac{q_e^2 r^2}{4m}B. \quad (34.16)$$

Záporné znaménko (které lze ověřit pomocí Lenzova zákona) způsobuje, že změna magnetického momentu má opačný směr než magnetické pole.

Přepíšeme vztah (34.16) na trochu jiný tvar. Člen r^2 , který v něm vystupuje, je vzdálenost od osy atomu, která má směr rovnoběžný s B ; má-li B směr souřadnicové osy z , bude $r^2 = x^2 + y^2$. Zajímáme-li se o sféricky symetrické atomy (nebo vystředované atomy, jejichž přirozené osy mají libovolné směry), bude střední hodnota $x^2 + y^2$ rovna dvěma třetinám střední hodnoty druhé mocniny skutečné vzdálenosti elektronu od *středu* atomu. Proto je užitečnější zapsat rovnici (34.16) jako

$$\Delta\mu = -\frac{q_e^2}{6m}\langle r^2 \rangle B. \quad (34.17)$$

V každém případě jsme zjistili, že indukovaný magnetický moment atomu je úměrný magnetické indukci B a má opačný směr. To je podstata diamagnetizmu látek. Právě tento magnetický jev odpovídá za malou sílu, která působí na kousek bismutu v nehomogenním magnetickém poli. (Velikost této síly si můžete vypočítat, určíte-li energii indukovaných momentů v poli a podíváte se, jak se mění energie látky při jejím vkládání do oblasti silného pole, resp. při jejím přemístování z této oblasti.)

Zbývá poslední problém: Jaká je střední hodnota druhé mocniny vzdálenosti $\langle r^2 \rangle$? Klasická mechanika nám neumí dát odpověď. Musíme se vrátit na začátek a vzít v úvahu kvantovou mechaniku. Podle ní nemůžeme odpovědět na otázku, kde se elektron skutečně nachází; známe jen pravděpodobnost jeho výskytu na určitém místě. Chápeme-li $\langle r^2 \rangle$ jako střední hodnotu druhé mocniny vzdálenosti elektronu od středu atomu při daném rozdělení pravděpodobnosti, vzorec pro diamagnetický moment, která poskytuje kvantová mechanika, je stejný jako vztah (34.17). Tato rovnice, přirozeně, představuje magnetický moment jediného elektronu. Celkový magnetický moment vznikne součtem příspěvků všech elektronů v atomu. Je překvapující, že klasická úvaha i kvantová mechanika dávají stejnou odpověď, ačkoliv, jak později uvidíme, klasická úvaha, která vede k rovnici (34.17), ve skutečnosti není správná ani v rámci klasické mechaniky.

Stejný jev diamagnetizmu pozorujeme i tehdy, když atom již má vlastní permanentní magnetický moment. V takovém případě vykonává systém v magnetickém poli precesní pohyb. Při precesi získává atom malý přírůstek úhlové rychlosti a tato pomalá rotace vyvolává malý proud, jehož následkem je korekce k magnetickému momentu. Je to stejný diamagnetický efekt jako předchozí, jen je popsán jiným způsobem. Při vysvětlování paramagnetizmu se o něj nemusíme příliš zajímat. Vypočteme-li nejdříve diamagnetický jev (jak jsme to udělali před chvílí), nemusíme se znepokojovat existencí malého dodatečného proudu v důsledku precese. Ten už jsme zahrnuli do diamagnetického členu.

34.5 LARMOROVA VĚTA

Z našich dosavadních výsledků už můžeme vyvodit určité závěry: Především v klasické teorii byl magnetický moment μ vždy úměrný J s určitou konstantou úměrnosti pro daný atom.

Elektrony neměly spin a konstanta úměrnosti byla vždy $-q_e/2m$; tj. v rovnici (34.6) bychom měli dosadit $g=1$. Poměr μ k J nezávisel na vnitřním pohybu elektronů. Podle klasické teorie by tedy všechny soustavy elektronů vykonávaly precesní pohyb se *stejnou* úhlovou rychlostí. (V kvantové mechanice to *neplatí*.) Získaný výsledek úzce souvisí s jednou větou z klasické mechaniky, kterou nyní dokážeme. Představme si skupinu elektronů, které jsou vázány přitažlivou dostředivou silou – podobně, jako jsou elektrony přitahovány k jádru. Elektrony budou kromě toho interagovat i navzájem a obecně vykonávat složitý pohyb. Předpokládejme, že jsme vyřešili pohybové rovnice *bez* magnetického pole a zajímáme se o pohyb *ve slabém magnetickém poli*. Zmíněná věta říká, že pohyb ve slabém magnetickém poli je vždy stejný jako bez pole, ale s dodatečnou rotací kolem směru pole úhlovou rychlostí $\omega_L = q_e B / 2m$. (Ta je stejná jako ω_p při $g=1$.) Pohyby mohou být ovšem různé. Podstata je v tom, že ke každému pohybu bez magnetického pole existuje odpovídající pohyb v poli, který je složen z původního pohybu a z rovnoměrné rotace. Takový je obsah Larmorovy věty a ω_L se nazývá *Larmorova frekvence*.

Chtěli bychom vám ukázat, jak se tato věta dokazuje, ale podrobnosti vám necháme jako cvičení. Nejdříve si všimneme jediného elektronu v poli centrální síly. Síla, která na něj působí, je $F(r)$ a směřuje do silového centra. Zapneme-li nyní homogenní magnetické pole, přidá se dodatečná síla $qv \times B$ a celková síla pak je

$$F(r) + qv \times B. \quad (34.18)$$

Nyní se podívejme na tento systém ze souřadnicové soustavy, která se otáčí úhlovou rychlostí ω kolem osy, která prochází silovým centrem a je rovnoběžná s B . To však není inerciální soustava; musíme proto přidat odpovídající pseudosíly, a to odstředivou sílu a Coriolisovu sílu, o nichž jsme hovořili v kapitole 19 prvního dílu. Tam jsme ukázali, že v soustavě, která se otáčí úhlovou rychlostí ω , existuje zdánlivá *tangenciální* síla úměrná radiální složce rychlosti v_r :

$$F_t = -2m\omega v_r. \quad (34.19)$$

Kromě toho je zde i zdánlivá radiální síla

$$F_r = m\omega^2 r + 2m\omega v_t, \quad (34.20)$$

přičemž v_t je tangenciální složka rychlosti měřená v *rotující* soustavě. (Radiální složka v_r je stejná v rotující i v inerciální soustavě.)

Pro dostatečně malé úhlové rychlosti (je-li $\omega r \ll v_t$) můžeme zanedbat první člen (odstředivou sílu) v rovnici (34.20) v porovnání s druhým členem (s Coriolisovou silou). Pak lze rovnice (34.19) a (34.20) společně napsat ve tvaru

$$F = -2m\omega \times v. \quad (34.21)$$

Složme-li nyní otáčení a magnetické pole, musíme sčítat síly v rovnicích (34.18) a (34.21). Celková síla je

$$F(r) + qv \times B + 2mv \times \omega. \quad (34.22)$$

(Poslední člen vyplývá z (34.21) po záměně činitelů ve vektorovém součinu a změně znaménka). Na základě našeho výsledku je zřejmé, že je-li

$$2m\omega = -qB,$$

vyruší se poslední dva členy na pravé straně a jedinou silou v pohybujiící se soustavě je $F(r)$. Pohyb elektronu je stejný jako bez magnetického pole a, samozřejmě, i bez rotace soustavy. Tak jsme dokázali Larmorovu větu pro jeden elektron. Jelikož se v důkazu předpokládá, že ω je malé, platí věta jen pro malá magnetická pole. Vám zbývá, abyste stejnou větu dokázali pro soustavu mnoha vzájemně působících elektronů, které se pohybují ve stejném centrálním poli. Bez ohledu na složitost atomu věta platí, je-li pole centrální. Dále je však klasická mechanika v koncích, neboť ve skutečnosti neplatí, že precese je u všech pohybů stejná. Úhlová rychlost precese ω_p podle vztahu (34.11) je rovna ω_L pouze tehdy, když je g náhodou rovno 1.

34.6 KLASICKÁ FYZIKA NEVYSVĚTLUJE ANI DIAMAGNETIZMUS, ANI PARAMAGNETIZMUS

Ukážeme, že v rámci klasické mechaniky vůbec nemůže existovat diamagnetismus ani paramagnetismus. Zní to divoce – nejdříve jsme dokázali, že existuje paramagnetismus, diamagnetismus, precedující dráhy atd., a nyní se chystáme vše popřít. Ano! Dokážeme, že když se klasické mechaniky držíte dostatečně striktně, neexistují žádné podobné magnetické jevy – všechny se ruší. Začnete-li argumentovat klasicky, ale včas se zastavíte, můžete dospět k libovolné odpovědi, jaká vám vyhovuje. Ale jediný přípustný a korektní způsob důkazu ukazuje, že neexistují vůbec žádné magnetické jevy.

Jedním z důsledků klasické mechaniky je, že v libovolné soustavě (v plynu elektronů, protonů nebo něčeho jiného) uzavřené v nádobě, která se jako celek nemůže otáčet, se nemohou objevit magnetické jevy. Podobné jevy mohou existovat v izolované soustavě, jakou je např. hvězda vázaná vlastními silami, která se začne otáčet po zapnutí magnetického pole. Máte-li však upevněné těleso, které se nemůže roztočit, magnetické jevy neexistují. Shrňme, co máme na mysli: Předpokládejme, že při dané teplotě existuje *jediný stav* tepelné rovnováhy. Potom platí tvrzení, že zapnete-li magnetické pole a vyčkáte, až soustava přejde do tepelné rovnováhy, neobjeví se ani paramagnetismus ani diamagnetismus – indukovaný magnetický moment bude nulový.

Důkaz: Podle statistické mechaniky je pravděpodobnost, že se soustava nachází v určitém pohybovém stavu, úměrná $e^{-W/kT}$, kde U je energie pohybu. Jaká je však tato energie? V případě částice, která se pohybuje v konstantním magnetickém poli, je rovna obyčejné potenciální energii plus $m v^2/2$. Není tu žádný příspěvek od magnetického pole. (Už víte, že síla, způsobená elektromagnetickým polem, je $q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, výkon $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ je roven jen $q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$, a nezávisí tedy na magnetickém poli.) Energie soustavy je tedy v magnetickém poli i bez pole vždy rovna součtu kinetické a potenciální energie. Jelikož pravděpodobnost určitého pohybu závisí jen na energii, tj. na rychlosti a poloze, je stejná bez ohledu na přítomnost pole. V *tepelné* rovnováze proto magnetické pole nemá žádný vliv. Máme-li jednu soustavu v nádobě bez pole a druhou v jiné nádobě v magnetickém poli, bude pravděpodobnost výskytu nějaké rychlosti v určitém bodě v první nádobě stejná jako ve druhé. Neexistují-li v první nádobě cirkulující proudy (nemohou existovat, je-li soustava v rovnováze s nehybnými stěnami), neexistuje ani střední magnetický moment. Jelikož jsou všechny pohybové soustavy v druhé nádobě stejné, ani v ní se neobjeví nenulový střední magnetický moment. Je-li tedy teplota konstantní a po zapnutí pole se obnoví tepelná rovnováha, je magnetický moment indukovaný magnetickým polem podle klasické mechaniky nulový. Uspokojivé vysvětlení magnetických jevů je možné jen pomocí kvantové mechaniky.

Bohužel, není možné předpokládat, že jste už úplně zvládli kvantovou mechaniku, a v této části se jí nemůžeme věnovat. Na druhé straně ne vždy je nutné naučit se dopředu přesné zákony

a pak je používat v nejrůznějších situacích. Skoro ke každému tématu jsme v těchto přednáškách přistupovali jiným způsobem. V části o elektřině jsme na „první stranu“ napsali Maxwellovy rovnice a až pak jsme odvodili všechny jejich důsledky. To je jeden možný přístup. Tentokrát však *nezačneme* opět novou „první stranou“. Nepokusíme se napsat rovnice kvantové mechaniky a z nich vše odvodit. Řeknu vám jen o některých důsledcích kvantové mechaniky, a později se naučíte, odkud se vzaly. Tak se do toho dejme.

34.7 MOMENT HYBNOSTI V KVANTOVÉ MECHANICE

Už jsme uvedli vztah mezi magnetickým momentem a momentem hybnosti. Jaký však má magnetický moment a moment hybnosti *smysl* v kvantové mechanice? Zde se ukazuje jako nejlepší definovat podobné věci (např. magnetické momenty) pomocí jiných pojmů, např. energie, aby bylo jisté, že víme, o čem hovoříme. Pomocí energie je magnetický moment snadné definovat, neboť energie momentu v magnetickém poli je rovna (v klasické teorii) $\mu \cdot B$. Na základě této skutečnosti byla v kvantové mechanice přijata následující definice: Vypočteme-li energii soustavy v magnetickém poli a zjistíme, že (pro malé pole) je úměrná magnetické indukci, nazveme koeficient úměrnosti složkou magnetického momentu ve směru pole. (V této chvíli je takováto elegancie luxusem; jinak můžeme stále uvažovat magnetický moment v obyčejném, více méně klasickém smyslu.)

Dále bychom rádi zkoumali pojem momentu hybnosti v kvantové mechanice, nebo, lépe řečeno vlastnosti toho, čemu se v kvantové mechanice říká moment hybnosti. Když přecházíte k novým druhům zákonitostí, nemůžete předpokládat, že každý pojem bude znamenat totéž, co dříve. Třeba si pomyslete: „Ach, vždyť vím, co je moment hybnosti. To je ta veličina, která se mění pod vlivem momentu síly.“ Co je však moment síly? V kvantové mechanice je nutné znovu definovat staré veličiny. Bylo by proto možná oprávněnější vymyslet si nějaký nový název, např. „kvantový moment hybnosti“ nebo něco podobného, neboť jde o moment hybnosti definovaný v kvantové mechanice. Podaří-li se nám však v kvantové mechanice najít nějakou veličinu, která je v dostatečně velkých systémech totožná s naší starou představou o momentu hybnosti, je zbytečné vymýšlet nový název. Můžeme ji stejně dobře nazvat i momentem hybnosti. V tomto smyslu ta podivná věc, kterou popíšeme za chvíli, je *opravdu* moment hybnosti. Ve velkém systému v ní rozpoznáme přesně to, co je moment hybnosti v klasické mechanice.

Nejdříve si představme soustavu, v níž se moment hybnosti zachovává, např. úplně osamocený atom v prázdném prostoru. Taková soustava (podobně jako Země, která se otáčí kolem své osy) by mohla normálně rotovat kolem libovolně zvolené osy. Pro danou rotaci by tedy mohla existovat celá řada různých „stavů“ se stejnou energií, přičemž každému „stavu“ odpovídá jistý směr osy momentu hybnosti. Tak v klasické mechanice existuje pro daný moment hybnosti nekonečně mnoho možných stavů, všechny se stejnou energií.

V kvantové mechanice se však dějí zvláštní věci. Zaprvé, počet stavů, v nichž se soustava *může* nacházet, je omezen – je jich jen konečný počet. Je-li soustava malá, je tento počet velmi malý, ve velkém systému se stává velmi, velmi velkým. Za druhé, „stav“ *nemůžeme* popsat určením *směru* jeho momentu hybnosti, ale jen udáním *průmětu* momentu hybnosti do určitého směru, např. do směru osy z . V klasické teorii může mít objekt s určitým momentem hybnosti J složku z s libovolnou hodnotou od $+J$ po $-J$. V kvantové mechanice může mít složka z momentu hybnosti jen určité diskrétní hodnoty. Pro libovolnou soustavu, např. atom nebo jádro, s danou energií existuje určité charakteristické číslo j , takže složka z momentu hybnosti může být rovna některé z následujících množiny čísel:

$$\begin{array}{c}
 j\hbar \\
 (j-1)\hbar \\
 (j-2)\hbar \\
 \vdots \\
 -(j-2)\hbar \\
 -(j-1)\hbar \\
 -j\hbar
 \end{array}
 \tag{34.23}$$

Největší hodnota složky z je $j\hbar$, další je o \hbar menší, a tak dále až po $-j\hbar$. Číslo j se nazývá spin soustavy. (Někdy jej nazývají i kvantové číslo celkového momentu hybnosti, ale my jej budeme nazývat spin.)

Možná že vás trápí, že to, o čem hovoříme, zřejmě platí jen pro nějakou „speciální“ volbu osy z . Není to pravda. Průmět momentu hybnosti soustavy se spinem j do směru *libovolné* osy může nabývat jen hodnoty uvedené v (34.23). I když to zní záhadně, prosím vás, přijměte zatím toto tvrzení. Vráťme se k tomuto bodu později podrobněji. Myslím že vás potěší alespoň to, že složka z se pohybuje kolem nějaké hodnoty po *minus* tutéž hodnotu, takže nemusíme přemýšlet o tom, co je kladný směr osy z . (Samozřejmě, kdybychom řekli, že se mění od $+j$ po *minus* nějakou jinou hodnotu, bylo by to velmi „záhadné“ a nesměli bychom definovat osu z v jiném směru.)

Musí-li se hodnota složky z momentu hybnosti měnit po jedné od $+j$ do $-j$, musí být j celé číslo. Ale vlastně ne: dvojnásobek j musí být celé číslo. Pouze *rozdíl* mezi $+j$ a $-j$ musí být celočíselný. Obecně je spin j buď celočíselný, nebo poločíselný v závislosti na tom, zda je $2j$ sudé nebo liché. Například jádro lithia má spin tři poloviny, tedy $j = 3/2$. Průmět momentu hybnosti do směru osy z (v jednotkách \hbar) pak může být

$$\begin{array}{c}
 +3/2 \\
 +1/2 \\
 -1/2 \\
 -3/2.
 \end{array}$$

Nachází-li se jádro v prázdném prostoru bez vnějších polí, může existovat ve čtyřech možných stavech se stejnou energií. Máme-li soustavu se spinem dva, složka z momentu hybnosti smí mít jen hodnoty (v jednotkách \hbar)

$$\begin{array}{c}
 2 \\
 1 \\
 0 \\
 -1 \\
 -2.
 \end{array}$$

Můžete si snadno spočítat, že při daném j existuje $(2j+1)$ možných stavů. Jinými slovy: Prozradíte-li energii a spin j soustavy, ukáže se, že existuje přesně $(2j+1)$ stavů s touto energií, přičemž každý z nich odpovídá jedné z možných hodnot složky z momentu hybnosti.

Chtěli bychom upozornit ještě na jednu skutečnost. Vyberete-li si náhodně libovolný atom se známým j a změříte složku z momentu hybnosti, dostanete jako výsledek libovolnou z možných hodnot, přičemž všechny možnosti jsou *stejně* pravděpodobné. Všechny hodnoty představují ve skutečnosti jednotlivé stavy a každý z nich je stejně „dobrý“ jako ostatní. Každý z nich se ve skutečném světě vyskytuje se stejnou „váhou“. (Mlčky předpokládáme, že jsme nepodnikli nic, čím bychom vyznačili speciální vzorek.) Tato skutečnost má náhodou klasický analog. Položte si stejnou otázku klasicky: Jaká je pravděpodobnost určité hodnoty složky z , vybereme-li náhodný soubor

systemů se stejným momentem hybnosti? Odpověď zní: všechny hodnoty od maxima po minimum jsou stejně pravděpodobné. (Snadno si to sami dokážete.) Klasický výsledek odpovídá stejné pravděpodobnosti $(2j + 1)$ možných stavů v kvantové mechanice.

Na základě toho, co jsme se dosud naučili, můžeme dospět k dalšímu zajímavému a trochu překvapujícímu závěru. V některých klasických výpočtech se v konečném výsledku objevuje *druhá mocnina* velikosti momentu hybnosti J , tj. $J \cdot J$. Uhadnout správný kvantově mechanický vztah lze často na základě klasického výpočtu pomocí jednoduchého receptu: Nahaďte $J^2 = J \cdot J$ výrazem $j(j + 1)\hbar^2$. Toto pravidlo je často využíváno a obvykle vede ke správnému výsledku, *ne* však vždy. Následující argument lze použít k vysvětlení, proč lze očekávat oprávněnost uvedeného pravidla.

Skalární součin $J \cdot J$ lze zapsat jako

$$J \cdot J = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2.$$

Jelikož je to skalár, musí být stejný při každé orientaci spinu. Vybereme-li soubor náhodných stavů dané soustavy atomů a změříme J_x^2 , J_y^2 a J_z^2 , jejich *střední hodnoty* musí být stejné. (Neexistuje žádný významný směr v prostoru.) Střední hodnota $J \cdot J$ je tedy právně rovna trojnásobku střední hodnoty druhé mocniny libovolné složky, např. J_z^2 :

$$\langle J \cdot J \rangle = 3 \langle J_z^2 \rangle.$$

Jelikož je však $J \cdot J$ pro všechny orientace stejné, střední hodnota je právě $J \cdot J$ a máme

$$J \cdot J = 3 \langle J_z^2 \rangle. \quad (34.24)$$

Použijeme-li nyní stejnou rovnici v kvantové mechanice, snadno vypočteme $\langle J_z^2 \rangle$. Stačí vypočítat $(2j + 1)$ možných hodnot J_z^2 a výsledek dělit jejich počtem:

$$\langle J_z^2 \rangle = \frac{j^2 + (j-1)^2 + \dots + (-j-1)^2 + (-j)^2}{2j+1} \hbar^2. \quad (34.25)$$

Pro soustavu se spinem $3/2$ vyjde

$$\langle J_z^2 \rangle = \frac{(3/2)^2 + (1/2)^2 + (-1/2)^2 + (-3/2)^2}{4} \hbar^2 = \frac{5}{4} \hbar^2.$$

Z toho usuzujeme, že

$$J \cdot J = 3 \langle J_z^2 \rangle = 3 \cdot \frac{5}{4} \hbar^2 = \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} + 1 \right) \hbar^2.$$

Necháme vám za úkol dokázat, že rovnice (34.25) spolu s (34.24) vedou k obecnému výsledku

$$J \cdot J = 3 \langle J_z^2 \rangle = j(j+1)\hbar^2. \quad (34.26)$$

Na základě klasických představ bychom očekávali, že největší možná hodnota z -ové složky J je právě rovna velikosti J , tj. $\sqrt{J \cdot J}$. V kvantové mechanice je však maximální hodnota J_z vždy o něco menší, neboť $j\hbar$ je vždy menší než $\sqrt{j(j+1)}\hbar$. Moment hybnosti nemá nikdy úplné směr osy z .

34.8 MAGNETICKÁ ENERGIE ATOMŮ

Nyní se opět vrátíme k magnetickým momentům. Už jsme zmiňovali, že v kvantové mechanice lze magnetický moment určité soustavy vyjádřit pomocí momentu hybnosti (viz rovnice (34.6)):

$$\boldsymbol{\mu} = -g \left(\frac{q_e}{2m} \right) \mathbf{J}, \quad (34.27)$$

kde $-q_e$ je náboj a m hmotnost elektronu.

Atomový magnet bude mít ve vnějším magnetickém poli navíc magnetickou energii, která závisí na průmětu jeho magnetického momentu do směru pole. Víme, že

$$W_{\text{mag}} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}. \quad (34.28)$$

Vybereme-li si jako směr \mathbf{B} osu z , máme

$$W_{\text{mag}} = -\mu_z B. \quad (34.29)$$

Pomocí vztahu (34.27) vyjde

$$W_{\text{mag}} = g \left(\frac{q_e}{2m} \right) J_z B.$$

Podle kvantové mechaniky může mít J_z hodnoty: $j\hbar$, $(j-1)\hbar$, ..., $-j\hbar$. Magnetická energie soustavy atomů proto není libovolná; může nabývat také jen několika hodnot. Např. maximální hodnota je

$$g \left(\frac{q_e}{2m} \right) \hbar j B.$$

Veličina $q_e \hbar / 2m$ je obvykle nazývána *Bohrův magneton* a označuje se μ_B :

$$\mu_B = \frac{q_e \hbar}{2m}.$$

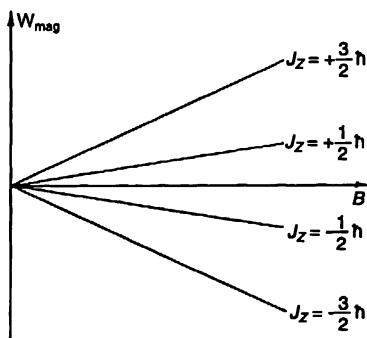
Možné hodnoty magnetické energie jsou

$$W_{\text{mag}} = g \mu_B B \frac{J_z}{\hbar},$$

přičemž J_z/\hbar nabývá hodnoty j , $(j-1)$, $(j-2)$, ..., $(-j+1)$, $-j$.

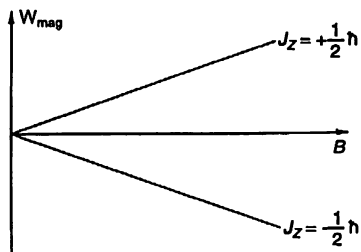
Jinými slovy, energie soustavy atomů se po vložení do magnetického pole změní o hodnotu, která je úměrná magnetické indukci a J_z . Říkáme, že v magnetickém poli se energie soustavy atomů „rozštěpí na $2j+1$ hladin“. Například atom, jehož energie mimo pole je W_0 a jehož spin je $3/2$, bude mít v poli čtyři možné hodnoty energie. Tyto hodnoty energie můžeme znázornit

na diagramu energetických hladin (obr. 34.5). Libovolný atom se může v daném poli B vyskytovat jen s jednou ze čtyř možných hodnot energie. To nám říká kvantová mechanika o chování atomových soustav v magnetickém poli.



Obr. 34.5 Možné hodnoty magnetické energie atomové soustavy atomů se spinem $\frac{3}{2}$ v magnetickém poli B

Nejjednodušší „atomovou soustavou“ je jediný elektron. Spin elektronu je $1/2$, takže existují jen dva možné stavy: $J_z = \hbar/2$ a $J_z = -\hbar/2$. Pro elektron v klidu (bez orbitálního pohybu) má spinový magnetický moment hodnotu $g=2$, takže magnetická energie může být jen $\pm \mu_B B$. Možné energie v magnetickém poli jsou na obr. 34.6. Volně řečeno, elektron má spin orientován buď „nahoru“ (ve směru pole), nebo „dolů“ (proti jeho směru).



Obr. 34.6 Dva možné energetické stavy elektronu v magnetickém poli B

Soustavy s vyšším spinem mají víc stavů. Můžeme si představit, že spin má směr „nahoru“, „dolů“ nebo pootočený o nějaký úhel, který závisí na hodnotě J_z .

Uvedené kvantové mechanické výsledky použijeme v další kapitole při diskuzi magnetických vlastností látek.

PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 34.1 ■ Nabitá částice se pohybuje v rovině kolmé k homogennímu magnetickému poli B . Ukažte, že bude-li se B měnit pomalu, magnetický moment orbitálního pohybu částice bude zůstat konstantním. Co rozumíme slovem „pomalu“?

P

aramagnetizmus a magnetická rezonance

35.1 KVANTOVÉ MAGNETICKÉ STAVY

35.2 STERNŮV-GERLACHŮV POKUS

35.3 RABIHO METODA MOLEKULOVÉHO SVAZKU

35.4 PARAMAGNETIZMUS MAKROSKOPICKÝCH LÁTEK

35.5 CHLAZENÍ POMOCÍ ADIABATICKÉ DEMAGNETIZACE

35.6 JADERNÁ MAGNETICKÁ REZONANCE

Přečtěte si znovu: kapitolu 11, Nitro dielektrik

35.1 KVANTOVÉ MAGNETICKÉ STAVY

V předcházející kapitole jsme si vysvětlili, že v kvantové mechanice nemůže mít moment hybnosti libovolný směr, ale jeho průmět na zvolenou osu nabývá jen určitých, od sebe stejně vzdálených diskrétních hodnot. Tato skutečnost je zvláštní a zároveň zářejší. Třeba se vám zdá, že bychom se takovými věcmi měli začít zabývat, až když budou vaše myslí rozvinutější a připravenější přijmout podobné myšlenky. Ve skutečnosti nikdy nebudou natolik rozvinuté, aby se s takovou skutečností snadno smířily. Neexistuje způsob, jak ji popsat a udělat ji pochopitelnou, který by zároveň nebyl sám natolik subtilní a rafinovaný, že je nakonec složitější než skutečnost, kterou chce vysvětlit. Mikroskopické chování látky, jak jsme už několikrát zdůraznili, se liší od všeho, na co jste zvyklí, a je skutečně velmi zvláštní. V průběhu studia klasické fyziky je rozumné postupně se seznamovat s mikroskopickým chováním látky, nejdříve i prostřednictvím zkušenosti, která není založena na hlubším chápání věcí. Chápání přichází velmi pomalu (jestli vůbec). Samozřejmě, člověk ví stále lépe, co se děje v kvantové mechanických situacích, máme-li to rozumět jako

chápaní, ale sotva získá ten uspokojivý pocit, že zákony kvantové mechaniky jsou „přirozené“. Bezpochyby jsou přirozené, ale ne ve světle našich zkušeností z každodenního života. Musíme si uvědomit, že náš nynější přístup k pravidlu o momentu hybnosti se podstatně liší od přístupu k mnohým jiným problémům, o nichž jsme už mluvili. Nebudeme se snažit pravidlo „vysvětlit“, ale aspoň si povíme, jaká je skutečnost; bylo by nepoctivé popisovat magnetické vlastnosti látek a vůbec se nezmínit o tom, že klasický obraz magnetizmu (momentu hybnosti a magnetických momentů) je nesprávný.

Jedním z nejvíce šokujících a zarazujících důsledků kvantové mechaniky je skutečnost, že průmět momentu hybnosti do směru libovolné osy je vždy celočíselným nebo poločíselným násobkem \hbar . Tento výsledek vůbec nezávisí na volbě osy. Jemnosti spojené s touto skutečností (např. to, že si můžete vybrat jinou osu a zjistíte, že průměty momentu hybnosti tvoří stejnou množinu hodnot) odložíme do některé z pozdějších kapitol, kdy už dokážete ocenit, jakým způsobem se tento zdánlivý paradox podaří definitivně rozřešit.

Zatím přijměte skutečnost, že pro každou soustavu atomů je definováno určité číslo j , celočíselné nebo poločíselné, které se jmenuje *spin* soustavy, a že průmět momentu hybnosti do libovolné zvolené osy je roven jedné z následujících hodnot mezi $+j\hbar$ a $-j\hbar$:

$$J_z = \text{některá z hodnot} \begin{Bmatrix} j \\ j-1 \\ j-2 \\ \vdots \\ -j+2 \\ -j+1 \\ -j \end{Bmatrix} \cdot \hbar. \quad (35.1)$$

Už jsme uvedli, že každá jednoduchá soustava atomů má magnetický moment, který má stejný směr jako moment hybnosti. Toto tvrzení platí nejen pro atomy a jádra, ale i pro elementární částice. Každá elementární částice je charakterizována kromě jiného hodnotou spinu j a magnetickým momentem. (Některé částice je mají nulové.) Magnetickým momentem zde chápeme to, že energie soustavy ve slabém magnetickém poli, které má např. směr osy z lze zapsat jako $-\mu_z B$. Pole nesmíme volit příliš silné, jinak by mohlo porušit vnitřní pohyby v soustavě a energie by pak nebyla měrou magnetického momentu, který měla soustava před zapnutím pole. Je-li však pole dostatečně slabé, změna energie o hodnotu

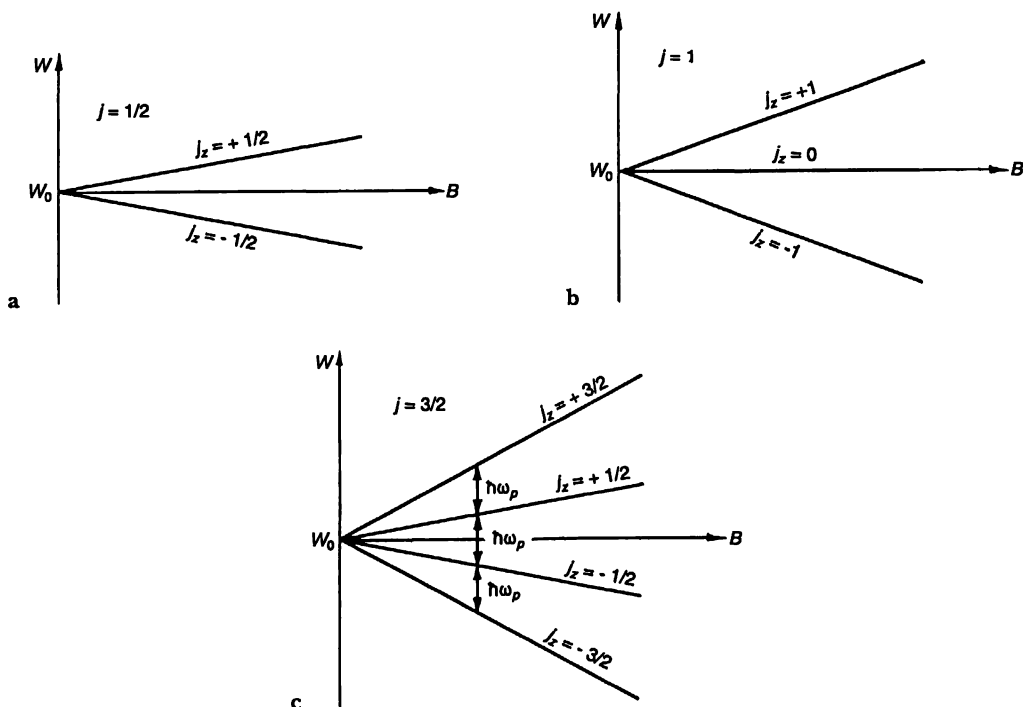
$$\Delta W = -\mu_z B, \quad (35.2)$$

přičemž v této rovnici

$$\mu_z = g \left(\frac{q}{2m} \right) J_z \quad (35.3)$$

a J_z nabývá některou z hodnot ve vztahu (35.1).

Vyberme například soustavu se spinem $j=3/2$. Bez magnetického pole se může nacházet ve čtyřech různých možných stavech, charakterizovaných různými hodnotami J_z , přičemž všechny mají stejnou energii. Jakmile však zapneme magnetické pole, přidá se energie interakce, která rozdělí tyto stavy na čtyři trochu odlišné energetické hladiny. Energie těchto hladin jsou úměrné B krát \hbar krát $3/2$, $1/2$, $-1/2$ nebo $-3/2$, tedy krát hodnoty J_z . Rozštěpení energetických hladin soustav atomů se spiny $1/2$, 1 a $3/2$ je znázorněno na obr. 35.1. (Zapamatujte si, že v libovolném uspořádání elektronů má magnetický moment vždy opačný směr než moment hybnosti.)



Obr. 35.1 Soustava atomů se spinem j má v magnetickém poli B $(2j + 1)$ možných hodnot energie. Rozštěpení energií je v případě malých polí úměrné B

Jistě si na diagramech všimnete, že „hmotný střed“ energetických hladin je stejný v případě bez pole i s polem. Také si všimnete, že vzdálenosti mezi hladinami jsou pro zvolenou částici a dané magnetické pole vždy stejné. Vzdálenost hladin při dané magnetické indukci B nazveme $\hbar\omega_p$ a tak definujeme ω_p . Pomocí rovnic (35.2) a (35.3) dostaneme

$$\hbar\omega_p = g \frac{q}{2m} \hbar B$$

neboli

$$\omega_p = g \frac{q}{2m} B. \quad (35.4)$$

Veličina $g(q/2m)$ je právě poměr magnetického momentu k momentu hybnosti a je charakteristická pro danou částici. Rovnice (35.4) je identická se vztahem, který jsme v kapitole 34 odvodili pro úhlovou rychlost precese setrvačnicku s momentem hybnosti J a magnetickým momentem μ v magnetickém poli B .

35.2 STERNŮV-GERLACHŮV POKUS

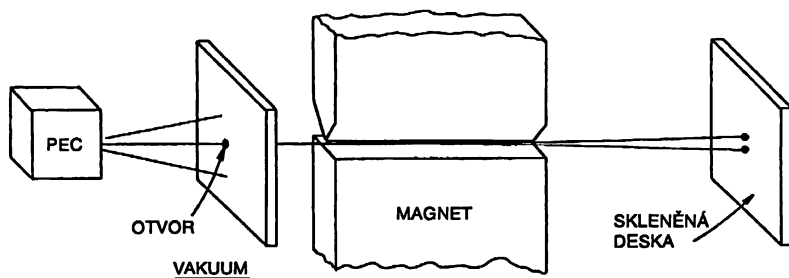
Skutečnost, že moment hybnosti je kvantován, je natolik překvapující, že si trochu promluvíme o její historii. Způsobila šok hned tehdy, kdy byla objevena (ačkoliv se teoreticky očekávala).

Poprvé byla pozorována při pokusu, který uskutečnili roku 1922 Stern a Gerlach. Chcete-li, můžete Sternův-Gerlachův pokus považovat za přímé potvrzení víry v kvantování momentu hybnosti. Stern a Gerlach navrhli experiment k měření magnetických momentů jednotlivých atomů stříbra. Svazek atomů stříbra vytvořili tak, že odpařovali stříbro v horké peci a uvolněné atomy propouštěli soustavou malých otvorů. Svazek pak nasměrovali mezi póly speciálního magnetu (viz obr. 35.2). Jejich myšlenka byla následující. Je-li μ magnetický moment atomu stříbra, má atom v magnetickém poli B energii $-\mu_z B$, přičemž osu z volíme ve směru magnetického pole. V klasické teorii je μ_z rovno součinu velikosti magnetického momentu a kosinu úhlu, který svírá vektor magnetického momentu se směrem magnetického pole; energie magnetického momentu v poli by tedy měla být

$$\Delta W = -\mu B \cos \vartheta. \quad (35.5)$$

Samozřejmě, když atomy vycházejí z pece, jejich magnetické momenty mohou směřovat do libovolných směrů a možné jsou všechny hodnoty úhlu ϑ . Změní-li se rychle magnetické pole ve směru z (existuje-li silný gradient pole), mění se i magnetická energie od místa k místu a na magnetické momenty působí síla, jejíž směr závisí na znaménku kosinu ϑ . Síla, která působí na atomy směrem nahoru nebo dolů, je úměrná derivaci magnetické energie; z principu virtuální práce vyplývá

$$F_z = -\frac{\partial W}{\partial z} = \mu \cos \vartheta \frac{\partial B}{\partial z}. \quad (35.6)$$



Obr. 35.2 Sternův-Gerlachův pokus

Aby dosáhli velmi rychlé změny magnetického pole, vyrobili Stern a Gerlach magnet, jehož jeden pól byl zaostřen. Svazek atomů byl nasměrován podél ostré hrany, takže atomy cítily v důsledku nehomogenosti pole sílu svislého směru. Atom stříbra, jehož magnetický moment má vodorovný směr by neměl cítit žádnou sílu a měl by projít magnetem přímo. Atom, jehož magnetický moment směřuje svisle vzhůru, by se měl pohybovat v důsledku působící síly nahoru k zaostřené hraně magnetu. Atom, jehož moment směřuje dolů, bude směřován dolů. Atomy, které vycházejí z magnetu, by měly být rozptýleny podle svých svislých složek magnetického momentu. V klasické teorii jsou všechny hodnoty úhlu možné a lze očekávat, že na skleněné desce zanechají atomy stříbra svislou stříbrnou čáru. Výška čáry bude úměrná velikosti magnetického momentu. Výsledek Sternova-Gerlachova pokusu úplně odhalil neúspěch myšlenek klasické fyziky. Na skleněné desce byly nalezeny dvě oddělené skvrny. Atomy stříbra se rozdělily na dva svazky.

Rozdělení svazku atomů, jejichž spiny jsou zřejmě náhodně orientovány, na dva oddělené svazky je úplný zázrak. Odkud magnetický moment *ví*, že smí nabývat jen určitých hodnot průmě-

tu do směru magnetického pole? Právě zde je prvopočátek objevu kvantování momentu hybnosti. Nepokusíme se o žádné teoretické vysvětlení a jen zdůrazníme, že se s výsledkem tohoto experimentu musíme smířit stejně jako fyzici té doby. To, že energie atomu v magnetickém poli nabývá jen určitých hodnot, je *experimentální fakt*. Pro každou z těchto hodnot je energie úměrná indukci pole. V oblasti, kde se pole mění, má magnetická síla, která působí na atomy podle principu virtuální práce, také jen určité hodnoty; síla je pro každý kvantový stav jiná, a proto se svazek atomů rozštěpí na několik oddělených svazků. Z naměřených odchýlení svazků lze najít velikosti magnetických momentů.

35.3 RABIHO METODA MOLEKULOVÉHO SVAZKU

Nyní bychom chtěli popsat zdokonalené zařízení na měření magnetických momentů, které vyvinuli I. I. Rabi a jeho spolupracovníci. Ve Sternově–Gerlachově pokusu je výchylka atomů velmi malá a měření magnetických momentů není příliš přesné. Rabiho metoda naopak umožňuje fantastickou přesnost měření momentů. Jejím základem je právě skutečnost, že původní energie atomů se v magnetickém poli rozštěpí na konečný počet energetických hladin. To, že energie atomu v magnetickém poli smí nabývat jen určitých konkrétních hodnot, není ve skutečnosti o nic více překvapující než fakt, že atomy *obecně* mají jen určité diskrétní energetické hladiny, jak jsme už zmínili v 1. dílu. Proč by totéž nemělo platit o atomech v magnetickém poli? Některé podivné důsledky kvantové mechaniky však vyjdou najevo, když se tuto myšlenku pokusíme dát do souvislosti s představou o *orientovaných magnetických momentech*.

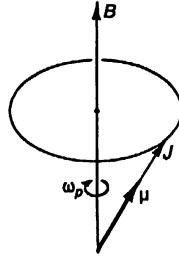
Má-li atom dvě hladiny, jejichž energie se liší o hodnotu ΔW , může přejít z vyšší hladiny na nižší, a přitom vyzařít světelné kvantum s frekvencí ω , přičemž

$$\hbar\omega = \Delta W. \quad (35.7)$$

Totéž se děje i tehdy, když je atom v magnetickém poli. V tom případě jsou však energetické rozdíly natolik malé, že příslušná frekvence neodpovídá viditelnému světlu, ale mikrovlnám nebo rádiovým frekvencím. Také se mohou uskutečňovat přechody z nižší energetické hladiny na vyšší, absorbuje-li atom světlo, nebo (je-li v magnetickém poli) pohltí-li energii mikrovlny. Máme-li tedy atom v magnetickém poli, můžeme vyvolat přechody mezi jeho jednotlivými stavy, použijeme-li dodatečné elektromagnetické pole správné frekvence. Jinými slovy: máme-li atom v silném magnetickém poli a „dráždíme“ jej slabým proměnným elektromagnetickým polem, existuje určitá pravděpodobnost, že atom přinutíme přejít na jinou hladinu, je-li frekvence pole blízka ω podle (35.7). Tato frekvence se pro atom v magnetickém poli shoduje právě s frekvencí, kterou jsme dříve nazvali ω_p a jejíž závislost na magnetickém poli udává vztah (35.4). Pokud atom „dráždíme“ nesprávnou frekvencí, je naděje vyvolat přechod malá. Pravděpodobnost přechodu tedy vykazuje výraznou *rezonanci* při hodnotě ω_p . Změříme-li frekvenci, při které nastává rezonance ve známém magnetickém poli B , můžeme s velkou přesností určit veličinu $g(q/2m)$, a tím i činitel g .

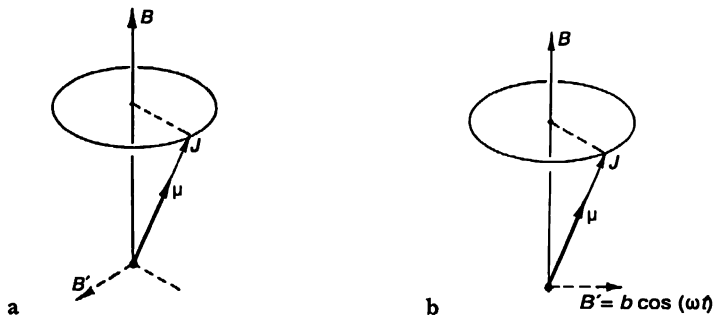
Je zajímavé, že ke stejnému závěru lze dospět i když vyjdeme z klasického hlediska. Podle klasické mechaniky vykonává malý setrvačnický s magnetickým momentem μ a momentem hybnosti J , umístěný ve vnějším magnetickém poli, precesní pohyb kolem osy, která je rovnoběžná se směrem magnetického pole (*obr. 35.3*). Zeptejme se: Jak lze změnit úhel sklonu klasického setrvačnicku vůči poli, konkrétně vůči směru osy z ? Magnetické pole působí momentem síly ve směru *vodorovné osy*. Zdálo by se, že tento moment síly *usiluje* o nasměrování magnetu do směru pole; způsobuje však jen precesi. Chceme-li změnit úhel sklonu setrvačnicku vzhledem k ose z , musíme

působit momentem síly *ve směru osy z*. Působíme-li momentem síly, který má stejný směr jako precese, úhel setrvačníku se změní a o málo se zmenší i průmět J do osy z . Na obr. 35.3. by se úhel mezi J a osou z zvětšil. Kdybychom precesi přibrzdili, J by se pohnulo směrem ke svislé ose.



Obr. 35.3 Klasická precese atomu s magnetickým momentem μ a momentem hybnosti J

Jak ale můžeme vytvořit potřebný moment síly v našem případě atomu precedujícího v homogenním magnetickém poli? Lze to udělat pomocí slabého magnetického pole působícího ze strany. Možná, že se vám bude nejdříve zdát, že směr tohoto magnetického pole by se měl otáčet současně s precesí magnetického momentu, jak to naznačuje pole B' na obr. 35.4a. Takové pole skutečně vyhovuje, ale docela dobré je i *proměnné* horizontální pole. Působíme-li slabým horizontálním polem B' , které má stále směr (kladné nebo záporné) osy x a osciluje s frekvencí ω_p , pak se v každé poloperiodě směr momentu síly, který působí na magnetický moment, obrátí a výsledkem je souhrnný efekt, téměř stejně účinný jako rotující magnetické pole. Podle klasického obrazu bychom tedy očekávali, že se průmět magnetického momentu do osy z změní, budeme-li působit velmi slabým magnetickým polem s frekvencí rovnou přesně ω_p . Samozřejmě, klasicky se μ_z bude měnit spojitě, ale v kvantové mechanice se složka ve směru osy z magnetického momentu spojitě přizpůsobovat nemůže. Musí náhle přeskočit od jedné hodnoty k druhé. Porovnání mezi důsledky klasické a kvantové mechaniky jsme tu ukázali proto, abychom vám dali klíč k tomu, co by se mělo dít klasicky a jak to souvisí s tím, co se opravdu děje v kvantové mechanice. Jistě si mimochodem všimnete, že očekávaná rezonanční frekvence je v obou případech stejná.



Obr. 35.4 Úhel precese atomového magnetu je možné změnit pomocí horizontálního magnetického pole, které buď rotuje společně s μ (a), nebo osciluje (b)

Ještě jedna poznámka: Z toho, co jsme dosud řekli o kvantové mechanice, nevyplývá žádný zjevný důvod, proč by nemohli existovat i přechody při frekvenci $2\omega_p$. Shodou okolností to však

nemá žádný analog v klasickém případě a nestává se to ani v kvantové teorii – přinejmenším při popsaném způsobu indukování přechodů. V oscilujícím horizontálním magnetickém poli je pravděpodobnost, že frekvence $2\omega_p$ způsobí najednou přeskok o dva kroky, nulová. Pouze při frekvenci ω_p se přechody dějí, ať už nahoru nebo dolů.

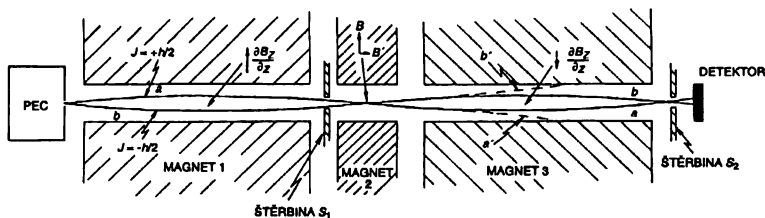
Nyní už můžeme popsat Rabiho metodu měření magnetických momentů. Všimněme si pouze toho, jak funguje v případě atomů se spinem $1/2$. Náčrt zařízení je znázorněn na obr. 35.5. Na začátku je pec, která emituje proud neutrálních atomů, který pak prochází třemi magnety za sebou. Magnet 1 je stejný jako na obr. 35.2 a vytváří pole s velkým gradientem; např. nechť je $\partial B_z / \partial z$ kladné. Mají-li atomy magnetický moment, vychýlí se dolů, je-li $J_z = \hbar/2$, nebo nahoru, je-li $J_z = -\hbar/2$ (jelikož μ má v případě elektronů opačný směr než J). Soustředíme-li se pouze na ty atomy, které mohou projít štěrbinou S_1 , přicházejí v úvahu jen dvě možné trajektorie (obr. 35.5). Mají-li atomy s $J_z = \hbar/2$ projít štěrbinou, musí se pohybovat po křivce a ; atomy s $J_z = -\hbar/2$ po křivce b . Atomy, které vyjdou z pece po jiné trajektorii, štěrbinou neprojdou.

V magnetu 2 je homogenní pole. Na atomy v této oblasti nepůsobí žádné síly, takže projdou po přímce do magnetu 3. Magnet 3 je stejný jako magnet 1, jen pole je *převráceno*, takže $\partial B_z / \partial z$ má opačné znaménko. Atomy s $J_z = \hbar/2$ (řekněme se spinem nahoru), které se vychylovaly dolů v magnetu 1, jsou směřovány *nahoru* v magnetu 3; pokračují po trajektorii a štěrbinou S_2 k detektoru. Na atomy s $J_z = -\hbar/2$ (spinem dolů) také působí v magnetech 1 a 3 opačné síly a tyto atomy se pohybují po trajektorii b , která je přivede štěrbinou S_2 k detektoru.

Detektor lze sestavit různými způsoby, které závisí na atomu, jehož magnetický moment měříme. Například v případě atomů alkalických kovů, jakým je sodík, může být detektorem tenký rozžhavený wolframový vodič připojený k citlivému ampérmetru. Přistanou-li atomy sodíku na vodiči, vypaří se ve formě iontů Na^+ , přičemž po nich zůstane elektron. Proud ve vodiči je úměrný počtu atomů sodíku, které na něj dopadnou.

V mezeře magnetu 2 je řada cívek, které vytvářejí slabé horizontální magnetické pole B' . Cívky jsou napájeny proudem, který osciluje s měnitelnou úhlovou frekvencí ω . Mezi póly magnetu 2 tedy existuje jednak silné konstantní vertikální pole B_0 , jednak slabé horizontální pole B' .

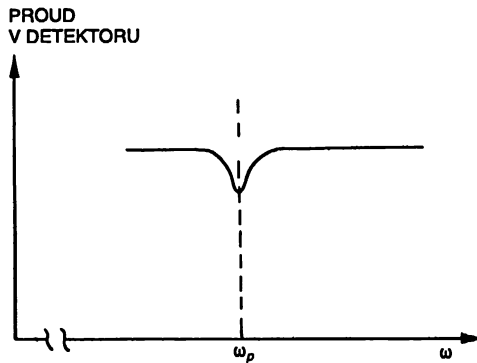
Nechť je nyní frekvence oscilujícího pole zvolena právě jako ω_p – frekvence precese atomů v poli B . Sřídavé pole způsobí přechod některých atomů ze stavu s jednou hodnotou J_z do stavu s druhou hodnotou. Atom, jehož spin původně směřoval nahoru ($J_z = \hbar/2$), může přeskočit dolů ($J_z = -\hbar/2$). Jelikož se směr magnetického momentu obrátil, bude v magnetu 3 cítit sílu působící směrem *dolů* a bude se pohybovat po dráze a' (obr. 35.5). Nepodaří se mu projít štěrbinou S_2 k detektoru. Podobně některé atomy původně se spinem dole ($J_z = -\hbar/2$) při průchodu magnetem 2 převrátí svůj spin nahoru ($J_z = +\hbar/2$). Půjdou po dráze b' a nedostanou se k detektoru.



Obr. 35.5 Zařízení pro Rabiho metodu molekulového svazku

Jestliže se frekvence oscilujícího pole B' podstatně liší od ω_p , nepůsobí žádné změny spinů a atomy projdou po svých trajektoriích nerušeně k detektoru. Frekvenci precese atomů v poli

B_0 proto můžete najít, budete-li frekvenci ω pole B' měnit, dokud nedojde k poklesu proudu atomů, které dopadají na detektor. Pokles proudu se objeví, když je frekvence ω „v rezonanci“ s ω_p . Graf závislosti proudu v detektoru jako funkce ω by mohl vypadat podobně jako na obr. 35.6. Známe-li ω_p , snadno vypočteme faktor g atomu.



Obr. 35.6 Proud atomů ve svazku poklesne při $\omega = \omega_p$

Takové experimenty s rezonancí atomového nebo, jak se obvykle říká, *molekulového* svazku jsou krásnou a jemnou metodou měření magnetických momentů atomů. Rezonanční frekvenci ω_p lze určit s velkou přesností – ve skutečnosti s větší přesností, než je přesnost měření magnetické indukce B_0 , jejíž velikost potřebujeme znát při výpočtu g .

35.4 PARAMAGNETIZMUS MAKROSKOPICKÝCH LÁTEK

Nyní popíšeme jev paramagnetizmu v makroskopických látkách. Vezměme látku, jejíž atomy mají permanentní magnetické momenty, např. krystalický síran měďnatý. V krystalu se nacházejí ionty mědi, jejichž vnitřní elektronové obaly mají určitý celkový moment hybnosti a celkový magnetický moment. Ion mědi má tedy určitý permanentní magnetický moment. Povězme si několik slov o tom, které atomy mají magnetický moment a které nikoliv. Každý atom (např. sodíku), který obsahuje *lichý* počet elektronů, bude mít magnetický moment. Sodík má jeden elektron ve svém nezaplňném obalu. Tento elektron dává atomu spin a magnetický moment. Obvykle se však při vzniku sloučenin nadbytečné elektrony ve vnějším obalu vážou na jiné elektrony, jejichž spiny mají přesně opačný směr, a momenty hybnosti a magnetické momenty valenčních elektronů se obvykle ruší. Proto molekuly obecně nemají magnetické momenty. Samozřejmě, v plynu atomů sodíku k takovému zrušení nedochází.⁴³⁾ Podobně, vyskytne-li se (v řeči chemie) volný radikál, objekt s lichým počtem valenčních elektronů, nejsou vazby nasyceny a výsledný moment hybnosti není nulový.

Ve většině makroskopických látek se objevuje výsledný nenulový magnetický moment pouze tehdy, obsahují-li atomy, které nemají *vnitřní* elektronový obal zaplněn. Pak může existovat výsledný moment hybnosti i magnetický moment. Takové atomy se nacházejí mezi přechodovými prvky periodické tabulky, jako jsou například chrom, mangan, železo, nikl, kobalt, paladium

⁴⁴⁾ Normální páry Na jsou převážně jednoatomové, ačkoliv se vyskytují i molekuly Na_2

a platina. Nezaplněné vnitřní obaly a permanentní magnetické momenty mají také všechny prvky, které patří mezi vzácné zeminy. Kromě toho i několik jiných divných látek má magnetické momenty, např. kapalný kyslík, zde však ponecháme vysvětlení příčiny kolegům chemikům.

Představme si nádobu naplněnou atomy nebo molekulami s permanentními momenty, řekněme nějaký plyn, kapalinu nebo krystal. Rádi bychom věděli, co se stane, zapneme-li vnější magnetické pole. *Bez* magnetického pole do sebe atomy při tepelném pohybu narážejí a jejich momenty směřují všemi možnými směry. Působí-li však magnetické pole, snaží se malé magnety nasměrovat do jeho směru; víc momentů má směr s polem shodný než opačný. Látka se magnetizuje.

Magnetizaci M látky definujeme jako celkový magnetický moment v jednotce objemu, tj. vektorový součet všech atomových magnetických momentů v jednotce objemu. Vyskytuje-li se v jednotce objemu N atomů a jejich *střední* magnetický moment je $\langle \mu \rangle$, je možné psát M jako N krát střední magnetický moment:

$$M = N \langle \mu \rangle. \quad (35.8)$$

Uvedená definice M je ve shodě s definicí elektrické polarizace P v kapitole 10.

Klasická teorie paramagnetizmu je podobná teorii dielektrické permitivity, kterou jsme probrali v kapitole 11. Předpokládá se, že každý z atomů má magnetický moment μ , který má konstantní velikost, ale může být orientován libovolným směrem. V poli B je magnetická energie $-\mu \cdot B = -\mu B \cos \vartheta$, kde ϑ je úhel mezi směrem momentu a pole. Podle statistické mechaniky je relativní pravděpodobnost některé hodnoty úhlu ϑ úměrná $e^{-\text{energie}/kT}$, takže úhly blízké nule jsou pravděpodobnější než úhly blízké π . Budeme-li postupovat zcela stejně jako v článku 11.3, zjistíme, že ve slabých magnetických polích je M rovnoběžné s B a má velikost

$$M = \frac{N \mu^2 B}{3 k T}. \quad (35.9)$$

(viz vztah (11.20)). Tento přibližný vztah platí jen pro $\mu B/kT$ mnohem menší než 1.

Indukovaná magnetizace (magnetický moment v jednotce objemu) je, jak jsme zjistili, úměrná magnetickému poli. Právě to je jev paramagnetizmu. Vidíte, že efekt je silnější při nižších teplotách a slabne při vyšších teplotách. Vložíme-li látku do slabého magnetického pole, vznikne v ní magnetický moment úměrný velikosti pole. Poměr M ku B (ve slabém poli) se nazývá magnetická *susceptibilita*.

Nyní se podívejme na paramagnetismus z hlediska kvantové mechaniky. Nejdříve si všimněme případu atomů se spinem $1/2$. Bez magnetického pole mají atomy určitou energii, v magnetickém poli jsou však možné dvě hodnoty, ke každé hodnotě J_z jedna. Při $J_z = +\hbar/2$ se pod vlivem magnetického pole energie změní o hodnotu

$$\Delta W_1 = +g \left(\frac{q_e \hbar}{2 m} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot B. \quad (35.10)$$

(Energetický posun ΔU je v tomto případě kladný, neboť náboj elektronu je záporný.) Při $J_z = -\hbar/2$ se energie změní o

$$\Delta W_2 = -g \left(\frac{q_e \hbar}{2 m} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot B. \quad (35.11)$$

Pro zkrácení zápisu označme

$$\mu_0 = g \left(\frac{q_e \hbar}{2m} \right) \cdot \frac{1}{2}, \quad (35.12)$$

pak

$$\Delta W = \pm \mu_0 B. \quad (35.13)$$

Význam μ_0 je zřejmý: $-\mu_0$ je složka z magnetického momentu v případě spinu nahoru, $+\mu_0$ zase složka z magnetického momentu v případě spinu dolů.

Statistická mechanika nám říká, že pravděpodobnost, že se atom nachází v některém stavu, je úměrná

$$e^{-(\text{energie stavu})/kT}.$$

Bez magnetického pole mají oba stavy stejnou energii; proto po ustálení rovnováhy v magnetickém poli jsou pravděpodobnosti úměrné

$$e^{-\Delta W/kT}. \quad (35.14)$$

Počet atomů v jednotce objemu se spinem nahoru je

$$N_{\text{nahoru}} = a e^{-\mu_0 B/kT} \quad (35.15)$$

a počet se spinem dolů je

$$N_{\text{dolů}} = a e^{+\mu_0 B/kT}. \quad (35.16)$$

Konstanta a je určena z podmínky

$$N_{\text{nahoru}} + N_{\text{dolů}} = N. \quad (35.17)$$

N je počet atomů v jednotce objemu. Tak nám vyjde

$$a = \frac{N}{e^{+\mu_0 B/kT} + e^{-\mu_0 B/kT}}. \quad (35.18)$$

Nás zajímá střední magnetický moment ve směru osy z . Atomy se spinem nahoru přispějí momentem $-\mu_0$, ty, co mají spin orientován dolů, budou mít moment $+\mu_0$: střední moment tedy je

$$\langle \mu \rangle_{\text{str}} = \frac{N_{\text{nahoru}} (-\mu_0) + N_{\text{dolů}} (+\mu_0)}{N}. \quad (35.19)$$

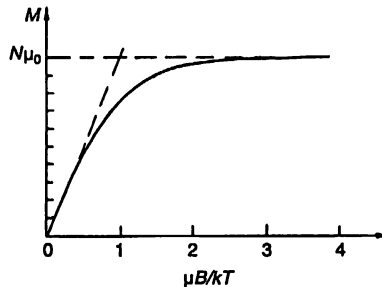
Magnetický moment M v jednotce objemu je pak roven $N \langle \mu \rangle$. Pomocí rovnic (35.15), (35.16) a (35.17) zjistíme, že

$$M = N \mu_0 \frac{e^{+\mu_0 B/kT} - e^{-\mu_0 B/kT}}{e^{+\mu_0 B/kT} + e^{-\mu_0 B/kT}}. \quad (35.19)$$

To je kvantově mechanický vztah pro M v případě atomů se spinem $j = 1/2$. Shodou okolností lze tento vztah zapsat i v trochu kompaktnějším tvaru pomocí hyperbolické tangenty:

$$M = N\mu_0 \operatorname{tgh} \frac{\mu_0 B}{kT}. \quad (35.21)$$

Graf M v závislosti na B znázorňuje obr. 35.7. Je-li B velmi velké, blíží se hyperbolický tangens k 1 a M se blíží k hraniční hodnotě $N\mu_0$. Říkáme, že v silných polích se magnetizace *saturuje*. Vysvětlení je očividné; v dostatečně silném poli jsou všechny magnety orientovány stejným směrem. Jinými slovy, všechny atomy jsou ve stavu se spinem dolů a každý přispívá magnetickým momentem μ_0 .



Obr. 35.7 Změny paramagnetické magnetizace v závislosti na magnetické indukci B

Ve většině běžných situací, v případě typických momentů, při pokojové teplotě a v polích, která lze normálně získat (řekněme 1 T), je poměr $\mu_0 B / kT$ přibližně 0,02. Saturaci lze pozorovat jen při velmi nízkých teplotách. Při normálních teplotách můžeme obvykle nahradit $\operatorname{tgh} x$ hodnotou x a zapsat

$$M = \frac{N\mu_0^2 B}{kT}. \quad (35.22)$$

Stejně jako v klasické teorii je M úměrné B . Ve skutečnosti je tento vztah téměř úplně stejný, ale zdá se, že chybí faktor $1/3$. Ještě však musíme dát do souvislosti μ_0 , které vystupuje v našem kvantovém vztahu, s μ , které je v klasickém výsledku (viz vztah (35.9)).

V klasickém vzorci vystupuje $\mu^2 = \mu \cdot \mu$, druhá mocnina vektoru magnetického momentu, nebo

$$\mu \cdot \mu = \left(g \frac{q_e}{2m} \right)^2 J \cdot J. \quad (35.23)$$

V předcházející kapitole jsme viděli, že správný výsledek lze s velkou pravděpodobností najít na základě klasického výpočtu, nahradíme-li $J \cdot J$ výrazem $j(j+1)\hbar^2$. V našem konkrétním příkladu $j = 1/2$

$$j(j+1)\hbar^2 = \frac{3}{4}\hbar^2.$$

Dosadíme-li toto za $J \cdot J$ do vztahu (35.23), dostaneme

$$\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\mu} = \left(g \frac{q_e}{2m} \right)^2 \frac{3 \hbar^2}{4}$$

resp. pomocí μ_0 , definovaného vztahem (35.12),

$$\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\mu} = 3 \mu_0^2.$$

Dosadíme-li tento výraz místo μ^2 do klasického vzorce (35.9), opravdu dostaneme správný kvantový výraz (35.22).

Kvantovou teorii paramagnetizmu lze snadno rozšířit pro případ atomů s libovolným spinem. Magnetizace ve slabém poli je

$$M = N g^2 \frac{j(j+1)}{3} \frac{\mu_B^2 B}{kT}, \quad (35.24)$$

přičemž

$$\mu_B = \frac{q_e \hbar}{2m} \quad (35.25)$$

je kombinací základních konstant, která má rozměr magnetického momentu. Momenty většiny atomů mají přibližně tuto velikost. μ_B se nazývá *Bohrův magneton*. Spinový magnetický moment elektronu je téměř přesně roven jednomu Bohrovu magnetonu.

35.5 CHLAZENÍ POMOCÍ ADIABATICKÉ DEMAGNETIZACE

Existuje velmi zajímavý příklad konkrétního využití paramagnetizmu. Při velmi nízkých teplotách v silném magnetickém poli lze nasměrovat magnetické momenty ve vzorku do jednoho směru. Pomocí *adiabatické demagnetizace* pak lze dosáhnout *extrémně* nízkých teplot. Vezměme si nějakou paramagnetickou sůl (např. takovou, která obsahuje množství atomů vzácných zemin, jako je dusičnan amonno-praseodymitý), a napřed ji pomocí kapalného helia ochladíme v silném magnetickém poli na 1 nebo 2 K. Faktor μ_B/kT je v tom případě větší než 1, řekněme asi 2 nebo 3. Většina spinů má stejný směr a magnetizace je téměř saturovaná. Abychom zjednodušili diskuzi, dohodněme se, že pole je velmi silné a teplota velmi nízká, takže skoro všechny spiny atomů mají stejný směr. Potom sůl tepelně izolujeme (např. odstraníme kapalné helium a umístíme sůl do dobrého vakua) a vypneme magnetické pole. Teplota soli klesne.

Kdybychom pole vypnuli rychle, kmitání a srážky atomů v krystalické mřížce by postupně zrušily pravidelné uspořádání spinů. Některé by směřovaly nahoru, jiné dolů. Neexistuje-li však pole (a zanedbáváme-li vzájemné působení mezi atomovými magnety, které vyžaduje jen malou opravu), na překlápění atomových magnetů není třeba žádná energie. Spiny se rozdělí náhodně bez změny energie, a nedojde proto k žádné změně teploty.

Předpokládejme však, že zatímco se atomové magnety překlápí v důsledku tepelného pohybu, stále ještě existuje nenulové magnetické pole. Pak je na převrácení spinu do směru proti poli potřebná určitá práce – je nutné *překonávat vliv pole*. Tím se odebírá energie tepelnému pohybu a teplota se snižuje. Nevypneme-li tedy silné magnetické pole příliš rychle, teplota soli poklesne –

ochladí se v důsledku demagnetizace. Z kvantově mechanického pohledu vypadá proces takto: V silném poli jsou všechny atomy v nejnižším stavu, protože pravděpodobnost, že budou ve vyšším stavu, je nepředstavitelně malá. Když se však pole zmenšuje, je stále pravděpodobnější, že tepelné fluktuace uvedou atom do vyššího stavu. Pokud se to stane, atom absorbuje energii $\Delta W = \mu_0 B$. Vypíná-li se pole pomalu, magnetické přeskoky odebírají energii tepelným kmitům krystalu, čímž se krystal ochlazuje. Tímto způsobem lze snížit teplotu z několika kelvinů až na několik tisíc kelvinů.

Chcete vytvořit něco ještě chladnějšího? Příroda nám takovou možnost dala. Už jsme hovořili o tom, že i atomová jádra mají magnetické momenty. Naše vztahy pro paramagnetizmus platí stejně i pro jádra, ale magnetické momenty jader jsou přibližně *tisíckrát menší*. (Jsou řádu $q\hbar/2m_p$, kde m_p je hmotnost protonu, takže jsou menší tolikrát, kolikrát menší je hmotnost elektronu než protonu.) Pro takové magnetické momenty je faktor $\mu B/kT$ i při teplotě 2 K pouze několik tisíc. Pokud se však pomocí paramagnetické demagnetizace dostaneme až k teplotě několik tisíc kelvinů, $\mu B/kT$ se zvětší a je přibližně 1; při tak nízkých teplotách začíná saturace jaderných magnetických momentů. To je příznivá okolnost, neboť nyní můžeme využít adiabatickou demagnetizaci *jaderného* magnetizmu na další snížení teploty. Magnetické chlazení lze tedy uskutečnit ve dvou etapách. Nejdříve využijeme adiabatickou demagnetizaci paramagnetických iontů na dosažení teploty několik tisíc kelvinů. Pak pomocí paramagnetické soli ochladíme jinou látku, která má silný jaderný magnetizmus. Nakonec když vypneme magnetické pole, v němž se tato látka nacházela, poklesne teplota až k miliontině kelvinu, samozřejmě, pokud jsme vše uskutečnili velmi pozorně.

35.6 JADERNÁ MAGNETICKÁ REZONANCE

Už jsme řekli, že atomový paramagnetizmus je velmi slabý a jaderný magnetizmus je ještě tisíckrát slabší. Naproti tomu lze jaderný magnetizmus poměrně snadno pozorovat na základě jevu *jaderné magnetické rezonance*. Vezměme nějakou látku, v níž se všechny spiny elektronů zcela kompenzují, takže výsledný magnetický moment je nulový. Taková je třeba voda. Molekuly však mají velmi malý, maličký moment, který je důsledkem magnetických momentů jader vodíku. Vložme malý vzorek vody do magnetického pole B . Jelikož protony (ve vodíku) nesou spin $1/2$, budou moci existovat ve dvou energetických stavech. Je-li voda v tepelné rovnováze, nachází se o trochu více protonů v nižších energetických stavech, v nichž jsou jejich momenty rovnoběžné s polem. V každé jednotce objemu existuje malý výsledný magnetický moment. Jelikož je magnetický moment protonu jen asi tisícinou atomového momentu, magnetizace, která je úměrná podle vztahu (35.22) μ^2 , je jen miliontinou magnetizace při typickém atomovém paramagnetizmu. (To je právě důvod, proč musíme vybrat látku bez atomového magnetizmu.) Pokud si to spočítáte, zjistíte, že rozdíl mezi počtem protonů se spinem nahoru a se spinem dolů je stomiliontinou celkového počtu protonů, takže efekt je skutečně velmi malý! Lze ho však pozorovat následujícím způsobem:

Obklopte vzorek s vodou malou cívku, která vytváří slabé horizontální oscilující magnetické pole. Osciluje-li pole s frekvencí ω_p , způsobuje přechody mezi dvěma energetickými stavy stejně jako v Rabiho experimentu, který jsme popsali před chvílí v článku 35.3. Přeskočí-li proton z vyššího energetického stavu do nižšího, odevzdá energii $\mu_z B$, což je, jak víme, rovno právě $\hbar\omega_p$. Přeskočí-li z nižšího energetického stavu do vyššího, *pohltní* z cívky energii $\hbar\omega_p$. Protože se v nižším stavu nachází o trochu více protonů než ve vyšším, bude výsledkem *absorpce* energie z cívky. Ačkoliv je tento efekt velmi slabý, lze slabou absorpci energie přece zachytit pomocí citlivého elektronického zesilovače.

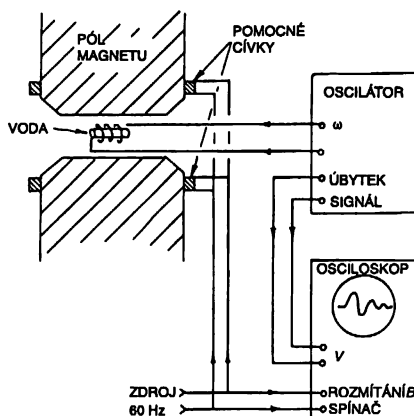
Podobně jako v Rabiho experimentu s molekulovým svazkem lze absorpci energie pozorovat jen tehdy, když je oscilující pole v rezonanci, tj. je-li

$$\omega = \omega_p = g \left(\frac{q_e}{2 m_p} \right) B.$$

Často je vhodnější hledat rezonanci změnou pole B při konstantním ω . Absorpce energie se objeví při

$$B = \frac{2 m_p}{g q_e} \omega.$$

Typické zařízení pro jadernou magnetickou rezonanci je znázorněno na *obr. 35.8*. Oscilátor s vysokou frekvencí napájí malou cívku, která je umístěna mezi póly velkého elektromagnetu. Dvě malé pomocné cívky kolem pólů magnetu jsou napájeny proudem s frekvencí 60 Hz, takže magnetické pole kolísá trochu kolem své střední hodnoty. Nechť například hlavní proud v magnetu vytváří pole 0,5 T a pomocné cívky necht' způsobují změny pole o $\pm 0,0001$ T kolem střední hodnoty. Zvolíme-li frekvenci oscilátoru 21,2 MHz, dojde k protonové rezonanci pokaždé, když pole přejde přes 0,5 T. Vyjde to z rovnice (34.13) s hodnotou $g = 5,58$ pro proton.



Obr. 35.8 Zařízení pro jadernou magnetickou rezonanci

Obvod oscilátoru je sestaven tak, že vytváří dodatečný výstupní signál, který je úměrný jakékoliv změně množství energie, kterou absorbuje oscilátor. Tento signál napájí zesilovač svislé výchylky osciloskopu. Horizontální vychylování osciloskopu se spouští jednou po dobu každého cyklu změny pole. (Obvykle se horizontální výchylka volí tak, aby byla úměrná změnám pole.)

Dříve než vložíme vzorek s vodou do vysokofrekvenční cívky, má přřekos oscilátoru jistou hodnotu. (Tato hodnota nezávisí na magnetickém poli.) Vložíme-li nádobku s vodou do cívky, objeví se na osciloskopu signál podobný tomu na obrázku. Vidíme před sebou zobrazení energie, která je absorbována při přeskocích protonů!

Ve skutečnosti není snadné nastavit hlavní magnet přesně na 0,5 T. Proto se to dělá tak, že proud v hlavním magnetu se mění do té doby, dokud se na osciloskopu neobjeví rezonanční signál. Ukazuje se, že je to zatím nejpohodlnější metoda přesného měření intenzity magnetického

pole. Samozřejmě, kdysi *kdosi* musel přesně změřit magnetické pole a frekvenci aby určil hodnotu faktoru g protonu. Když už se to jednou podařilo, lze nyní protonové rezonanční zařízení podobného typu jako na obrázku používat jako „protonový rezonanční magnetometr“.

Několik slov je třeba říci o tvaru signálu. Kdybychom měnili magnetické pole pomalu, čekali bychom, že uvidíme normální rezonanční křivku. Pohlcování energie by dosáhlo maxima, kdyby se ω_p přesně rovnalo rezonanční frekvenci. Absorpce by existovala i při blízkých frekvencích, neboť ne všechny protony se nacházejí v přesně stejném poli, a jiné pole znamená trochu jinou rezonanční frekvenci.

Lze se však mimochodem zeptat, zda při rezonanční frekvenci vůbec nějaký signál uvidíme. Nelze očekávat, že pole s vysokou frekvencí způsobí stejné obsazení obou stavů, takže signál se objeví jen tehdy, když poprvé vložíme vzorek s vodou do pole? Přesně tak to není, neboť ačkoliv se *snažíme* vyrovnat obsazení hladin, tepelný pohyb se naopak snaží udržet je ve správném poměru, který přísluší dané teplotě T . Nacházíme-li se v okolí rezonance, je energie absorbovaná jádru stejná jako ztráty v důsledku tepelného pohybu. Tepelný kontakt mezi magnetickými momenty protonů a pohybem atomů je však relativně malý. Protony jsou relativně izolovány uprostřed svých elektronových oblaků. V čisté vodě je proto rezonanční signál obvykle příliš slabý na to, aby byl pozorován. Ke zvýšení absorpce je třeba zvýšit tepelný kontakt. Toho lze obvykle dosáhnout, přidáme-li do vody trochu oxidu železa. Atomy železa se chovají jako malé magnety a při svém tepelném tanci, způsobují malé změny magnetického pole kolem protonů. Tato proměnná pole „vážou“ magnetické momenty protonů s kmity atomů a snaží se ustálit tepelnou rovnováhu. V důsledku této „vazby“ se protony ve vyšších energetických stavech dokáží zbavit své energie, aby mohly znovu absorbovat energii z oscilátoru.

Ve skutečnosti není výstupní signál z jaderného rezonančního zařízení podobný obyčejné rezonanční křivce. Obvykle je to složitější signál s oscilacemi, něco podobného jako na *obr. 35.8*. Takový signál se objeví v důsledku měnících se polí. Vysvětlení by bylo třeba podat v jazyce kvantové mechaniky, lze však dokázat, že v těchto experimentech vede klasická představa precedujících momentů vždy ke správné odpovědi. V termínech klasické fyziky můžeme říci, že v okolí rezonancí začínáme synchronně pohánět množství precedujících magnetických momentů. Nutíme je vykonávat precesní pohyb *společně*. Při společném otáčení však jaderné magnety v cívice oscilátoru vytvoří indukované elektromotorické napětí s frekvencí ω_p . Jelikož však magnetické pole s časem roste, roste i frekvence precese a indukované napětí má zanedlouho o trochu vyšší frekvenci než oscilátor. Jelikož je indukované napětí střídavé ve fázi, resp. protifázi s oscilátorem, je „absorbovaná“ energie střídavě kladná nebo záporná. Na oscilátoru proto vidíme záznam rázů mezi frekvencí protonu a frekvencí oscilátoru. Protože frekvence protonů nejsou všechny stejné (pro různé protony se nachází v maličko odlišných polích) a možná i v důsledku poruch způsobených ve vodě atomy železa, volně precedující momenty za chvíli vyjdou z fáze a rázový signál vymizí.

Jevy magnetické rezonance se používají různým způsobem jako metoda k hledání nových vlastností látek, speciálně v chemii a jaderné fyzice. Není nutné zvlášť zdůrazňovat, že číselné hodnoty magnetických momentů jader nám cosi říkají o jejich struktuře. I v chemii se lidé mnoho dozvěděli ze struktury (resp. tvaru) rezonančních křivek. V důsledku magnetických polí, která vytvářejí sousední jádra, je přesná poloha jaderné rezonance trochu posunuta v závislosti na tom, v jakém prostředí se dané jádro nachází. Měření těchto posunů napomáhá určit, které atomy se nacházejí blízko sebe, a tedy i osvětlit detaily molekulové struktury. Ačkoliv se obvykle po ustálení rovnováhy nevyskytují, jsou volné radikály časté v mezistavech chemických reakcí. Měření elektronové spinové rezonance je citlivým indikátorem přítomnosti volných radikálů a je často klíčem k pochopení mechanismu některých chemických reakcí.

PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 35.1 ■ V cyklotronu určeném pro dosahování nízkých energií je perioda oběhu protonů po kruhové dráze $0,13 \mu\text{s}$. Jademá magnetická rezonance u protonu v magnetickém poli cyklotronu nastává při frekvenci 21 MHz. Určete odtud Landeův faktor g protonu.
- 35.2 ■ Odvodte vzorec (35.9) postupem ukázaným v kapitole 35. Není toto odvození v rozporu s tvrzením v kapitole 34 o tom, že v rámci klasické fyziky paramagnetismus neexistuje?
- 35.3 ■ V 1 cm^3 paramagnetické soli je obsaženo 10^{22} atomů, z nichž každý má magnetický moment rovný 1 Bohrovu magnetonu. Umístíme sůl do homogenního magnetického pole o indukci 1 T. Vyjádřete v procentech podíl spinů orientovaných rovnoběžně s polem při pokojové teplotě a teplotě kapalného helia.
- 35.4 ■ Postupem analogickým použitému v kapitole 35 pro spin $1/2$ najděte kvantově mechanický výraz pro paramagnetickou susceptibilitu částic se spinem 1.

Feromagnetismus

36.1 MAGNETIZAČNÍ PROUDY

36.2 POLE H

36.3 MAGNETIZAČNÍ KŘIVKA

36.4 INDUKČNOST OCELOVÝCH JADER

36.5 ELEKTROMAGNETY

36.6 SPONTÁNNÍ MAGNETIZACE

Přečtěte si znovu: kapitolu 10, Dielektrika
kapitolu 17, Zákony indukce

36.1 MAGNETIZAČNÍ PROUDY

V této kapitole pohovoříme o některých látkách, v nichž je výsledný účinek magnetických momentů mnohem silnější než v případě paramagnetismu nebo diamagnetismu. Takový jev se nazývá *feromagnetismus*. V paramagnetických nebo diamagnetických látkách jsou obvykle indukované magnetické momenty natolik malé, že se nemusíme vůbec zajímat o dodatečná pole, která magnetické momenty vytvářejí. Ve *feromagnetických* látkách jsou však magnetické momenty, indukované přiloženými magnetickými poli, velmi velké a silně ovlivňují samotná pole. Ve skutečnosti jsou indukované momenty natolik silné, že jejich účinky často v pozorovaných polích převládají. Proto se budeme muset trochu věnovat matematické teorii velkých indukovaných magnetických momentů. Samozřejmě, je to čistě technický problém. Skutečný problém je vysvětlit, proč jsou magnetické momenty tak velké a jak to jde všechno dohromady. Za chvíli se k této otázce dostaneme.

Najít magnetická pole ve feromagnetických látkách připomíná problém, jak najít elektrostatická pole v přítomnosti dielektrik. Možná, že si vzpomínáte, že vnitřní vlastnosti dielektrik jsme nejdříve popisovali pomocí vektorového pole P , dipólového momentu v jednotce objemu. Pak jsme vypočítali, že účinky polarizace jsou ekvivalentní vlivu hustoty náboje ρ_{pol} , která je určena divergencí P .

$$\rho_{\text{pol}} = -\nabla \cdot P. \quad (36.1)$$

Celkový náboj lze v každé situaci napsat jako součet polarizačního náboje a ostatních nábojů, jejichž hustotu označíme⁴⁵⁾ ρ_{ost} . Maxwellovy rovnice, které dávají do souvislosti divergenci \mathbf{E} a hustotu náboje, pak jsou

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{\text{pol}} + \rho_{\text{ost}}}{\epsilon_0}$$

resp.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0} + \frac{\rho_{\text{ost}}}{\epsilon_0}.$$

Polarizační část náboje můžeme přenést na druhou stranu rovnice, čímž dostaneme výsledný vztah

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_{\text{ost}}. \quad (36.2)$$

Tento nový zákon nám říká, že divergence veličiny $(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})$ je rovna hustotě ostatních nábojů.

Spojit \mathbf{E} a \mathbf{P} jako ve vztahu (36.2) je však užitečné zřejmě jen tehdy, známe-li jejich vzájemný vztah. Viděli jsme, že teorie, která klade do souvislosti indukovaný elektrický dipólový moment a elektrické pole, je poměrně složitá a lze ji použít pouze v jistých jednoduchých situacích, a i tehdy představuje jen přiblížení. Připomeneme si jedno z přiblížení. K výpočtu indukovaného dipólového momentu atomu uvnitř dielektrika potřebujeme znát elektrické pole, které působí na každý atom. Použili jsme přiblížení (v mnoha případech docela oprávněné), že pole, které na atom působí, je stejné jako pole, které působí ve středu dutiny, která zůstane po atomu, pokud jej z látky vyjme a přitom nezměníme dipólové momenty sousedních atomů. Jistě si také vzpomenete, že elektrické pole v dutině v polarizovaném dielektriku závisí na jejím tvaru. Naše dřívější výsledky shrnuje *obr. 36.1*. V tenké, diskovité dutině, která je kolmá na směr polarizace, je elektrické pole dáno výrazem

$$\mathbf{E}_{\text{dutina}} = \mathbf{E}_{\text{dielektrikum}} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0},$$

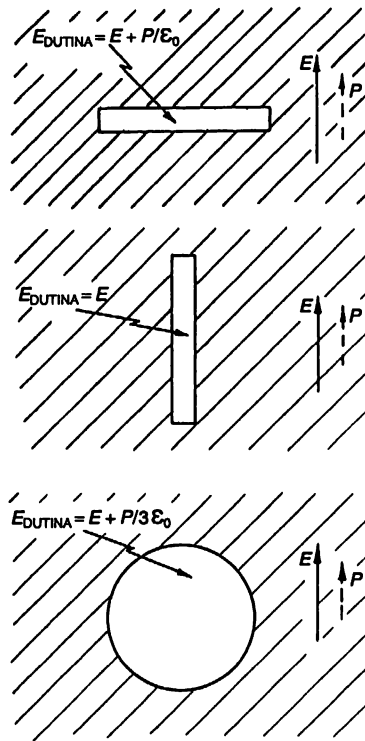
což jsme dokázali pomocí Gaussova zákona. Naopak v případě jehlovité dutiny rovnoběžné s polarizací jsme (pomocí toho, že rotace \mathbf{E} je nulová) dokázali, že elektrické pole uvnitř a mimo dutinu je stejné. Konečně v kulové dutině jsme našli elektrické pole, jehož velikost leží v jedné třetině mezi polem jehlovité dutiny a disku:

$$\mathbf{E}_{\text{dutina}} = \mathbf{E}_{\text{dielektrikum}} + \frac{1}{3} \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \quad (\text{kulová dutina}). \quad (36.3)$$

Právě takové pole jsme použili v úvahách o tom, co se děje s atomem uvnitř dielektrika.

Nyní prodiskutujeme analogický případ pro magnetizmus. Jednoduchý a přímočarý způsob je prohlásit, že \mathbf{M} , magnetický moment v jednotce objemu, je analogický s \mathbf{P} , s elektrickým dipólovým momentem v jednotce objemu, a že proto divergence \mathbf{M} je ekvivalentní s „hustotou magnetického náboje“ ρ_m – ať už je to cokoliv.

⁴⁵⁾ Kdyby se všechny náboje nacházely na vodičích, bylo by ρ_{ost} rovno ρ_{vol} , z kapitoly 10.



Obr. 36.1 Elektrické pole v dutině v dielektriku závisí na tvaru dutiny

Samozřejmě, že problémem je fakt, že v přírodě neexistují žádné „magnetické náboje“. Jak víme, divergence B je vždy rovna nule. To nám však nemůže zabránit, abychom neprovedli umělou *analogii* a nezapsali

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = -\rho_m, \quad (36.4)$$

přičemž je stále nutné si uvědomovat, že ρ_m je veličina čistě matematická. Pak už můžeme dovést analogii s elektrostatickým případem do konce a použít naše staré rovnice z elektrostatiky. Často se to tak dělá. V minulosti dokonce mnozí věřili, že tato analogie je správná; věřili, že veličina ρ_m představuje hustotu „magnetických pólů“. Dnes však už víme, že magnetizace látek je důsledkem cirkulujících proudů uvnitř atomů, a to buď v důsledku spinu elektronů, nebo jejich pohybu v atomu. Z fyzikálního hlediska je proto hezčí popisovat tento jev realisticky v řeči atomových proudů a neutíkat se k hustotě nějakých mystických „magnetických pólů“. Poznamenejme, že tyto proudy se někdy nazývají ampérovské, neboť právě Ampère jako první vyslovil domněnku, že magnetismus látek pochází z cirkulujících atomových proudů.

Skutečná mikroskopická hustota proudu ve zmagnetizované látce je samozřejmě velmi komplikovaná. Její hodnota závisí na poloze v atomu – někde je velká, jinde malá; má jeden směr v části atomu a opačný v jiné části (právě tak jako mikroskopické elektrické pole, které se uvnitř dielektrika dramaticky mění.) V mnoha praktických problémech nás však zajímají pouze pole mimo látku nebo *střední* magnetické pole v jejím nitru – na mysli máme pole vysředované přes mnoho a mnoho atomů. Pouze v takovýchto *makroskopických* problémech je užitečné popisovat

magnetický stav látky pomocí M , středního dipólového momentu v jednotce objemu. Nyní si ukážeme, že atomové proudy ve zmagnetizované látce mohou vyvolat jisté makroskopické proudy, které souvisejí s M .

Ve skutečnosti rozdělíme hustotu proudu j , která je reálným zdrojem magnetického pole, na několik částí: jednu část, která popisuje cirkulující proudy atomových magnetů, a další části, které souvisejí s jinými možnými proudy. Obvykle je nejhodnější rozdělit proudy na tři části. V kapitole 32 jsme rozlišili proudy, které volně tečou ve vodičích, a proudy, které vznikají kmitáním vázaných nábojů v dielektriku. V článku 32.2 jsme zapsali

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{pol}} + \mathbf{j}_{\text{ost}},$$

kde \mathbf{j}_{pol} představuje proudy v důsledku pohybu vázaných nábojů v dielektriku a \mathbf{j}_{ost} jsou všechny ostatní proudy. Nyní zajdeme ještě dále. Rozdělíme \mathbf{j}_{ost} na část \mathbf{j}_{mag} , která popisuje střední proudy uvnitř zmagnetizovaných látek, a další člen, který nazveme \mathbf{j}_{vod} a kterým označíme všechny zbývající proudy. Poslední člen se obvykle vztahuje k proudům ve vodiči, ale může v sobě obsahovat i jiné proudy, např. proudy nábojů, které se pohybují volně v prázdném prostoru. Celkovou proudovou hustotu tedy zapíšeme jako

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{pol}} + \mathbf{j}_{\text{mag}} + \mathbf{j}_{\text{vod}}. \quad (36.5)$$

Samozřejmě, právě tento celkový proud patří do Maxwellovy rovnice pro rotaci \mathbf{B} :

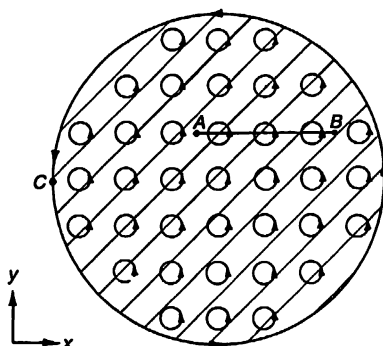
$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (36.6)$$

Dále musíme najít vztah mezi proudem \mathbf{j}_{mag} a vektorem magnetizace M . Abyste věděli kam směřujeme, prozradíme vám, že výsledek bude

$$\mathbf{j}_{\text{mag}} = \nabla \times M. \quad (36.7)$$

Určíme-li vektor magnetizace M v celé magnetické látce, bude hustota cirkulujících proudů rovna rotaci M . Zkusme pochopit, proč je to tak.

Nejdříve vezměme válcovou tyč, homogenně zmagnetizovanou rovnoběžně s její osou. Už víme, že z fyzikálního hlediska znamená taková homogenní magnetizace zároveň konstantní hustotu atomových cirkulujících proudů v celém objemu vzorku. Zkusme si představit, jak by vypadaly skutečné proudy v průřezu tyče. Očekávali bychom, že uvidíme proudy zhruba jako na obr. 36.2. Každý atomový proud teče po obvodu malé kružnice, přičemž všechny cirkulující proudy obíhají stejným směrem. Jaký je však výsledný efektivní proud? Ve větší části tyče jsou účinky nulové, neboť u každé proudové smyčky se nachází jiná, v níž proud teče opačným směrem. Představíme-li si malou plošku (malou, ale přece jen o něco větší než jednotlivé atomy) naznačenou na obr. 36.2 úsečkou AB, je výsledný proud, který jí pröteče, nulový. Výsledný proud uvnitř látky je všude nulový. Všimněte si však, že u povrchu látky existují atomové proudy, které se neruší se sousedními proudy opačného směru. Na povrchu látky teče výsledný proud ve stejném smyslu kolem tyče. Nyní vidíte, proč jsme předtím řekli, že homogenně zmagnetizovaná tyč je ekvivalentní s dlouhou cívkou, v níž teče elektrický proud.



Obr. 36.2 Schematické znázornění cirkulujících atomových proudů, jak bychom je viděli v průřezu železné tyče zmagnetizované ve směru osy z

Je tento obraz v souladu se vztahem (36.7)? Zprvė, uvnitř látky je magnetizace konstantní a všechny její derivace jsou nulové. Je to ve shodě s naším geometrickým obrázkem. U povrchu však M ve skutečnosti není konstantní; je konstantní až po okraj a pak najednou poklesne na nulu. U povrchu se objevují velké gradienty M , které podle vztahu (36.7) vyvolají velkou proudovou hustotu. Podívejme se, co se stane např. v okolí bodu C na obr. 36.2. Zvolíme-li osy x a y jako na obrázku, bude mít magnetizace M směr osy z . Zapišeme-li rovnici (36.7) ve složkách, zjistíme, že

$$\frac{\partial M_z}{\partial y} = (j_{\text{mag}})_x$$

$$-\frac{\partial M_z}{\partial x} = (j_{\text{mag}})_y.$$
(36.8)

V bodě C je derivace $\partial M_z / \partial y$ malá, ale $\partial M_z / \partial x$ je velká a kladná. Podle rovnice (36.7) proto existuje velká proudová hustota ve směru záporné osy y . To je v soulase s naším obrazem povrchového proudu tekoucího po obvodu tyče.

Dále bychom chtěli určit proudovou hustotu ve složitějším případě, kdy se magnetizace v látce mění od bodu k bodu. Z kvalitativního hlediska je zjevné, že liší-li se magnetizace ve dvou sousedních oblastech, nezruší se cirkulující proudy úplně a v objemu látky proto bude existovat jistý výsledný nenulový proud. Právě tento jev nyní chceme popsat i kvantitativně.

Nejdříve si připomeňme výsledek z článku 14.5: cirkulujícímu proudu I odpovídá magnetický moment

$$\mu = IS, \tag{36.9}$$

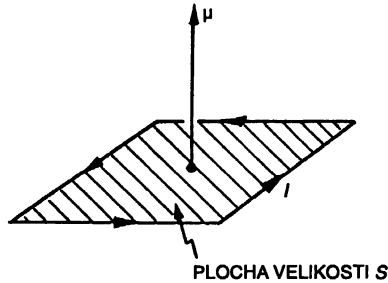
kde S je obsah plochy proudové smyčky (obr. 36.3). Představme si nyní malý kvádr uvnitř zmagnetizované látky jako na obr. 36.4. Kvádr vybereme tak malý, abychom mohli magnetizaci v jeho nitru považovat za konstantní. Má-li magnetizace v kvádru směr osy z a velikost M_z , výsledný účinek bude stejný jako v případě povrchového proudu tekoucího kolem svislých stěn (viz obrázek). Velikost těchto proudů lze vypočítat pomocí vztahu (36.9). Celkový magnetický moment kvádrů je roven součinu magnetizace a objemu

$$\mu = M_z (abc),$$

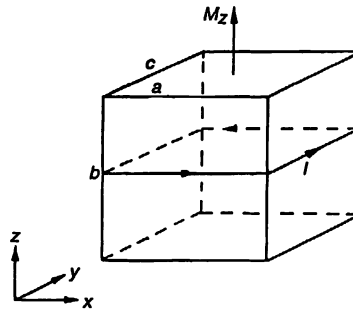
odkud dostaneme (pokud si uvědomíme, že obsah plochy smyčky je ac)

$$I = M_z b.$$

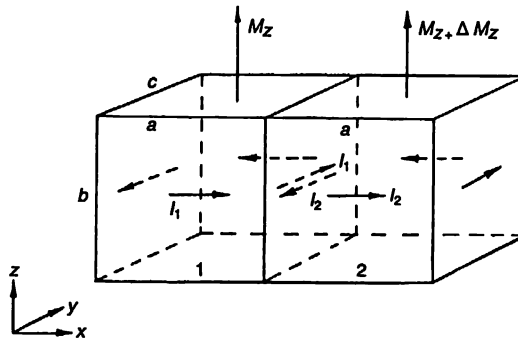
Jinými slovy, proud na jednotku délky (ve svislém směru) na každé ze svislých stěn je roven právě M_z .



Obr. 36.3 Dipólový moment μ proudové smyčky je IS



Obr. 36.4 Malý zmagnetizovaný kvádr je ekvivalentní s cirkulujícím povrchovým proudem



Obr. 36.5 Není-li magnetizace ve dvou sousedních kvádrech stejná, teče mezi nimi nenulový výsledný povrchový proud

Nyní si představme takové dva kvádry vedle sebe jako na obr. 36.5. Jelikož je kvádr 2 oproti kvádru 1 o trochu posunut, jeho svislá složka magnetizace bude trochu odlišná; označíme ji

$M_z + \Delta M_z$ oběma kvádry budeme mít dva příspěvky k celkovému proudu. Kvádr 1 vytvoří proud I_1 , který poteče v kladném směru y , kvádr 2 zase povrchový proud I_2 , který poteče v záporném směru y . Celkový povrchový proud v kladném směru y je roven součtu

$$I = I_1 - I_2 = M_z b - (M_z + \Delta M_z) b = -\Delta M_z b$$

ΔM_z můžeme zapsat jako derivaci M_z ve směru x krát posunutí kvádrů 2 proti kvádru 1, které je rovno a :

$$\Delta M_z = \frac{\partial M_z}{\partial x} a.$$

Proud, který teče mezi oběma kvádry pak je

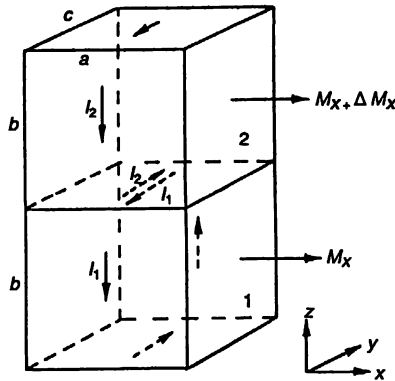
$$I = \frac{\partial M_z}{\partial x} ab.$$

Abychom našli souvislost mezi proudem I a střední objemovou hustotou proudu j , musíme si uvědomit, že tento proud je ve skutečnosti rozložen v určitém průřezu. Když si přestavíme, že je celý objem látky zaplněn takovýmito kvádry, může být každá stěna (kolmá na osu x) připsána právě jednomu kvádru.⁴⁶⁾ Vidíme, že plocha, která souvisí s proudem I , je právě rovna obsahu plochy ab jedné z čelních stěn. Jako výsledek dostaneme

$$j_y = \frac{I}{ab} = -\frac{\partial M_z}{\partial x}.$$

Máme tak přinejmenším začátek rotace M .

Jiný člen v j_y se musí objevit v důsledku změn složky x magnetizace při změnách z . Tento příspěvek $k j_y$ pochází z plochy mezi dvěma kvádry ležícími na sobě, jak je znázorněno na obr. 36.6. Pomocí stejných úvah jako dříve snadno ukážete, že tato stěna přispívá k j_y příspěvkem $\partial M_x / \partial z$.



Obr. 36.6 Dva kvádry, jeden na druhém, také mohou přispívat k j_y ,

⁴⁶⁾ Nebo, pokud se vám to více líbí, můžete rozdělit proud I na každé stěně na polovinu mezi kvádry ležícími po jejích stranách.

Pouze uvedené dvě plochy přispívají k y složce proudu, takže celková proudová hustota ve směru osy y je

$$j_y = \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}.$$

Vypočítáme-li proudy na ostatních stěnách kvádrů (nebo využijeme skutečnost, že naše volba osy z byla zcela libovolná), dojdeme k závěru, že vektor proudové hustoty je skutečně určen vztahem

$$\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{M}.$$

Rozhodneme-li se tedy popisovat magnetický stav v látce pomocí středního magnetického momentu v jednotce objemu M , zjistíme, že cirkulující atomové proudy jsou ekvivalentní střední proudové hustotě v látce, která je dána vztahem (36.7). Je-li látka též dielektrická, objeví se navíc polarizační proud $\mathbf{j}_{\text{pol}} = \partial \mathbf{P} / \partial t$. Je-li látka i vodičem, přidá se ještě vodivostní proud \mathbf{j}_{vod} . Celkový proud můžeme zapsat jako

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{vod}} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (36.10)$$

36.2 POLE H

Nyní dosadíme proud ze vztahu (36.10) do Maxwellových rovnic. Dostaneme

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\mathbf{j}_{\text{vod}} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Člen, který obsahuje M , můžeme přenést na levou stranu:

$$c^2 \nabla \times \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{M}}{\varepsilon_0 c^2} \right) = \frac{\mathbf{j}_{\text{vod}}}{\varepsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \right). \quad (36.11)$$

Jak jsme poznamenali v kapitole 32, je často vhodné zavést místo $(\mathbf{E} + \mathbf{P}/\varepsilon_0)$ nové vektorové pole \mathbf{D}/ε_0 . Podobně je často užitečné zapsat $\mathbf{B} - \mathbf{M}/\varepsilon_0 c^2$ jako jediné vektorové pole. Takové nové vektorové pole \mathbf{H} si my zavedeme jako

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - \frac{\mathbf{M}}{\varepsilon_0 c^2}. \quad (36.12)$$

Rovnice (36.11) se pak změní na

$$\varepsilon_0 c^2 \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{vod}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (36.13)$$

Vypadá to sice jednoduše, ale celá záležitost se jen zamaskovala do písmen \mathbf{D} a \mathbf{H} .

Musíme vás však varovat. Ti, kteří používají soustavu jednotek SI, většinou volí jinou definici \mathbf{H} . Označíme-li jejich pole \mathbf{H}' (samozřejmě, oni mu říkají \mathbf{H} bez čárky), je rovno

$$\mathbf{H}' = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{B} - \mathbf{M}. \quad (36.14)$$

(Kromě toho obvykle zapisují $\varepsilon_0 c^2$ jako nové číslo $1/\mu_0$; pak musí hlídat další konstantu!) S touto definicí vypadá rovnice (36.13) ještě jednodušeji:

$$\nabla \times H' = j_{\text{vod}} + \frac{\partial D}{\partial t}. \quad (36.15)$$

Problémy způsobené touto definicí H' jsou následující: zaprvé, liší se od definice, kterou používají jiní lidé, kteří nepracují s jednotkami SI soustavy, a za druhé, díky ní mají H' a B odlišné jednotky. Mně se zdá vhodnější, když má H stejnou jednotku jako B , a ne jako M , jak je tomu v případě H' . Stanete-li se inženýry a budete navrhovat transformátory, magnety a podobné věci, budete muset být opatrní. Najdete mnoho knih, v nichž se používá definice (36.14) místo naší podle (36.12), a mnoho jiných knih (speciálně příruček o magnetických látkách), kde B a H souvisí stejně jako v našem případě. Budete muset dávat pozor a vždy si ověřit, jakou konvenci autoři používají.

Jedna možnost, jak to zjistit, je podle používání jednotek. Zapamatujte si, že v soustavě SI se B , a tedy i *naše* H , měří v jednotkách weber na metr čtvereční (Wb/m^2), což je rovno jedné tesle nebo 10 000 gaussů ($1 \text{ T} = 10^4 \text{ gauss}$). V soustavě SI má magnetický moment (proud krát plocha) jednotku ampér · metr². Magnetizace M je pak měřena v ampérech na metr. H' má stejnou jednotku jako M . Vidíte, že je to v souladu s (36.15), jelikož ∇ má rozměr převrácené hodnoty délky. Ti, co pracují s elektromagnety, si zvykli nazývat jednotku H (s definicí jako v případě H') jeden ampérzávit na metr, přičemž mají na mysli závit drátu na cívce. Ale „závit“ je ve skutečnosti bezrozměrné číslo, takže vás to nemusí mást. Jelikož naše H je $H'/\varepsilon_0 c^2$, používáte-li soustavu SI, H (ve $\text{Wb}/\text{m}^2 = \text{T}$) je rovno $4\pi \cdot 10^{-7}$ krát H' (v A/m). Je možná užitečnější si zapamatovat, že H (v gaussech) = 0,0126 H' (A/m).

Ještě jedna strašná věc: Mnozí lidé, kteří sice používají *naši* definici H , se rozhodli nazývat jednotky H a B *různými názvy!* Ačkoliv mají obě stejný rozměr, říkají jednotce B *gauss* a jednotce H *oersted* (samozřejmě, podle Gausse a Oersteda). A tak v mnoha knihách najdete grafy, kde je B vynášeno v gaussech a H v oerstedech. Přitom je to stále tatáž jednotka – desetitisíciná zákonná jednotka SI, *tesly*. Zmatek, existující v magnetických jednotkách, je shrnut v *tab. 36.1*.

Tabulka 36.1 Jednotky magnetických veličin

$$\begin{aligned} [B] &= \text{W m}^{-2} = \text{T} = 10^4 \text{ gauss} \\ [H] &= \text{W m}^{-2} = \text{T} = 10^4 \text{ gauss } \textit{nebo} \text{ } 10^4 \text{ oersted} \\ [M] &= \text{A m}^{-1} \\ [H'] &= \text{A m}^{-1} \end{aligned}$$

Užitečné převody

$$\begin{aligned} B \text{ (v T)} &= 10^{-4} B \text{ (v gauss)} \\ H \text{ (v T)} &= 1,26 \cdot 10^{-6} H' \text{ (v A} \cdot \text{m}^{-1}) \\ H \text{ (v gauss)} &= H \text{ (v oersted)} = 0,0126 H' \text{ (v A} \cdot \text{m}^{-1}) \end{aligned}$$

36.3 MAGNETIZAČNÍ KŘIVKA

Nyní si všimněme několika jednoduchých případů, kdy je magnetické pole konstantní nebo když se pole mění dost pomalu, takže můžeme zanedbat $\partial D/\partial t$ v porovnání s \mathbf{j}_{vod} . V tom případě pole splňují rovnice

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (36.16)$$

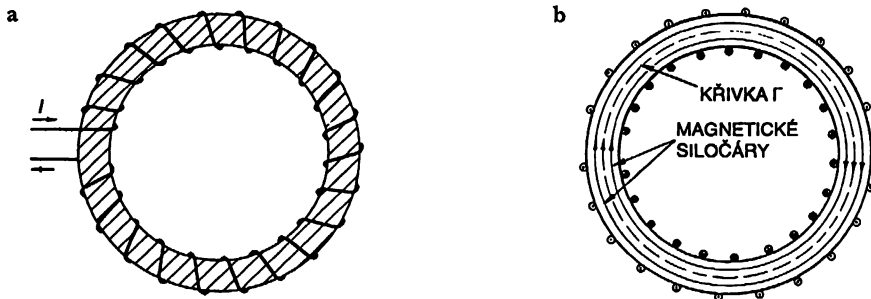
$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{vod}} / \varepsilon_0 c^2 \quad (36.17)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - \mathbf{M} / \varepsilon_0 c^2. \quad (36.18)$$

Mějme prstavec ze železa, na němž je navinuta cívka z měděného drátu jako na obr. 36. 7a. Ve vodiči teče proud I . Jaké je magnetické pole? Magnetické pole bude nenulové většinou jen uvnitř železného jádra; v něm jsou magnetické siločáry kružnice, jak je znázorněno na obr. 36. 7b. Jelikož je tok \mathbf{B} spojitý, je jeho divergence nulová a rovnice (36.13) je splněna. Dále zapíšeme rovnici (36.17) v pozmeněném tvaru tak, že ji zintegrujeme podél uzavřené křivky Γ znázorněné na obr. 36. 7b. Podle Stokesovy věty pak platí

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \int_S \mathbf{j}_{\text{vod}} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (36.19)$$

přičemž integrál proudové hustoty \mathbf{j} se počítá přes libovolnou plochu S , která je ohraničena křivkou Γ . Touto plochou prochází každý závit cívky jednou. Každý závit přispívá k integrálu hodnotou proudu I , a proto je celý integrál roven NI , je-li počet závitů N .



Obr. 36.7 a) Prstavec ze železa ovinutý cívkou z izolovaného vodiče.
b) Průřez prstencem, na němž jsou znázorněny magnetické siločáry

Ze symetrie problému vyplývá, že \mathbf{B} má stejnou velikost podél celé křivky Γ ; předpokládáme-li, že i magnetizace (a tedy i \mathbf{H}) má konstantní velikost podél Γ , rovnice (36.19) se změnil na

$$Hl = \frac{NI}{\varepsilon_0 c^2},$$

přičemž l je délka křivky. Proto

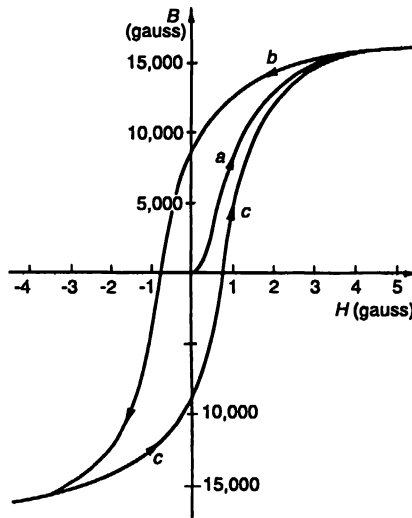
$$H = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{NI}{l}. \quad (36.20)$$

Jelikož H je v takovémto případě přímo úměrné magnetizačnímu proudu, je někdy nazýváno i *magnetizační pole*.

Už potřebujeme jen rovnici, která vyjadřuje vztah mezi H a B . Taková však neexistuje! Máme samozřejmě rovnici (36.18), ta nám však nepomůže, neboť ve feromagnetu, jakým je železo, neexistuje bezprostřední vztah mezi M a B . Magnetizace M závisí na celé historii daného kusu železa, a nejen na okamžité hodnotě B .

Vše je ztraceno. V jednoduchých případech lze najít řešení. Máme-li na počátku nezmagnetizované železo (například kus železa, který byl žhán při vysokých teplotách), bude mít celý prsteneček, díky své jednoduché geometrii, stejnou magnetickou historii. Pak můžeme něco říci i o M (a tedy i o vztahu mezi B a H) na základě experimentálních měření. Pole B v prstenci je na základě vztahu (36.20) rovno konstantě vynásobené proudem I ve vinutí. Lze jej změřit, zintegrujeme-li přes čas elektromotorické napětí v cívce (nebo v jiné cívce, navinuté na magnetizační cívku na obrázku). Toto elektromotorické napětí je rovno rychlosti změny magnetického toku, takže integrál emn podle času je roven B krát obsah plochy průřezu prstence.

Obrázek 36.8 znázorňuje vztah mezi B a H , získaný na základě měření s prstencem z měkkého železa. Zapneme-li proud, roste B při růstu podél křivky a . Všimněte si odlišného měřítka B a H ; zpočátku relativně malé H vytváří velké B . Proč je B mnohem větší v železe než ve vzduchu? Proto, že je velká i magnetizace M , která je ekvivalentní velkému proudu na povrchu železa, a pole B pochází ze součtu tohoto proudu a vodivostního proudu ve vinutí. Proč je M tak velké, o tom si povíme pár slov později.



Obr. 36.8 Typická magnetizační a hysterezní křivka měkkého železa

Při větších hodnotách H se magnetizační křivka vyrovná. Říkáme, že se železo *nasytí*. V měřítku našeho obrázku se zdá, že křivka se stane vodorovnou. Ve skutečnosti nadále pomalu roste: pro silná pole je B úměrné H , přičemž konstanta úměrnosti je rovna jedné. *Muž* nadále neroste. Zde

je nutné poznamenat, že v prstenci z nemagnetické látky by M bylo nulové a B by stále bylo rovno H pro všechna pole.

První věc, které je třeba si všimnout, je, že křivka a na obr. 36.8 (nazývá se *magnetizační křivka*) je vysoce nelineární. Což je ještě horší, snížíme-li po dosažení saturace proud v cívce tak, že H bude opět nulové, magnetické pole B klesá podél křivky v cívce tak, že H bude opět nulové, magnetické pole B klesá podél křivky b . Je-li H nulové, je pole B ještě stále nenulové. I při nulovém magnetizačním proudu v železe existuje magnetické pole – železo je permanentně zmagnetizováno. Zapojíme-li do cívky opačný proud, sledují B a H nadále křivku b , zatímco se železo saturuje v opačném směru. Zmenšíme-li proud opět až k nule, pohybuje se B podél křivky c . Měníme-li proud mezi velkými kladnými a zápornými hodnotami, B a H rostou a klesají zhruba podél křivek b a c . Změníme-li však H libovolným způsobem, můžeme získat složitější křivky, které obecně leží někde mezi křivkami b a c . Smyčka, kterou získáme opakovanými oscilacemi pole, se nazývá *hysterezní křivka železa*.

Vidíme tedy, že není možné zapsat funkční vztah typu $B = f(H)$, neboť v libovolném okamžiku závisí velikost B nejen na velikosti H v daném okamžiku, ale na celé předcházející historii. Přírodně, magnetizační a hysterezní křivky jsou odlišné pro různé látky. Tvar křivek kriticky závisí na chemickém složení látky, jakož i na detailním způsobu její přípravy a jejího dalšího fyzikálního zpracování. Fyzikální vysvětlení tohoto složitého chování si rozebereme v následující kapitole.

36.4 INDUKČNOST OCELOVÝCH JADER

Jednou z nejdůležitějších aplikací magnetických látek je jejich využití v elektrických obvodech, např. v transformátorech, elektromotorech apod. Příčinou je jednak to, že pomocí železa lze ovlivňovat chování magnetického pole, jakož i to, že nám umožňuje získat při daném proudu mnohem silnější pole. Například typické „prstencovité“ indukční zařízení je velmi podobné objektu, znázorněnému na obr. 36.7. Při dané indukčnosti je jeho objem mnohem menší a potřebujeme mnohem méně mědi než při ekvivalentním zařízení se „vzduchovým jádrem“. Při dané indukčnosti je odpor vinutí mnohem menší, takže se zařízení blíží k ideálnímu, speciálně při nízkých frekvencích. Snadno lze kvantitativně vysvětlit, jak takové indukční zařízení funguje. Je-li proud ve vinutí, je pole H uvnitř úměrné I , viz vztah (36.20). Napětí U na vývodech souvisí s magnetickým polem B . Zanedbáváme-li odpor vinutí, je napětí U úměrné $\partial B / \partial t$. Indukčnost L je rovna poměru U k dI/dt (viz článek 17.7), a proto v sobě obsahuje vztah mezi B a H v železe. Jelikož B je mnohem větší než H , je indukčnost velmi velká. Co se děje, lze fyzikálně vysvětlit takto: Malý proud v cívce, který za normálních okolností vytváří slabé magnetické pole, přinutí maličké magnety v železe zaujmout stejný směr a vytvořit tak mnohem silnější „magnetický“ proud, než je původní proud ve vedení. Vypadá to tak, jako kdybychom do cívky zapojili mnohem větší proud. Změníme-li znaménko proudu, všechny maličké magnety také změni směr – změni se znaménko všech vnitřních proudů – a indukované elektromotorické napětí je mnohem větší než bez železa. Chceme-li vypočítat indukčnost, můžeme to provést na základě energetických úvah – stejně jako v článku 17.8. Rychlost odebrání energie ze zdroje proudu je IU . Napětí U je rovno ploše průřezu jádra S krát N krát dB/dt . Podle rovnice (36.20) je I rovno $(\epsilon_0 c^2 l / N) H$. Proto

$$\frac{dW}{dt} = UI = (\epsilon_0 c^2 l S) H \frac{dB}{dt}.$$

Zintegrováním podle času získáme

$$W = (\epsilon_0 c^2 lS) \int H dB. \quad (36.21)$$

Všimněte si, že lS je právě objem prstence, takže hustota energie $w = (W/\text{objem})$ v magnetické látce je rovno

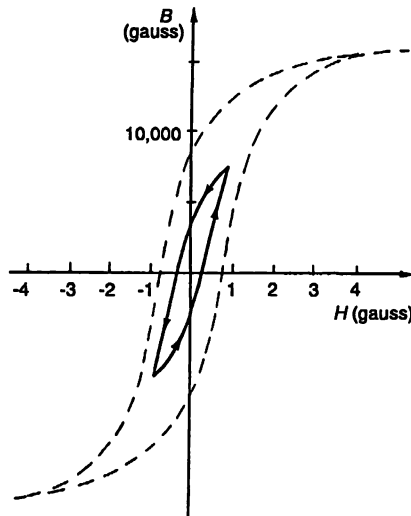
$$w = \epsilon_0 c^2 \int H dB. \quad (36.22)$$

Je vidět zajímavá skutečnost. Použijeme-li střídavý proud, chová se železo podle hysterezní smyčky. Jelikož B není jednoznačnou funkcí H , není integrál $\int H dB$ po uskutečnění jednoho cyklu nulový. Je roven velikosti plochy uzavřené hysterezní smyčkou. Zdroj proto musí v každém cyklu dodat určitou výslednou energii, která je úměrná velikosti plochy uvnitř hysterezní smyčky. Tato energie „se ztrácí“. Je ztracena z hlediska elektromagnetických dějů, železo se jí zahřívá. Takovýmto ztrátám se říká *hysterezní ztráty*. Aby byly co nejmenší, chtěli bychom mít hysterezní smyčku co nejúžší. Jeden způsob, jak zmenšit plochu smyčky, je zmenšit hodnotu maximálního pole, které je vytvořeno při každém cyklu. Je-li maximální pole menší, vypadá hysterezní smyčka jako na obr. 36.9. Navrhují se také speciální látky, jejichž hysterezní smyčka je velmi úzká. Takové je např. *transformátorové železo*, jak se označují slitiny železa s malou příměsí křemíku.

Když indukční jevy probíhají podél velmi malé hysterezní smyčky, lze vztah mezi B a H považovat za přibližně lineární. Obvykle se zapisuje jako

$$B = \mu H. \quad (36.23)$$

Pozor, konstanta μ není magnetický moment jako v předcházejících kapitolách. Nazývá se *permeabilita* (nebo přesněji relativní permeabilita) železa. Permeabilita obvyčejných druhů železa je řádově několik tisíc. Existují však speciální slitiny, „superslitiny“, jejichž permeability dosahují až milionové hodnoty.



Obr. 36.9 Hysterezní smyčka, při níž nebylo dosaženo nasycení

Dosadíme-li přibližnění $B = \mu H$ do vztahu (36.21), můžeme energii prstencového indukčního zařízení zapsat jako

$$W = (\varepsilon_0 c^2 l S) \mu \int H dH = (\varepsilon_0 c^2 l S) \frac{\mu H^2}{2}, \quad (36.24)$$

takže hustota energie je přibližně rovna

$$w \approx \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} \mu H^2.$$

Dále můžeme energii podle (36.24) přirovnat k energii $LI^2/2$ indukčního zařízení a vypočítat L . Najdeme

$$L = (\varepsilon_0 c^2 l S) \mu \left(\frac{H}{I} \right)^2.$$

Dosadíme-li ještě za H/I z rovnice (36.20), je výsledek

$$L = \frac{\mu N^2 S}{\varepsilon_0 c^2 l}. \quad (36.25)$$

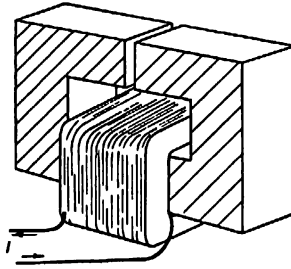
Indukčnost je úměrná μ . Potřebujete-li indukčnost pro podobná zařízení jako zesilovače zvuku, musíte najít látku, pro níž je vztah B a H podél hysterezní smyčky co nejbližší k lineárnímu vztahu. (Jistě si vzpomenete, co jsme si v kapitole 50 prvního dílu řekli o vzniku vyšších harmonických frekvencí v nelineárních systémech.) V takovýchto aplikacích je vztah (36.23) užitečným přiblížením. *Chcete-li* naopak generovat vyšší harmonické frekvence, použijete úmyslně indukčnost, která se chová co nejvíce nelineárně. Pak musíte použít úplný vztah mezi B a H a analyzovat výsledný efekt nějakou grafickou nebo numerickou metodou.

Transformátor je obvykle vyroben ze dvou cívek se společným prstencem – *jádrem* – z magnetické látky. (Ve velkých transformátorech je vhodnější použít jádro s obdélníkovým průřezem.) Mění se proud v primárním vinutí, vyvolává změny magnetického pole v jádře, které indukují elektromotorické napětí v sekundárním vinutí. Jelikož magnetický tok v *každém závitě* obou vinutí je stejný, elektromotorická napětí v obou vinutích jsou ve stejném poměru jako jejich počty závitů. Napětí v primární cívce se transformuje na jiné napětí v sekundární cívce. Jelikož na vytvoření potřebných změn magnetického pole v jádře je potřebný určitý *celkový* proud, je *algebraický* součet proudů v obou vinutích konstantní a je roven právě potřebnému magnetizačnímu proudu. Zvětšili se proud odebraný ze sekundární cívky, úměrně se musí zvýšit primární proud – transformují se proudy i napětí.

36.5 ELEKTROMAGNETY

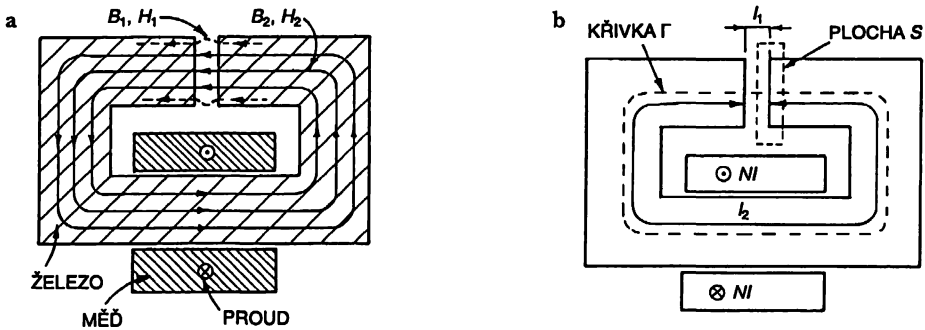
Nyní pohovořme o praktické situaci, která je o něco složitější. Představme si elektromagnet standardního tvaru jako na *obr. 36.10*, skládající se z železného jádra ve tvaru C , na němž je namotáno mnoho závitů vodiče.

Jaké je magnetické pole B v mezeře?



Obr. 36.10 Elektromagnet

Je-li šířka mezery v porovnání s ostatními rozměry malá, můžeme v prvním přiblížení předpokládat, že magnetické siločáry tvoří uzavřené smyčky podobně jako v prstenci. Budou vypadat více méně jako na obr. 36.11a. Mají sice snahu vyjít z mezery, ale je-li mezera úzká, je efekt velmi slabý. S dobrou přesností lze předpokládat, že tok B libovolným průřezem jádra je konstantní. Má-li jádro konstantní průřez (zanedbáváme okrajové efekty u mezery a na zlomech), můžeme říci, že B má konstantní velikost podél jádra.



Obr. 36.11 Průřez elektromagnetu

B bude mít stejnou velikost i v mezeře. Vyplývá to přímo z rovnice (36.16). Představte si uzavřenou plochu S , znázorněnou na obr. 36.11b, jejíž jedna strana je v mezeře a druhá v železe. Celkový magnetický tok touto plochou musí být nulový. Označíme-li pole v mezeře jako B_1 a pole v železe jako B_2 , platí

$$B_1 S_1 - B_2 S_2 = 0.$$

Jelikož $S_1 = S_2$ (v našem přiblížení), i $B_1 = B_2$.

Nyní si všimněme H . Opět použijeme vztah (36.19), přičemž křivkový integrál budeme počítat podél křivky Γ na obr. 36.11b. Pravá strana je jako předtím rovna NI , počet závitů krát proud. H se však bude lišit v železe a ve vzduchové mezeře. Označíme-li jako H_2 pole v železe a jako l_2 délku dráhy v jádře, je příspěvek této části křivky k integrálu $H_2 l_2$. Je-li H_1 pole v mezeře a l_1 šířka mezery, přispěje mezera k integrálu veličinou $H_1 l_1$. Platí tedy

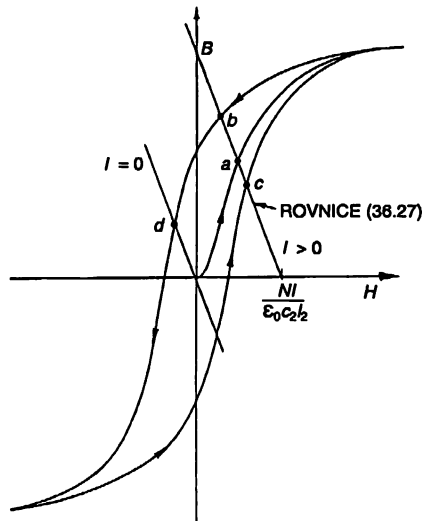
$$H_1 l_1 + H_2 l_2 = \frac{NI}{\epsilon_0 c^2}. \quad (36.26)$$

Víme však ještě něco: ve vzduchové mezeře je magnetizace zanedbatelná, takže $B_1 = H_1$. Jelikož zároveň $B_1 = B_2$, rovnice (36.26) se změní na

$$B_2 l_1 + H_2 l_2 = \frac{NI}{\epsilon_0 c^2}. \quad (36.27)$$

Stále však obsahuje dvě neznámé. Abychom určili B_2 a H_2 , potřebujeme nějaký další vztah, a to vztah mezi B a H v železe.

Můžeme-li použít lineární přiblížení, $B_2 = \mu H_2$, dokážeme vyřešit rovnici algebraicky. Zkusme však najít řešení v obecném případě, kdy má magnetizační křivka železa tvar jako na obr. 36.8. Chceme najít společná řešení tohoto funkčního vztahu a rovnice (36.27). Můžeme jej najít graficky, nakreslíme-li graf vztahu (36.27) společně s grafem magnetizační křivky, jak je zobrazeno na obr. 36.12. V průsečíku obou křivek leží naše řešení.



Obr. 36.12 Určení pole v elektromagnetu

Při daném proudu I je zobrazením funkce (36.27) přímka, která je na obr. 36.12 označena $I > 0$. Přímka protíná osu $H(B_2 = 0)$ v bodě $H_2 = NI / \epsilon_0 c^2 l_2$ a její směrnice je $-l_2 / l_1$. Změnou proudu pouze posouváme přímku ve vodorovném směru. Z obr. 36.12 vyplývá, že při daném proudu existuje několik různých řešení podle toho, jak jsme magnet získali. Pokud jsme sestavili magnet a zapnuli proud I , bude mít pole B_2 (rovné poli B_1) hodnotu odpovídající bodu a . Pokud jste nejdříve zvýšili proud na velmi velkou hodnotu a pak se vrátili k I , bude pole určeno souřadnicí bodu b . Pokud jste nejdříve do magnetu zapojili záporný proud a až pak se dostali až k I , je pole jako v bodě c . Pole v mezeře závisí na tom, co jste s magnetem dělali v minulosti.

Je-li proud v magnetu nulový, vztah mezi B_2 a H_2 podle rovnice (36.27) je znázorněn na obrázku přímkou, která je označena $I = 0$. Stále jsou však mnohá řešení. Pokud jste nejdříve železo saturaovali, zůstane v magnetu značné reziduální pole odpovídající bodu d . Můžete odvinout cívkou a získáte permanentní magnet. Vidíte, že na výrobu dobrého permanentního magnetu potřebujete látku se širokou hysterezní smyčkou. Existují speciální slitiny, např. alnico V, v nichž je smyčka opravdu velmi široká.

36.6 SPONTÁNNÍ MAGNETIZACE

Vraťme se nyní k otázce, proč ve feromagnetických látkách způsobuje docela slabé magnetické pole tak velkou magnetizaci. Magnetizace feromagnetických látek, např. železa nebo niklu, pochází z magnetických momentů elektronů ve vnitřních slupkách atomů. Magnetický moment každého elektronu μ je roven $q/2m$ krát faktor g krát moment hybnosti J . Nevykonává-li elektron orbitální pohyb, je složka J v libovolném směru, např. ve směru osy z , rovna $\pm \frac{\hbar}{2}$; dosadíme-li $g=2$, zjistíme, že průmět μ do osy z je

$$\mu_z = \frac{q\hbar}{2m} = 0,928 \cdot 10^{-23} \text{ Am}^2. \quad (36.28)$$

V atomu železa přispívají k feromagnetizmu ve skutečnosti dva elektrony, takže pro jednoduchost budeme hovořit o niklu, který je také feromagnetikem, ale má jen jeden elektron ve vnitřním obalu. (Naše úvahy můžeme snadno zobecnit na železo.)

Je důležité, že v přítomnosti vnějšího pole B usilují atomové magnety o uspořádání do směru pole, přičemž jim v tom brání tepelné pohyby podobně jako v případě paramagnetických látek. V poslední kapitole jsme zjistili, že výsledkem rovnováhy mezi magnetickým polem, které uspořádává atomové magnety, a tepelnými pohyby, které ruší pravidelné uspořádání, je střední magnetický moment v jednotce objemu, který je roven

$$M = N\mu_t g h \frac{\mu B_a}{kT}. \quad (36.29)$$

Pod B_a rozumíme pole, která působí na atom, a kT je boltzmannovská energie. V teorii paramagnetizmu jsme psali místo B_a přímo B , čímž jsme zanedbávali tu část pole, kterou u daného atomu vytvářejí sousední magnety. Ve feromagnetické látce je situace složitější. Už nemůžeme použít střední pole v železe místo B_a , které působí na jednotlivý atom. Musíme postupovat podobně, jako jsme to dělali v případě dielektrik – musíme najít *lokální* pole, které působí na atom. Při přesném výpočtu bychom museli sčítat všechna pole, která u zkoumaného atomu vytvářejí všechny ostatní atomy v krystalové mřížce. Podobně jako v případě dielektrik však raději použijeme přiblížení: budeme předpokládat, že pole u atomu je stejné jako pole v malé kulové dutině v látce. Přitom předpokládáme, že přítomnost dutiny nezmění magnetické momenty okolních atomů.

Na základě stejných úvah jako v kapitole 11 bychom si mohli myslet, že bude platit

$$B_{\text{dutina}} = B + \frac{1}{3} \frac{M}{\epsilon_0 c^2} \quad (\text{chyba!}).$$

To však neplatí. Výsledky z kapitoly 11 i přesto můžeme využít, porovnáme-li pečlivě rovnice z kapitoly 11 s rovnicemi pro feromagnetizmus z této kapitoly. Tyto rovnice si napíšeme pěkně vedle sebe. V oblasti, kde nejsou vodivostní proudy ani náboje, platí:

Elektrostatika

Statický feromagnetizmus

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right) = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \times \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2} \right) = 0$$

(36.30)

Tyto dvě množiny rovnic můžeme chápat jako analogické, ztotožníme-li je *čistě matematicky*:

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B} - \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2}, \quad \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \rightarrow \mathbf{B}.$$

Je to totéž jako

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}, \quad \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{M}/c^2. \quad (36.31)$$

Jinými slovy, zapíšeme-li rovnice feromagnetizmu jako

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{H} + \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2} \right) = 0$$

(36.32)

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0.$$

Tak *vypadají jako* rovnice elektrostatiky.

Tato čistě matematická korespondence měla za důsledek v minulosti trochu zmatku. Lidé si mysleli, že \mathbf{H} je „*to pravé magnetické pole*“. Jak jsme však viděli, z fyzikálního hlediska jsou fundamentálními poli \mathbf{B} a \mathbf{E} , a \mathbf{H} je jen odvozený pojem. Tedy ačkoliv jsou *rovnice analogické, fyzika není*. To nám však nezabrání využít principu, že stejné rovnice mají stejná řešení.

Naše dřívější výsledky pro elektrická pole uvnitř dutin různého tvaru v dielektriku (shrnuje je *obr. 36.1*) můžeme využít pro výpočet pole \mathbf{H} uvnitř odpovídajících dutin. Budeme-li znát \mathbf{H} , můžeme určit i \mathbf{B} . Například (pomocí výsledků, které jsme shrnuli v článku 36.1) pole \mathbf{H} je v jehlovité dutině rovnoběžné s \mathbf{M} stejné jako \mathbf{H} v látce

$$\mathbf{H}_{\text{dutina}} = \mathbf{H}_{\text{látka}}.$$

Jelikož je \mathbf{M} v dutině nulové, máme

$$\mathbf{B}_{\text{dutina}} = \mathbf{B}_{\text{látka}} - \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (36.33)$$

V diskovité dutině kolmé na \mathbf{M} zase platí

$$\mathbf{E}_{\text{dutina}} = \mathbf{E}_{\text{dielektrikum}} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0},$$

což se změní na

$$H_{\text{dutina}} = H_{\text{látka}} + \frac{M}{\epsilon_0 c^2}.$$

Pro B platí

$$B_{\text{dutina}} = B_{\text{látka}}. \quad (36.34)$$

Nakonec v kulové dutině na základě analogie se vztahem (36.3) máme

$$H_{\text{dutina}} = H_{\text{látka}} + \frac{M}{3 \epsilon_0 c^2}$$

resp.

$$B_{\text{dutina}} = B_{\text{látka}} - \frac{2}{3} \frac{M}{\epsilon_0 c^2}. \quad (36.35)$$

Tento výsledek se podstatně liší od vztahu pro E .

Stejný výsledek můžeme, samozřejmě, odvodit i fyzikálněji, a to přímým použitím Maxwellových rovnic. Například vztah (36.34) vyplývá bezprostředně z $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. (Použijte gaussovskou plochu, jejíž polovina je v látce a druhá mimo.) Podobně vztah (36.33) získáte z křivkového integrálu podél křivky, která vstupuje do dutiny a vrací se látkou. Fyzikálně lze pokles pole v dutině vysvětlit jako důsledek povrchových proudů, které jsou rovny $\nabla \times \mathbf{M}$. Ponecháme vám jako cvičení důkaz, že i rovnici (36.35) lze získat na základě úvah o účinku povrchových proudů na hranici kulové dutiny.

Chceme-li najít z rovnice (36.29) rovnovážnou magnetizaci, je nejhodnější pracovat s H ; zapíšeme tedy

$$B_a = H + \lambda \frac{M}{\epsilon_0 c^2}. \quad (36.36)$$

V přiblížení kulové dutiny je λ rovno $1/3$. Jak ale uvidíte, později budeme používat jinou hodnotu, a proto ponecháme λ jako libovolný parametr. Kromě toho budeme předpokládat, že všechna pole mají stejný směr, abychom se nemuseli trápit s vektory a jejich směry. Dosadíme-li vztah (36.36) do rovnice (36.29), získáme jedinou rovnici, která udává vztah mezi magnetizací M a magnetizačním polem H :

$$M = N\mu_t \text{gh} \left(\frac{H + \lambda M / \epsilon_0 c^2}{kT} \right).$$

Tuto rovnici však nelze vyřešit analyticky, proto ji budeme řešit graficky.

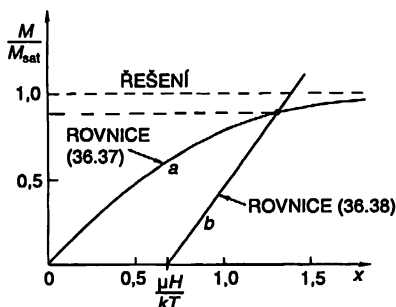
Postavme úlohu obecněji a zapišme rovnici (36.29) ve tvaru

$$\frac{M}{M_{\text{sat}}} = \text{tgh } x, \quad (36.37)$$

přičemž M_{sat} je saturační hodnota magnetizace, $M_{\text{sat}} = N\mu$ a x označuje $\mu B_a / kT$. Závislost M/M_{sat} na x je na obr. 36.13 znázorněna křivkou a . Použijeme-li vztah (36.36), můžeme zapsat x jako funkci M :

$$x = \frac{\mu B_a}{kT} = \frac{\mu H}{kT} + \left(\frac{\mu \lambda M_{\text{sat}}}{\varepsilon_0 c^2 kT} \right) \frac{M}{M_{\text{sat}}}. \quad (36.38)$$

Při každé hodnotě H je závislost mezi M/M_{sat} a x lineární. Průsečík s osou x odpovídá $x = \mu H/kT$ a směrnice je $\varepsilon_0 c^2 kT/\mu \lambda M_{\text{sat}}$. Při daném H máme přímkou, která je na obr. 36.13 označena jako b . Průsečík a a b určuje řešení pro M/M_{sat} . Problém je vyřešen.



Obr. 36.13 Grafické řešení rovnic (36.37) a (36.38)

Všimněme si, jak vypadají řešení v různých situacích. Začneme s $H=0$. Existují dvě možnosti, které znázorňují přímkou b_1 a b_2 na obr. 36.14. Z rovnice (36.38) je zřejmé, že směrnice přímky závisí na absolutní teplotě T . Při vysokých teplotách máme přímkou typu b_1 . Řešením je $M/M_{\text{sat}}=0$. V nulovém magnetickém poli H je i magnetizace nulová. Při nízkých teplotách však máme čáru typu b_2 a existují dvě řešení: jedno je $M/M_{\text{sat}}=0$ a druhé při M/M_{sat} blízké jedné. Pouze horní řešení je stabilní, o čemž se můžete přesvědčit, uděláte-li malé variace obou řešení.

Na základě těchto představ by se tedy magnetická látka měla při dostatečně nízkých teplotách samovolně, spontánně zmagnetizovat. Stručně řečeno, jsou-li tepelné pohyby dostatečně malé, způsobí interakce mezi atomovými magnety, že všechny zaujmou rovnoběžný směr. Získáme permanentně zmagnetizovanou látku, která je podobná feroelektriku, o němž jsme hovořili v kapitole 11.

Vydeme-li z vysokých teplot a postupně teplotu snižujeme, najdeme jistou kritickou teplotu (Curieovu teplotu) T_c , při níž se najednou objeví feromagnetismus. Této teplotě odpovídá na obr. 36.14 přímkou b_3 , která je tečnou ke křivce a , a proto má směrnici rovnou jedné. Curieovu teplotu určuje vztah

$$\frac{\varepsilon_0 c^2 k T_c}{\mu \lambda M_{\text{sat}}} = 1. \quad (36.39)$$

Chceme-li tedy, můžeme rovnici (36.38) zapsat v jednodušším tvaru pomocí T_c :

$$x = \frac{\mu H}{kT} + \frac{T_c}{T} \left(\frac{M}{M_{\text{sat}}} \right). \quad (36.40)$$

Podíváme se, co se bude dít ve slabém magnetizačním poli H . Z obr. 36.14 je zřejmé, co se stane, když naše přímkou posuneme o kousek doprava. Při nízkých teplotách se průsečík bude

posouvat pomalu po té části křivky *a*, která má malou směrnici, a *M* se tedy změní jen relativně málo. V případě vysokých teplot však průsečík vystoupí po strmé části křivky *a* a *M* se podstatně změní. Skutečně můžeme tuto část křivky *a* aproximovat přímkou s jednotkovou směrnici a zapsat vztah:

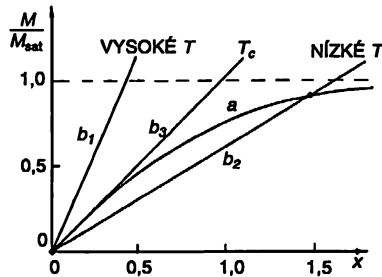
$$\frac{M}{M_{\text{sat}}} = x = \frac{\mu H}{kT} + \frac{T_c}{T} \left(\frac{M}{M_{\text{sat}}} \right).$$

Řešení pro M/M_{sat} nyní najdeme jako:

$$\frac{M}{M_{\text{sat}}} = \frac{\mu H}{k(T - T_c)}. \quad (36.41)$$

Získali jsme vztah, který připomíná výsledek pro paramagnetizmus. Vzpomeňte si, že pro paramagnetizmus platilo

$$\frac{M}{M_{\text{sat}}} = \frac{\mu B}{kT}. \quad (36.42)$$



Obr. 36.14 Určení magnetizace při $H=0$

Jedna odlišnost je v tom, že se nyní magnetizace vyjadřuje prostřednictvím H , které v sobě obsahuje účinky interakce mezi atomovými magnety; důležitější však je, že magnetizace je nyní nepřímo úměrná rozdílu mezi T a T_c , a ne samotné absolutní teplotě T . Zanedbáme-li interakci mezi sousedícími atomy, bude $\lambda=0$, čemu podle vztahu (36.39) odpovídá $T_c=0$. Pak bude náš výsledek stejný jako v kapitole 35.

Naše teoretické představy můžeme ověřit porovnáním s experimentálními hodnotami pro nikl. Experimentálně bylo zjištěno, že feromagnetické vlastnosti niklu zmizí nad teplotou 631 K. Tuto hodnotu můžeme porovnat s hodnotou T_c , která vyplývá z rovnice (36.39). Když si vzpomeneme, že $M_{\text{sat}} = \mu N$, máme

$$T_c = \lambda \frac{N\mu^2}{k\epsilon_0 c^2}.$$

Z hodnot hustoty a atomové hmotnosti niklu získáme hodnotu

$$N = 9,1 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}.$$

Dosažením μ z rovnice (36.28) a $\lambda = \frac{1}{3}$ vyjde

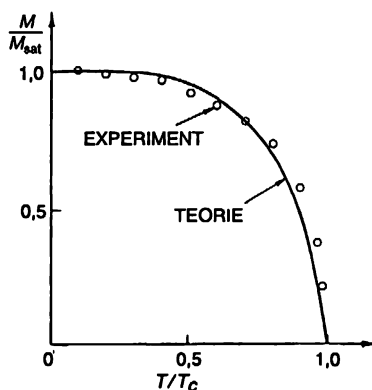
$$T_c = 0,24 \text{ K.}$$

Výsledek se liší asi 2 600-krát! Naše teorie feromagnetizmu kompletně selhala.

Teorii můžeme (podobně jako kdysi Weiss) „vyspravit“ předpokladem, že z nějaké neznámé příčiny není λ rovno jedné třetině, ale $2600 \times \frac{1}{3}$, tj. asi 900. Ukazuje se, že podobnou hodnotu získáme i v případě jiných feromagnetických látek, např. železa. Chceme-li vědět, co tento předpoklad znamená, musíme se vrátit ke vztahu (36.36). Vidíme, že velká hodnota λ znamená, že lokální pole B_a , které působí na atom, je mnohem mnohem větší, než bychom očekávali. Skutečně, zapíšeme-li $H = B - M/\epsilon_0 c^2$, zjistíme

$$B_a = B + \frac{(\lambda - 1) M}{\epsilon_0 c^2}.$$

Podle naší původní představy s $\lambda = 1/3$ způsobuje lokální magnetizace *pokles* efektivního pole o hodnotu $-(2/3)M/\epsilon_0 c^2$. I kdyby náš model sférické dutiny nebyl příliš dobrou aproximací, očekáváme *alespoň nějaký pokles*. Ve skutečnosti si pro vysvětlení feromagnetizmu musíme představit, že magnetizace, způsobená polem, *zvyšuje* lokální pole mnohokrát – možná tisíc i vícekrát. Zdá se, že neexistuje rozumný způsob jak v okolí atomu vytvořit tak obrovské pole, ba ani pole odpovídajícího znaménka! Je zřejmé, že naše „magnetická“ teorie feromagnetizmu zkrachovala. Musíme vyslovit závěr, že feromagnetizmus souvisí s nějakou *nemagnetickou* interakcí mezi spiny elektronů v sousedních atomech. Tato interakce musí mít za následek silnou tendenci všech sousedních spinů uspořádat se do stejného směru. Později uvidíme, že takové chování souvisí s kvantovou mechanikou a s Pauliho vylučovacím principem.



Obr. 36.15 Spontánní magnetizace jako funkce teploty v případě niklu

Na závěr se podíváme na to, co se stane při nízkých teplotách, kdy $T < T_c$. Už jsme zjistili, že v tom případě se objeví spontánní magnetizace (dokonce i při $H=0$), jejíž velikost určuje souřadnice průsečíku křivky a a b_2 na obr. 36.14. Najdeme-li řešení pro M při různých teplotách

(tak, že měníme sklon přímky b_2), získáme teoretickou křivku znázorněnou na *obr. 36.15*. Tato křivka by měla být univerzální pro všechny atomy, jejichž magnetický moment vytváří jediný elektron. Křivky pro jiné látky jsou jen málo odlišné.

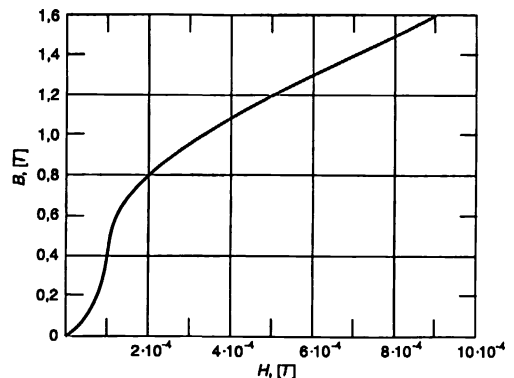
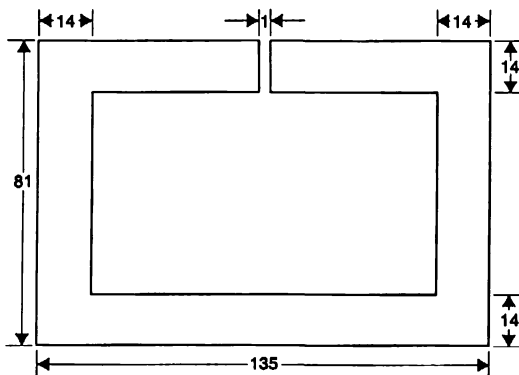
V limitě, když se T blíží absolutní nule, M se blíží k M_{sat} . Roste-li teplota, magnetizace klesá a dosáhne nulové hodnoty při curieově teplotě. Body na *obr. 36.15* znázorňují výsledky měření v případě niklu. Shoda s teoretickou křivkou je velmi dobrá. I když tedy nechápeme základní mechanismus feromagnetizmu, obecné rysy teorie se zdají správné.

Nakonec je nutné zmínit ještě jednu znepokojující okolnost našeho pokusu – pochopit feromagnetizmus. Zjistili jsme, že nad určitou teplotou se látka chová jako paramagnetická a její magnetizace M je úměrná H (nebo B). Pod touto teplotou by se látka měla spontánně zmagnetizovat. To jsme však při měření magnetizační křivky železa neobjevili! Železo se permanentně zmagnetizovalo až *poté*, co jsme jej „zmagnetizovali“ my. Podle představ, které jsme právě prodiskutovali, by se mělo zmagnetizovat spontánně. Co není v pořádku? Ukazuje se, že kdybyste pozorovali *dostatečně malý* krystalek železa nebo niklu, zjistili byste, že je opravdu úplně zmagnetizován!

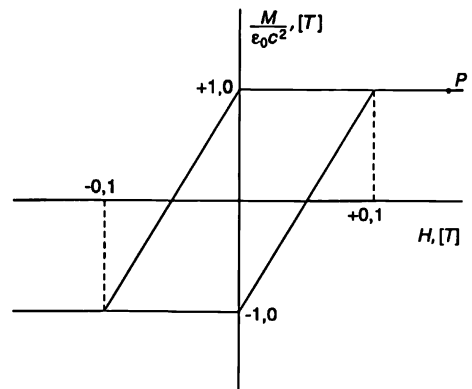
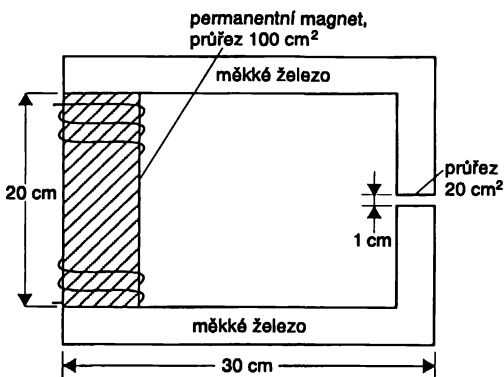
Ve velkém kuse železa se však nacházejí menší oblasti, *domény*, které jsou zmagnetizovány v různých směrech, takže v makroskopickém měřítku je *střední* magnetizace nulová. V každé oblasti je však nenulová magnetizace téměř stejná jako M_{sat} . Důsledkem této doménové struktury je to, že hrubé rysy velkých kusů látky se podstatně liší od mikroskopických vlastností, o nichž jsme hovořili dosud. Jak se makroskopické magnetické látky chovají ve skutečnosti, o tom bude řeč v následující kapitole.

PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 36.1** ■ Koule o poloměru a je homogenně zmagnetována tak, že její magnetický moment je roven $\frac{4}{3}\pi a^3 M$, kde M je magnetizace. Jaké by musely být proudy protékající po povrchu koule, které by vně koule vytvářely stejné magnetické pole? Ukažte, že tyto proudy mají též celkový magnetický moment.
- 36.2** ■ Jádru magnetu je vyrobeno z měkkého železa a obmotáno 2150 závitů drátu, jímž protéká proud 5 A. Křivka závislosti B na H je na obrázku. Odhadněte velikost magnetického pole ve vzduchové mezeře magnetu. (Viz obrázek – všechny rozměry jsou udány v centimetrech.) Které hlavní efekty můžeme zanedbat při řešení úlohy? *Poznámka.* Protože experimentální závislost B na H je nelineární, není třeba se znepokojovat tím, že úlohu nemůžeme řešit analyticky a přesně.



- 36.3** ■ Zařízení se skládá z permanentního magnetu a dvou pólových nástavců vyrobených z měkkého železa (viz obrázek). Protéká-li vinutím silný proud, železo se zmagnetuje až k bodu P na křivce závislosti M na H (obrázek). Najděte magnetické pole v mezeře po vypnutí proudu za předpokladu, že relativní permeabilita měkkého železa je nekonečná a okrajové jevy na krajích mezery lze zanedbat.



- 36.4** ■ Velmi dlouhá železná válcová tyč je homogenně zmagnetována tak, že vektor magnetizace M směřuje podél osy tyče. Najděte B a H uvnitř tyče při zanedbání okrajových jevů. Čemu bude rovna magnetická indukce B uprostřed úzké podlouhlé dutiny vyříznuté podél osy tyče?

Magnetické látky

37.1 PODSTATA FEROMAGNETIZMU

37.2 TERMODYNAMICKÉ VLASTNOSTI

37.3 HYSTEREZNÍ KŘIVKA

37.4 FEROMAGNETICKÉ LÁTKY

37.5 ZVLÁŠTNÍ MAGNETICKÉ LÁTKY

Viz Ch. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, J. Wiley and Sons, Inc., New York 1956, český přehled *Úvod do fyziky pevných látek*, Academia, Praha 1985

37.1 PODSTATA FEROMAGNETIZMU

V této kapitole prodiskutujeme chování a zvláštnosti feromagnetických látek a některých jiných zvláštních magnetických látek. Dříve než však přistoupíme ke zkoumání magnetických látek, si velmi stručně zopakujeme něco z obecné teorie magnetizmu, z předcházející kapitoly.

Zaprvé, představili jsme si, že v látce existují „atomové“ proudy, které vyvolávají magnetizmus, a popsali jsme je pomocí objemové hustoty proudu $\mathbf{j}_{\text{mag}} = \nabla \times \mathbf{M}$. Zdůrazňujeme, že tyto proudy nemusí reprezentovat *skutečné* proudy. I když je látka rovnoměrně zmagnetizována, proudy se *ve skutečnosti* neruší úplně; to znamená, že cirkulující proudy elektronu v jednom atomu se nepřekrývají s cirkulujícími proudy elektronu v jiném atomu tak, že jejich součet je přesně nulový. I v rámci jediného atomu *není* rozdělení magnetizmu zcela rovnoměrné. Například v atomu železa je magnetizace rozložena na přibližně kulové sloupce, která se nenachází ani příliš blízko ani příliš daleko od jádra. Ve svých detailech je tedy magnetizmus látek dost komplikovaný jev, v němž se objevuje mnoho nepravidelností. Nyní se však povzneseme nad tuto složitost detailů a podíváme se na magnetické jevy z hlediska hrubšího, zprůměrovaného modelu. Pak je pravdivé tvrzení, že *střední* proud uvnitř látky, v každé konečné oblasti, která je dost velká v porovnání s rozměry atomu, je nulový, je-li $\mathbf{M} = 0$. Magnetizaci v jednotce objemu, \mathbf{j}_{mag} apod. na nynější úrovni našeho výkladu rozumíme jejich střední hodnoty v oblastech, které jsou velké v porovnání s objemem jednoho atomu.

V poslední kapitole jsme také zjistili, že feromagnetické látky mají zajímavou vlastnost: nad určitou teplotou jsou jen slabě magnetické, zatímco magnetickými se stávají pod ní. Tuto skutečnost lze snadno demonstrovat. Kousek niklového drátu je při pokojové teplotě přitahován k magnetu. Pokud jej však ohřejeme pomocí plynového kahanu nad jeho Curieovu teplotu, přestane být magnetickým a magnet jej nepřitahuje ani tehdy, kdy je u něj velmi blízko. Necháme-li vodič při

ochlazování ležet u magnetu, magnet ho znovu přitáhne v okamžiku, kdy teplota klesne pod kritickou hodnotu!

Obecná teorie feromagnetizmu, kterou budeme používat, předpokládá, že za magnetizaci jsou odpovědné spiny elektronů. Elektronové spiny mají spin jedna polovina a nesou magnetický moment, který je roven Bohrovu magnetonu, $\mu = \mu_B = q_e \hbar / 2m$. Spin elektronu směřuje „nahoru“, nebo „dolů“. Jelikož je náboj elektronu záporný, pak směřuje-li spin nahoru, má *záporný* magnetický moment, když dolů, magnetický moment je *kladný*. V našich obvyklých konvencích má magnetický moment μ elektronu opačnou orientaci než spin. Zjistili jsme, že energie určitým způsobem orientovaného magnetického dipólu v daném vnějším poli B je $-\mu \cdot B$; energie rotujícího elektronu však závisí i na orientaci sousedních spinů. Směřuje-li např. v železe moment sousedního atomu nahoru, pak i následující atom má silnou tendenci směřovat nahoru. Právě to způsobuje silný magnetismus železa, kobaltu a niklu – všechny magnetické momenty chtějí být rovnoběžné. První věc, kterou musíme vysvětlit, je: *proč je to právě tak?*

Krátce po vzniku kvantové mechaniky si lidé všimli, že existuje velmi silná *zdánlivá* síla (ne magnetická ani jiná známá reálná síla, pouze zdánlivá), která se snaží donutit sousední elektrony, aby jejich spiny měly *opačný* směr. Takové síly úzce souvisejí s chemickými valenčními silami. V kvantové mechanice existuje zákon, *vylučovací princip*, který říká, že dva elektrony se nemohou nacházet v přesně stejném stavu, že nemohou existovat ve stejných podmínkách, ve stejné poloze se stejnou orientací spinu.⁴⁷⁾ Jsou-li například v témže bodě, jediná možnost je, že jejich spiny mají opačnou orientaci. Existuje-li tedy mezi atomy oblast, v níž se elektrony sdružují (jako při chemické vazbě), a chceme-li přidat elektron na místo, kde už se jeden nachází, můžeme to udělat jen tak, že spin druhého elektronu směřuje proti spinu prvního. Rovnoběžné spiny se přičítají zákonu, nejsou-li elektrony v dostatečné vzdálenosti. Důsledkem je, že pár elektronů s rovnoběžnými spiny blízko sebe má mnohem větší energii než pár elektronů s opačnými spiny; výsledný efekt je stejný, jako kdyby existovala síla, která usiluje o převrácení jednoho ze spinů. Této síle se občas říká *výměnná síla*, ale to není vhodný název: pouze zvyšuje záhadnost jevu. Snaha elektronů mít opačné spiny je pouhým důsledkem vylučovacího principu. Ve skutečnosti to vysvětluje fakt, že ve většině látek *není* magnetismus! Spiny volných elektronů na okraji atomů úporně usilují o uspořádání do opačných směrů. Problém spočívá v tom, jak vysvětlit, proč je v látkách podobných železu právě opačná situace, než bychom očekávali.

Očekávaný jev uspořádávání spinů do stejného směru jsme popsali tak, že jsme do výrazu pro energii přidali vhodný dodatečný člen a řekli si, že vytváří-li elektronové magnety střední magnetizaci M , má magnetický moment elektronu silnou tendenci mít stejnou orientaci jako střední magnetizace atomů v sousedství. Pro dvě možné orientace spinu tak máme⁴⁸⁾

$$\begin{aligned} \text{Energie spinu „nahoru“} &= +\mu \left(H + \frac{\lambda M}{\epsilon_0 c^2} \right) \\ \text{Energie spinu „dolů“} &= -\mu \left(H + \frac{\lambda M}{\epsilon_0 c^2} \right). \end{aligned} \tag{37.1}$$

47) Viz kapitola 4, díl 3.

48) Tyto rovnice zapisujeme pomocí $H = B - M/\epsilon_0 c^2$, a ne pomocí B ve shodě s tím, co jsme dělali v předcházející kapitole. Jestliže vám to připadá vhodnější, můžete psát $W = \pm \mu B_s = \pm \mu (B + \lambda' M/\epsilon_0 c^2)$, přičemž $\lambda' = \lambda - 1$. Je to úplně jedno.

Když se ozřejmilo, že kvantová mechanika dokáže vysvětlit obrovské síly, které usilují o zorientování spinů (ačkoliv tyto síly mají zřejmě špatné znaménko), bylo navrženo, že feromagnetismus je způsoben stejnou silou, ale díky složitosti železa a díky množství elektronů, které jsou ve hře, může být znaménko interakční energie opačné. Od doby, kdy lidé na tuto myšlenku přišli, tj. zhruba od roku 1927, kdy začali chápat kvantovou mechaniku, mnozí uskutečnili různé odhady a polorealistické výpočty ve snaze odvodit teoretickou předpověď hodnoty λ . I nejnovější výpočty energie spinů dvou elektronů v železe, předpokládající přímou interakci mezi dvěma elektrony v sousedních atomech, stále vedou k *nesprávnému znaménku*. I v současnosti se při vysvětlování feromagnetismu předpokládá, že to nějakým způsobem souvisí se složitostí situace a že někdo další, komu se podaří uskutečnit výpočet složitějšího případu, najde správnou odpověď!

Věří se, že je-li spin jednoho z elektronů ve vnitřní slupce, který je odpovědný za magnetismus, orientován nahoru, nutí okolní vodivostní elektrony ve vnější slupce mít opačný spin. Takové chování lze očekávat, neboť vodivostní elektrony se pohybují ve stejné oblasti jako „magnetické“ elektrony. Jak se tak pohybují, mohou vyvolat svou snahu orientovat se „vzhůru nohama“ u následujícího atomu, takže jeden „magnetický“ elektron nutí vodivostní elektrony do opačného směru a vodivostní elektron zase nutí nejbližší „magnetický“ elektron, aby směřoval *proti němu*. Tato dvojitá interakce je ekvivalentní interakci, která usiluje o uspořádání momentů „magnetických“ elektronů do *stejného* směru. Jinými slovy, snaha spinů zaujmout stejný směr je důsledkem přítomnosti zprostředkovatele, jehož spin je do jisté míry opačný vůči oběma spinům. Tento mechanismus nevyžaduje, aby všechny vodivostní elektrony byly „vzhůru nohama“. Mají-li jen trochu snahu směřovat častěji dolů, i to postačuje k tomu, aby „magnetické“ elektrony směřovaly nahoru. Podle těch, kteří provedli podobné výpočty, je tento mechanismus příčinou feromagnetismu. Je však třeba zdůraznit, že nikdo dnes nedokáže vypočítat velikost λ na základě toho, že daná látka je, řekněme, na 26. místě v periodické soustavě prvků. Prostě tento jev ještě stále úplně nechápeme.

Nyní pokračujeme v teorii, a později se vrátíme a prodiskutujeme určitou chybu, kterou jsme udělali na cestě, po níž postupujeme. Směřuje-li magnetický moment některého elektronu nahoru, přispívá k jeho energii jak magnetické pole, tak i snaha spinů zaujmout stejný směr. Jelikož je energie nižší, jsou-li spiny rovnoběžné, lze si výsledek představit jako účinek „efektivního vnitřního pole“. Ale zapamatujte si, že to *není* skutečná *magnetická* síla; jde tu o vzájemné působení, které je mnohem složitější. Ať je to jakkoliv, rovnice (37.1) budeme považovat za vztahy pro energie dvou spinových stavů „magnetického“ elektronu. Při teplotě T je relativní pravděpodobnost těchto dvou stavů úměrná $e^{-\text{energie}/kT}$, což můžeme zapsat jako $e^{\pm x}$, přičemž $x = \mu(H + \lambda M/\epsilon_0 c^2)/kT$. Vypočteme-li dále střední hodnotu magnetického momentu, vyjde nám (jako v předcházející kapitole)

$$M = N\mu \tanh x. \quad (37.2)$$

Dále bychom chtěli vypočítat vnitřní energii látky. Všimneme si, že energie elektronu je přesně úměrná magnetickému momentu, takže výpočet středního magnetického momentu a výpočet střední energie jsou stejné, jen s tím rozdílem, že místo μ v (37.2) je třeba psát $-\mu B$, tj. $-\mu(H + \lambda M/\epsilon_0 c^2)$. Střední energie pak je

$$\langle W \rangle_{\text{str}} = -N\mu \left(H + \frac{\lambda M}{\epsilon_0 c^2} \right) \tanh x.$$

To však není úplně správné. Člen $\lambda M/\epsilon_0 c^2$ je výsledkem vzájemného působení všech možných *párů* atomů a musíme si pamatovat to, že každý pár musíme započítat jen *jednou*. (Přidáme-li

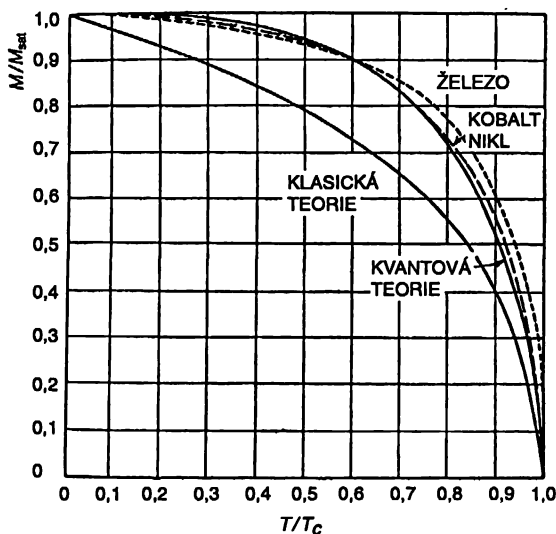
energii jiného elektronu v poli ostatních, započítali jsme část první energie ještě jednou.) Proto musíme vydělit *vzájemný interakční člen* dvěma a náš vztah pro energii se změnil na

$$\langle W \rangle_{\text{str}} = -N\mu \left(H + \frac{\lambda M}{2 \epsilon_0 c^2} \right) \operatorname{tgh} x. \quad (37.3)$$

V předcházející kapitole jsme objevili zajímavou věc: pod určitou teplotou lze pro látku najít takové řešení rovnic, v němž *není* magnetický moment *nulový* dokonce ani tehdy, kdy je magnetizační pole nulové. Zjistili jsme, že dosadíme-li $H=0$ do (37.2), dostaneme

$$\frac{M}{M_{\text{sat}}} = \operatorname{tgh} \left(\frac{T_c}{T} \frac{M}{M_{\text{sat}}} \right), \quad (37.4)$$

kde $M_{\text{sat}} = N\mu$ a $T_c = \mu\lambda M_{\text{sat}} / k\epsilon_0 c^2$. Vyřešíme-li tuto rovnici (graficky nebo jinak), zjistíme, že poměr M/M_{sat} jako funkce T/T_c je dán křivkou, která je na *obr. 37.1* označena jako kvantová teorie. Čárkované křivky označené kobalt, nikl představují experimentální údaje pro krystaly těchto prvků. Teorie a experiment se uspokojivě shodují. Obrázek znázorňuje i předpověď klasické teorie, v níž je výpočet založen na předpokladu, že atomové magnety mohou mít libovolnou orientaci v prostoru. Vidíte, že tento předpoklad vede k předpovědi, která se ani neblíží experimentálním údajům.



Obr. 37.1 Spontánní magnetizace ($H=0$) feromagnetických krystalů jako funkce teploty (Obrázek je reprodukován se souhlasem Encyklopedie Britannica.)

Ale i předpověď kvantové teorie se při nízkých i vysokých teplotách liší od pozorovaného chování. Příčinou je dost hrubé přiblížení, které jsme udělali v teorii. Předpokládáme, že energie atomu závisí na *střední* magnetizaci sousedních atomů. Jinými slovy, každý spin nahoru v sousedství daného atomu způsobí, díky kvantově mechanickému jevu uspořádání spinů, svůj

příspěvek k energii. Kolik spinů však směřuje nahoru? V průměru je mfrou jejich počtu magnetizace M , ale pouze v *průměru*. Někde u některého atomu mohou *všechny* spiny susedů směřovat nahoru. Pak bude jeho energie větší než průměr. U některého atomu mohou být některé spiny nahoru a jiné dolů, jejich průměr může být nulový, a energie atomu, která pochází z interakce spinů, může být *nulová*. A podobně. Měli bychom použít nějaký složitější způsob zprůměrování, neboť atomy na různých místech mají různé okolí a počty spinů nahoru a dolů jsou u různých atomů různé. Místo toho, abychom uvažovali zprůměrovaný vliv na jeden atom, měli bychom každý z atomů sledovat v jeho skutečné poloze, spočítat energii a pak určit *střední energii*. Jak však zjistíme, kolik spinů směřuje v susedství nahoru a kolik dolů? To se, samozřejmě, právě snažíme vypočítat, kolik jich je nahoru a kolik dolů, takže jsme dospěli k velmi složitému vzájemně propletenému problému korelací, který se dodnes nepodařilo vyřešit. Je to přitažlivý a vzrušující problém, který visí ve vzduchu dlouhé roky a o kterém psali články mnozí fyzikové zvučných jmen, ale stále není úplně vyřešen.

Ukazuje se, že při nízkých teplotách, kdy jsou skoro všechny atomové momenty nasměřovány nahoru a jen málo z nich dolů, je snadné najít řešení; podobné je to při vysokých teplotách, daleko od Curieovy teploty T_c , kdy jsou všechny momenty orientovány náhodně. Často je snadné spočítat malé odchylky od nějaké jednoduché, idealizované situace, takže lidé docela jasně chápou, proč existují odchylky od jednoduché teorie při nízkých teplotách. Na základě fyzikálních úvah lze také pochopit, proč by ze statistických důvodů *měly* existovat odchylky od magnetizace i při vysokých teplotách. Ale detailní chování kolem Curieova bodu nebylo spočítáno nikdy. Je to zajímavý problém, na němž by vám někdy v budoucnosti stálo za to pracovat, problém, který nebyl zatím vyřešen.

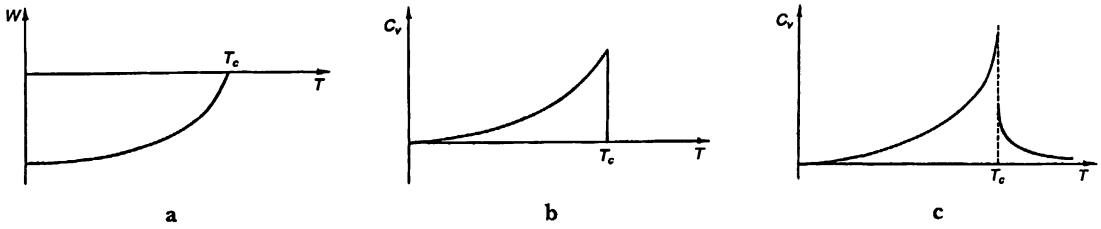
37.2 TERMODYNAMICKÉ VLASTNOSTI

V poslední kapitole jsme si vytvořili základnu pro výpočet termodynamických vlastností feromagnetických látek. Ty přirozeně souvisejí s vnitřní energií krystalu, která zahrnuje vzájemné působení různých spinů (viz vztah (37.3)). Při výpočtu energie spontánní magnetizace pod Curieovým bodem můžeme položit $H=0$ v rovnici (37.3) a vezmeme-li v úvahu, že tgh $x = M/M_{\text{sat}}$, najdeme střední energii úměrnou M^2 :

$$\langle W \rangle_{\text{str}} = - \frac{N\mu\lambda M^2}{2\varepsilon_0 c^2 M_{\text{sat}}}. \quad (37.5)$$

Znázorníme-li nyní graf hustoty energie, související s magnetizmem, jako funkci teploty, získáme křivku na *obr. 37.2a*, která představuje (až na opačné znaménko) druhou mocninu funkce, na *obr. 37.1*. Určíme-li *měrnou tepelnou kapacitu* takové látky, dostaneme křivku, která je vlastně derivací funkce z *obr. 37.2a*. Znázorňuje ji *obr. 37.2b*. Tato křivka s růstem teploty pomalu roste, ale najednou prudce klesá k nule při $T = T_c$. Tento prudký pokles je důsledkem změny sklonu křivky magnetizační energie a dochází k němu přesně v Curieově bodě. To, že se uvnitř železa nebo niklu děje něco zvláštního, bychom mohli zjistit i bez magnetických měření: na základě měření termodynamických vlastností. Ve skutečnosti však jak experiment, tak i vylepšená teorie (která zahrnuje fluktuace) naznačují, že taková jednoduchá křivka je chybná a že reálná situace je mnohem složitější. Křivka u vrcholu roste rychleji a pak klesá k nule pomaleji. I když je teplota dost vysoká na to, aby byly spiny *v průměru* náhodně orientovány, přece existují lokální oblasti, v nichž je

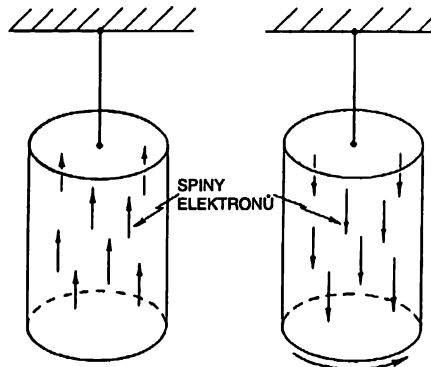
polarizace nenulová, a v těchto oblastech mají spiny stále ještě určitou interakční energii, která jen pomalu zaniká při dalším zvyšování teploty a neuspořádanosti.



Obr. 37.2 Hustota energie a měrná tepelná kapacita feromagnetického krystalu

Skutečná křivka tedy vypadá jako na *obr. 37.2c*. Jednou ze zajímavých úloh teoretické fyziky dneška je najít přesný teoretický popis chování měrné tepelné kapacity v okolí Curieova přechodu – je to výzva, přitažlivý problém, který se dosud nepodařilo vyřešit. Přirozeně, tento problém velice úzce souvisí s tvarem magnetizační křivky v této oblasti.

Dále popíšeme některé experimenty, jiné než termodynamické, které dokazují, že v našem výkladu magnetizmu je alespoň *kousek pravdy*. Když se při nízké teplotě látka magneticky saturuje, je M velmi blízké M_{sat} ; skoro všechny spiny a jejich magnetické momenty jsou rovnoběžné. Můžeme to dokázat i experimentálně. Zavěsme tyčový magnet na tenké vlákno a obklopme jej cívkou, takže můžeme změnit směr magnetického pole, aniž bychom se magnetu dotkli, nebo na něj působili momentem síly. Je to velmi obtížný experiment, protože magnetické síly jsou tak obrovské, že každá nepravidelnost, výchylka nebo porucha v železe způsobí náhodný moment síly. Experiment se však podařilo uskutečnit se vši opatrností, která omezila náhodné momenty síly na minimum. Pomocí magnetického pole, které vytváří cívka obklopující tyč, převrátíme najednou všechny atomové magnetické momenty v tyči. Přitom, samozřejmě, změníme i momenty hybnosti všech spinů (*obr. 37.3*) z orientace nahoru do směru dolů. Má-li se při převrácení spinů zachovat moment hybnosti, musí dojít k opačné změně momentu hybnosti tyče. Magnet se musí začít otáčet. Opravdu, provedeme-li takový pokus, zjistíme, že magnet se pootočí. Můžeme změřit celkový moment hybnosti odevzdaný magnetu jako celku; musí být roven prostě N krát \hbar , změně momentu hybnosti všech spinů.



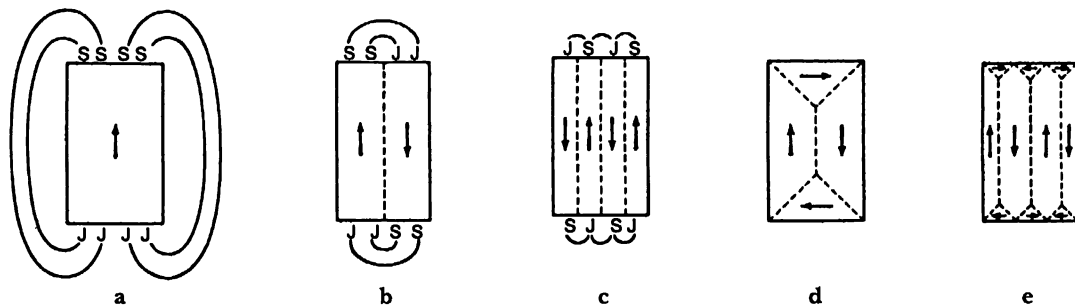
Obr. 37.3 Když se změní magnetizace železná tyče, získá tyč úhlovou rychlost

Tímto způsobem změřený poměr momentu hybnosti a magnetického momentu vychází v soulahu s výpočty s odchylkou kolem 10%. Ve skutečnosti jsme při výpočtu předpokládali, že atomové magnetické momenty jsou výlučně důsledkem spinů elektronů, ale kromě toho ve většině látek existuje i nějaký orbitální pohyb. Orbitální pohyb je vázán na mřížku a přispívá k magnetizmu jen několika procenty. Vezmeme-li $M_{\text{sat}} = N\mu$, za hustotu železa zvolíme 7900 kg/m^3 a za μ magnetický moment elektronu, vyjde saturační magnetické pole asi 2 T. Experimenty ukazují, že ve skutečnosti je jeho hodnota přibližně 2,15 T. To je typická 5 až 10procentní odchylka jako důsledek zanedbání příspěvku orbitálních momentů hybnosti, které jsme do naší analýzy nezahrnuli. Drobný nesouhlas s gyromagnetickými měřeními je proto snadno pochopitelný.

37.3 HYSTEREZNÍ KŘIVKA

Na základě naší teoretické analýzy jsme dospěli k závěru, že pod určitou teplotou se feromagnetická látka spontánně zmagnetizuje a všechny magnetické momenty v ní zaujmou jeden směr. Víme však, že v případě obyčejného kusu *nezmagnetizovaného* železa to není pravda. Proč se celé železo nezmagnetizuje? Pokusíme se to vysvětlit pomocí obr. 37.4. Předpokládejme, že celý kus železa je monokrystal tvaru jako na obr. 37.4a a celý je zmagnetizován jedním směrem. Výsledkem je obrovské vnější magnetické pole, které má velkou energii. energii pole můžeme snížit, podaří-li se nám dosáhnout, aby jedna strana bloku byla zmagnetizována nahoru a opačná strana dolů jako na obr. 37.4b. Samozřejmě, vně železa zaujímá pole menší objem a energie je menší.

Ale počkejte! Ve vrstvě mezi oběma oblastmi máme elektrony se spinem nahoru blízko elektronů se spinem dolů. Feromagnetismus se objevuje jen v takových látkách, v nichž se energie sníží, mají-li elektrony spiny *stejněho*, a ne opačného směru. Nějakou energii jsme tedy přidali v oblasti, kterou označuje na obr. 37.4b přerušovaná čára; někdy je tato energie nazývána *energie stěny*. Oblast, v níž má magnetizace jeden směr, se nazývá *doména*. Na hranici – stěně – mezi dvěma doménami, kde atomy na opačných stranách mají spiny různých směrů, existuje určitá plošná hustota energie. Při našem popisu jsme předpokládali, že sousední atomy mají přesně opačné směry spinů, ale ukazuje se, že v přírodě je přechod pozvolnější. Podobné maličkosti nás však nyní nemusí trápit.



Obr. 37.4 Vytváření domén v monokrystalu železa (Podle knihy Charlese Kittela *Introduction to Solid State Physic*, John Wiley nad Sons, New York, 2. vyd., 1956).

Otázka nyní zní: Kdy je výhodnější, aby vznikla stěna, a kdy ne? Závisí to na velikosti domén. Představme si, že blok zvětšíme tak, že se jeho rozměry zdvojnásobí. Objem prostoru, který je zaplněn magnetickým polem dané velikosti, se *zosminásobí* a i energie magnetického pole, která je

úměrná objemu, bude osmkrát větší. Plocha povrchu mezi oběma doménami, na níž závisí energie stěn, bude však *čtyřmásobná*. Je-li tedy kus železa dostatečně velký, vyplatí se jej rozdělit na několik domén. Proto jen velmi drobné krystalky železa mají jedinou doménu. Každý větší objekt, větší než přibližně setina milimetru, bude obsahovat alespoň jednu doménovou stěnu; tělesa velikostí kolem centimetru budou rozdělena na mnoho domén, jak je znázorněno na obrázku. Dělení na domény pokračuje do té doby, dokud *energie, kterou je třeba dodat na vytvoření doménové stěny, není stejná jako pokles energie magnetického pole mimo krystal*.

Ve skutečnosti objevila příroda ještě jeden způsob, jak snížit energii. Vně nemusí být žádné magnetické pole, pokud se malá trojúhelníková oblast zmagnetizuje do strany, jako na *obr. 37.4d*⁴⁹⁾. Při uspořádání jako na *obr. 37.4d* není vnější pole, přičemž doménové stěny se jen o málo zvětšily.

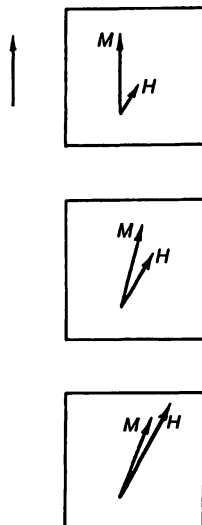
To však s sebou nese nový problém. Ukazuje se, že když zmagnetizujeme krystal železa, jeho délka ve směru magnetizace se změní. Ideální krychle, zmagnetizovaná řekněme nahoru, přestane být dokonalou krychlí. Svislý rozměr se bude lišit od vodorovného. Tomuto jevu se říká *magnetostrikce*. Díky těmto geometrickým změnám se malé trojúhelníčky na *obr. 37.4d* nevejdou na příslušné místo, jelikož se krystal v jednom směru příliš protáhl a v druhém zase zkrátil. Samozřejmě, ve skutečnosti se *vejdou*, ale musí se deformovat; vznikají tak určitá mechanická napětí. Takové uspořádání přispívá *další* dodatečnou energií. Rovnováha všech těchto energií určuje, jaké je konečné komplikované uspořádání domén v kusu nezmagnetizovaného železa.

Co se však stane, když železo vložíme do vnějšího magnetického pole? Pro jednoduchost si všimněme krystalu, jehož domény vypadají jako na *obr. 37.4d*. Jakým způsobem se krystal zmagnetizuje, když zapneme vnější magnetické pole ve směru nahoru? Za prvé, stěna střední domény se *posune na stranu* (doprava), a sníží tak energii. Posune se, aby se zvětšila oblast se spiny nahoru v porovnání s oblastí se spiny dolů. Více elementárních magnetů má směr pole, čímž se snížila energie. Vložíme-li tedy kousek železa do slabého pole (tj. na začátku magnetizace), doménové stěny se dají do pohybu a pohltnou oblasti, které jsou zmagnetizovány ve směru proti poli. Když pole dále roste, celý krystal se postupně mění na jedinou velkou doménu, kterou vnější pole udržuje orientovanou ve svém směru. V silném magnetickém poli dává krystal přednost směru pole *právě proto*, že se tím snižuje jeho energie ve vnějším poli. Energie vlastního pole krystalu už nehraje podstatnou úlohu.

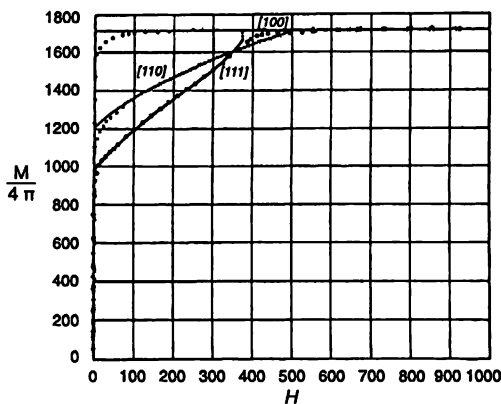
Co se stane, není-li geometrické uspořádání krystalu tak jednoduché? Co když má osa krystalu a jeho spontánní magnetizace jeden směr, ale pro vnější pole zvolíme nějaký jiný směr, řekněme pod úhlem 45°? Očekávali bychom, že domény se změní tak, aby magnetizace byla rovnoběžná s polem, a znovu jako předtím se nakonec spojí v jednu doménu. V případě železa však není vše tak jednoduché, *neboť energie potřebná na zmagnetizování krystalu závisí na směru magnetizace vůči krystalovým osám*. Je poměrně snadné zmagnetizovat železo ve směru rovnoběžném s krystalovými osami, ale v jiných směrech (např. pod úhlem 45°) je na zmagnetizování potřebná větší energie. Zapneme-li tedy magnetické pole v tomto směru, rostou nejdříve domény, které jsou zmagnetizované v tom preferovaném směru, který je blízký směru vnějšího pole. Magnetizace má nakonec právě tento preferovaný směr. *Až v mnohem silnějších polích* se magnetizace postupně blíží ke směru pole, jak to naznačuje *obr. 37.5*.

49) Možná, že vás překvapuje, jak spiny, které mohou být orientovány buď nahoru nabo dolů, mohou směřovat do strany. Je to dobrá otázka, ale nyní se jí nebudeme trápit. Postavíme se na stanovisko klasické fyziky a budeme si atomové magnety představovat jako klasické dipóly, které mohou být polarizovány do strany. Je nutné naučit se mnoho z kvantové mechaniky, abyste pochopili, jak mohou být veličiny zároveň kvantovány „nahoru dolů“ i „doprava doleva“.

Na obr. 37.6. jsou znázorněny výsledky pozorování magnetizačních křivek monokrystalů železa. Abyste jim rozuměli, je třeba říci několik slov na vysvětlení označení, které je používáno pro popis směrů v krystalu. Krystal lze řezat mnoha způsoby na atomové roviny.



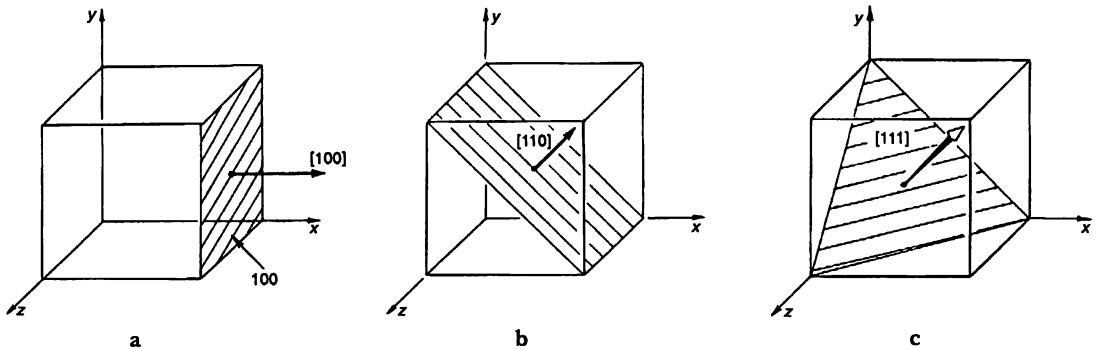
Obr. 37.5 Magnetizační pole H , které svírá s krystalovou osou určitý úhel, postupně mění směr magnetizace, aniž by měnilo svou velikost



Obr. 37.6 Složka M rovnoběžná s H pro různé směry H vzhledem ke krystalovým osám (Z knihy F. Bittera *Introduction to Ferromagnetism*. McGraw-Hill Book Co., Inc., 1937.).

Každý, kdo se někdy procházel po sadu nebo vinohradu, to dobře zná – a je fascinující se na to dívat: Podíváte-li se jedním směrem, vidíte řadu stromů; podíváte-li se jiným směrem, uvidíte jinou řadu atd. Podobně krystal má celou množinu rovin s atomy, které mají následující důležitou vlastnost (pro jednoduchost vezměme kubický krystal): Podíváme-li se, kde tyto roviny protínají souřadnicové osy, zjistíme, že *převrácené hodnoty* tří vzdáleností od počátku jsou v celočíselném poměru. Tato tři celá čísla definují roviny. Na obr. 37.7a je například znázorněna rovina rovnoběž-

ná s rovinou yz . Ta se označuje $[100]$, neboť převrácené hodnoty souřadnicových průsečíků s osami y a z jsou nulové. Směr kolmý na tuto rovinu (v kubickém krystalu) je označován stejným souborem čísel. Toto označení lze snadno pochopit v případě kubického krystalu, neboť tam jsou indexy $[100]$ vlastně souřadnicemi vektoru, který má jednotkovou složku x a nulové složky y a z . Směr $[110]$ svírá úhel 45° s osou x (viz obr. 37.7b); směr $[111]$ je směrem úhlopříčky v krychli (obr. 37.7c).



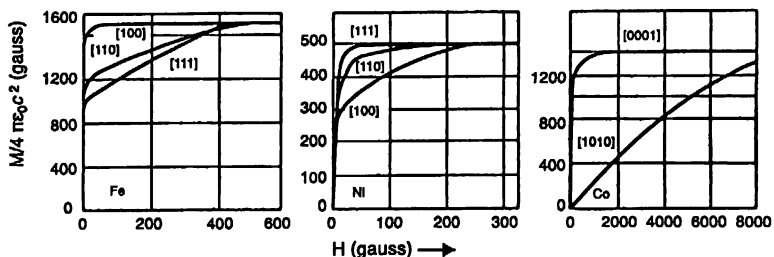
Obr. 37.7 Způsob označování rovin v krystalu

Nyní se vraťme k obr. 37.6. Vidíme v něm magnetizační křivky monokrystalu železa pro různé směry. Nejdříve si všimněte, že u velmi slabých polí, tak slabých, že je na obrázku téměř není možné zobrazit, magnetizace prudce roste a dosáhne velkých hodnot. Má-li pole směr osy $[100]$ (jeden z těch „pěkných směrů“, v němž lze krystal snadno zmagnetizovat), naroste křivka k vysoké hodnotě, trochu se zakříví a vzápětí se saturuje. Vysvětlení je takové, že existující domény velmi snadno vymizely. Už slabé pole dokáže uvést doménové stěny do pohybu a donutit je pohltnout „špatně“ orientované domény. Monokrystal železa má obrovskou magnetickou permeabilitu, mnohem větší než obyčejné polykrystalické železo. Dokonalý krystal se zmagnetizuje velmi snadno. Proč se však magnetizační křivka vůbec zakřívuje? Proč nevyšplhává k saturační hodnotě? Přesně to nevíme. Možná se vám to jednou podaří vysvětlit. Víme jen, proč je křivka plochá při velkých polích. Je-li celý blok jedinou doménou, nemůže dostatečné magnetické pole přidat žádnou magnetizaci (ta už je rovna M_{sat}), všechny spiny elektronů už mají směr pole.

Co se stane, pokusíme-li se nyní totéž udělat ve směru $[110]$, který s krystalovými osami svírá úhel 45° ? Zapneme slabé pole a magnetizace v důsledku růstu domén vzroste. Zvyšujeme-li dále pole zjistíme, že je třeba jej zvýšit pořádně, abychom dosáhli saturace. Nyní se totiž odvrací od svého „snadného“ směru. Je-li to správné vysvětlení, musí se průběh extrapolace křivky označené $[110]$ se vswislou osou nacházet na $1/\sqrt{2}$ -násobku saturační hodnoty. Ukazuje se, že je skutečně velmi, velmi blízky $1/\sqrt{2}$. Podobně zjistíme ve směru $[111]$, který má směr úhlopříčky krychle, že extrapolace křivky protíná vswislou osu při hodnotě $1/\sqrt{3}$ -násobku saturace přesně tak, jak bychom očekávali.

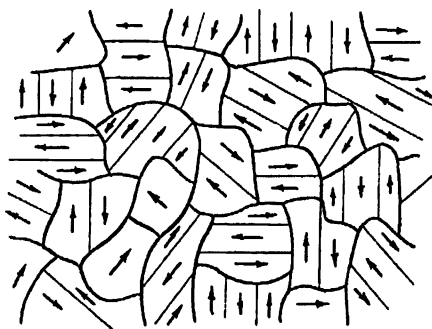
Obr. 37.8 znázorňuje příslušnou situaci v případě dalších dvou látek, niklu a kobaltu. Nikl se od železa liší. V něm se „snadnou“ osou magnetizace ukazuje směr $[111]$. Kobalt má šestiúhelníkovou krystalickou strukturu, a proto bylo třeba pro tento případ zdokonalit způsob označení os. V základně šestiúhelníka je nutné rozmístit tři osy, čtvrtá je na ně kolmá, proto je třeba čtyř indexů. Směr $[0001]$ je směr osy šestiúhelníka, osa $[1010]$ je na ni kolmá. Vidíme, že krystaly různých látek se chovají různě.

MAGNETICKÉ LÁTKY

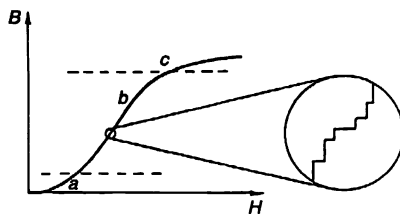


Obr. 37.8 Magnetizační křivky pro monokrystaly železa, niklu a kobaltu (Z knihy Charlese Kittela, *op. cit.*)

Musíme si však nyní všimnout i polykrystalické látky, jakou je například obyčejný kousek železa. V takovýchto látkách se nachází velké množství maličkých krystalů, jejichž krystalové osy směřují nejrůznějšími směry. *Nejsou však totožné s doménami.* Vzpomeňte si, že domény byly částmi jednoho monokrystalu, ale v kusu železa je mnoho různých krystalů s osami různých směrů, jak je vidět na obr. 37.9. Uvnitř každého z těchto krystalů se také obecně budou nacházet mnohé domény. Zapneme-li slabé magnetické pole v okolí kousku polykrystalické látky, doménové stěny se dají do pohybu a domény, které mají směr výhodné „snadné“ magnetizace, začnou růst. Tento růst je reverzibilní pouze do té doby, dokud je pole velmi slabé: po vypnutí pole je magnetizace opět nulová. Tuto část magnetizační křivky jsme na obr. 37.10 označili písmenem *a*.



Obr. 37.9 Mikroskopická struktura nezmagnetizované feromagnetické látky. V každém krystalu existuje směr „snadné“ magnetizace a několik domén, které jsou obvykle spontánně zmagnetizovány právě podél tohoto směru.



Obr. 37.10 Magnetizační křivka polykrystalického železa

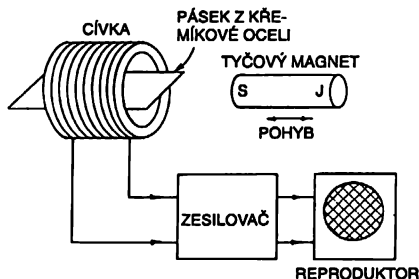
Při silnějších polích, v části *b* znázorněné magnetizační křivky, se situace podstatně komplikuje. V každém krystalku látky existují napětí a dislokace; nacházejí se v nich příměsi, nečistoty a poruchy. A při všech polích (s výjimkou těch nejslabších) na ně doménové stěny při pohybu

narážejí. Mezi doménovou stěnou a dislokací nebo hranicí zrna nebo nečistotou existuje určitá integrační energie. Pokud se k nim tedy doménová stěna přiblíží, zachytí se na nich a zůstává u nich, dokud pole nedosáhne určité hodnoty. Když se pole dále zvýší, stěna se nakonec odtrhne. Pohyb doménové stěny tedy není tak spojitý, jako v dokonalém krystalu – každou chvíli se někde zachytí a přesouvá se skoky. Kdybychom mohli pozorovat magnetizaci v mikroskopickém měřítku, viděli bychom něco takového, jako ukazuje vsuvka na obr. 37.10.

Je důležité, že tyto skoky magnetizace mohou způsobit energetické ztráty. Zaprvé, když stěna konečně překoná překážku, rychle se pohybuje k další, neboť pole už překročilo hodnotu potřebnou k nepřerušnému pohybu. Rychlý pohyb však znamená rychle se měnící magnetická pole, která v krystalu vyvolávají vířivé proudy. Tyto proudy způsobují energetické ztráty v důsledku zahřívání krystalu. Druhý jev spočívá v tom, že když se doména najednou změní, část krystalu změní své rozměry vlivem magnetostrikce. Každý náhlý posun doménové stěny má za následek slabou zvukovou vlnu, která odnáší určitou energii. V důsledku těchto jevů je druhá část magnetizační křivky *ireverzibilní*, neboť se při ní *ztrácí energie*. Takový je původ hysteretního jevu, protože pohyb stěny jedním směrem je jedno a pohyb zpět je už jiný proces a při obou se energie ztrácí. Je to jako jízda po hrbolaté cestě.

Nakonec, při dostatečně vysokých polích, kdy se všechny doménové stěny přesunuly a magnetizace každého krystalu má ten nejlepší směr, ještě stále existují krystalky, jejichž směr nejsnazší magnetizace není totožný se směrem našeho vnějšího pole. Pole je třeba ještě trochu zvýšit, abychom natočili i tyto magnetické momenty. Magnetizace nyní roste sice pomalu, ale už hladce; nacházíme se v oblasti *c* magnetizační křivky. Magnetizace nedosáhne saturační hodnoty okamžitě, neboť v poslední části křivky se atomové magnety otáčejí v silném poli. Vidíme tedy, že magnetizační křivka obvyklých polykrystalických látek (jako na obr. 37.10) nejdříve trochu roste *reverzibilním* způsobem, pak *ireverzibilně* a nakonec se pomalu zakřivuje. Samozřejmě, mezi těmito třemi oblastmi neexistují ostré přechody – jedna v druhou přechází spojitě.

Není těžké ukázat, že magnetizační proces ve střední části magnetizační křivky má skokovitý charakter, že doménové stěny se přemisťují nárazově a dokonce se při svém posunu lámou. Potřebujete na to jen cívku s mnoha tisíci závitů připojenou k zesilovači nebo reproduktoru, jak to znázorňuje obr. 37.11. Umístíte-li do středu cívky několik plátků křemíkové oceli (jaké se používá v transformátorech) a pomalu přiblížíte k tomuto zařízení tyčový magnet, skokovité změny magnetizace způsobí změny elektromotorického napětí v cívce, které lze v reproduktoru slyšet jako jednotlivá prasknutí. Posunete-li magnet ještě blíže k železu, uslyšíte celou změť praskání, zvuk, podobný šumu zrněk pšsku, dopadajících na sebe z nakloněné nádoby. Když pole roste, doménové stěny poskakují a lámou se. Tomuto jevu se říká *Barkhausenův jev*.



Obr. 37.11 Náhlé změny magnetizace ocelového pásku lze zaslechnout jako praskání v reproduktoru.

Přiblížíte-li magnet ještě víc k plátkům železa, praskot chvilí sílí a sílí, ale pak, když už je magnet velmi blízko, téměř zmizí. Proč? To proto, že už se doménové stěny nemají kam přesunout. Vyšší pole už jen otáčí magnetizaci jednotlivých domén, což je spojitý proces bez skoků.

Když nyní magnet pomalu odtahujete, takže se vracíte po druhé větvi hysterezní smyčky, domény se opět snaží vrátit do stavu s nízkou energií a znovu slyšíte zvuk, způsobený opačnými skoky. Možná si také všimnete, že když přemístíte magnet do určité polohy a pak s ním jen trochu pohybuje ze strany na stranu, šum je relativně velmi slabý. Je to opět jako s nakloněnou nádobou s pískem: Když se zrnka dostanou na své místo, opatrný pohyb je „nevyruší“. V železe malé změny magnetického pole nestačí donutit stěny, aby se přemístili přes kterýkoliv val.

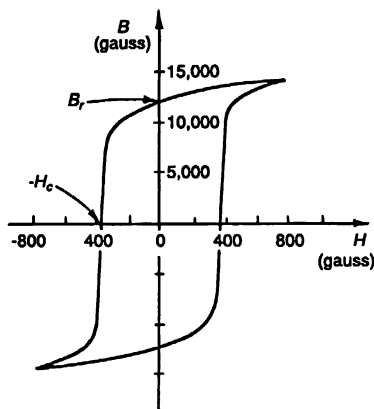
37.4 FEROMAGNETICKÉ LÁTKY

Nyní budeme mluvit o různých druzích magnetických látek, které se používají v technice, a posílíme si některých problémů, které se objevují při navrhování magnetických látek pro různé účely. Za prvé, pojem „magnetické vlastnosti železa“, který je často používán, je zavádějící; nic takového neexistuje. Železo není dobře definovaná látka, jeho vlastnosti kriticky závisí na množství nečistot a také na tom, jak železo vzniklo. Už víte, že magnetické vlastnosti závisí na tom, jak snadno se mohou pohybovat doménové stěny, a že to je *makroskopická vlastnost*, a ne vlastnost jednotlivých atomů. Takže ve skutečnosti není feromagnetismus vlastností *atomů* železa, je to vlastnost *železa jako pevné látky v určité formě*. Například železo může mít dvě krystalické podoby. Obvyčejné železo má prostorově centrovanou kubickou mřížku, ale může mít i plošně centrovanou kubickou mřížku, která je však stabilní pouze při teplotách nad 1 100 °C. Samozřejmě, při takovéto teplotě se už dávno nachází za Curieovým bodem pro prostorově centrovanou mřížku. Vytvoříme-li však slitinu chrómu a niklu se železem (jede možný poměr je 18 % chrómu a 8 % niklu), získáme nerezavějící ocel, která, ačkoliv se z větší části skládá ze železa, zachovává si plošně centrovanou kubickou strukturu i při nízkých teplotách. Protože je struktura krystalu odlišná, má i odlišné magnetické vlastnosti. Většina druhů nerezové oceli není ani trochu magnetická, ačkoliv existují některé druhy, které trochu magnetické jsou; vše závisí na složení slitiny. Je-li však slitina magnetická, není *feromagnetická* jako obvyčejné železo, ačkoliv jejím základním prvkem je železo.

Nyní popíšeme několik látek, které byly navrženy tak, aby měly magnetické vlastnosti. Za prvé, chceme-li vyrobit *permanentní magnet*, potřebujeme látku s nezvykle *širokou* hysterezní křivkou. Vypneme-li pak proud a vynulujeme magnetické pole, magnetizace zůstane velká. V takových látkách jsou doménové stěny „zmrazeny“ natolik, jak jen to jde. Jednou takovouto látkou je výjimečná slitina alnico V (51 % železa, 8 % hliníku, 14 % niklu, 24 % kobaltu a 3 % mědi). (Poměrně složitý obsah této slitiny naznačuje, kolik mravenčího úsilí vyžaduje výroba dobrého magnetu. Kolik trpělivosti je třeba k mísení pěti prvků a zkoušení toho, zda jste našli ideální směs!) Když alnico tuhne, vysráží se v něm „druhá fáze“, která vytváří drobná zrníčka a má velké vnitřní deformace. V této látce je pohyb doménových stěn velmi obtížný. Kromě přesného složení je alnico navíc i mechanicky upraveno tak, aby krystaly měly podobu dlouhých zrn orientovaných ve směru požadované magnetizace. Magnetizace má pak přirozenou tendenci orientovat se do tohoto směru a bránit se vlivům anizotropie. Navíc látka se při výrobě ochlazuje ve vnějším magnetickém poli, takže zrna rostou se správnou orientací krystalů. Hysterezní smyčku alnica V znázorňuje *obr. 37.12*. Všimněte si, že je asi 500-krát širší než hysterezní křivka měkkého železa, kterou jsme viděli na *obr. 36.8* předcházející kapitoly.

Nyní věnujme pozornost jinému druhu látek. K výrobě transformátorů a elektromotorů potřebujeme magneticky „měkké“ látky, tj. látky, jejichž magnetizace se velmi snadno mění, takže

velmi malé vnější pole způsobuje velkou magnetizaci. Pro tento účel potřebujeme čistou, dobře vyžhnanou látku, která obsahuje jen velmi málo dislokací a nečistot, takže doménové stěny se snadno přesouvají. Také je užitečné co nejvíce zmenšit její anizotropii.



Obr. 37.12 Hysterézní křivka alnico V.

Najde-li se i pak zrnko látky, které má vůči poli nevhodný úhel, je snadné ho zmagnetizovat. Už jsme řekli, že železo se nejnázne magnetizuje ve směru [100], zatímco v niklu je preferován směr [111]; mísmě-li tedy železo a nikl v různých poměrech, můžeme doufat, že najdeme správný poměr, při němž slitina nebude preferovat žádný směr – směr [100] a [111] se stanou ekvivalentní. Ukazuje se, že taková je směs 70 procent niklu a 30 procent železa. Navíc (možná, že je to jen šťastná shoda okolností nebo důsledek nějakého fyzikálního vztahu mezi anizotropií a magnetostrickými jevy) vychází, že *magnetostricke* železa a niklu mají opačná znaménka. Ve slitině těchto dvou látek je tato veličina nulová přibližně při 80-procentním obsahu niklu. To znamená, že se 70 až 80 procenty niklu získáme „měkké“ magnetické látky – slitiny, které se velmi snadno magnetizují. Takové látky se nazývají *permalloye*. Používají se ve vysoce kvalitních transformátorech (při nízké úrovni signálů), vůbec se však nehodí pro výrobu permanentních magnetů. Vyrábět permalloye a zacházet s nimi je třeba velmi opatrně. Jejich magnetické vlastnosti se prudce změň, deformujeme-li je nad hranici pružnosti; nesmí se ohýbat. Jejich permeabilita se v takovém případě sníží dislokacemi, skluzy atd., které vznikají v důsledku mechanických deformací. Doménové stěny se už nepohybují snadno. Vysokou permeabilitu je však možné obnovit žháním látky při vysoké teplotě.

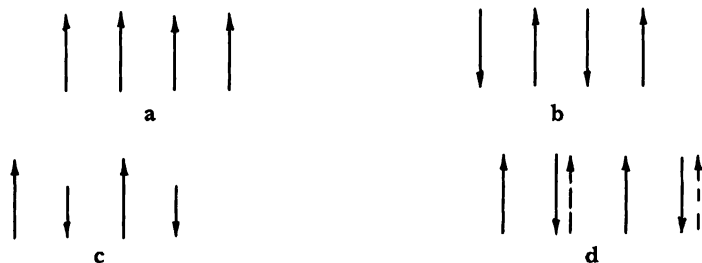
Tabulka 37.1 Vlastnosti některých feromagnetických látek

Látka	B_r zbytková magnetická indukce (v T)	H_c koercitivní pole (v T)
supermalloy	≈ 0,5	$4 \cdot 10^{-7}$
křemíková (transformátorová) ocel	1,2	$5 \cdot 10^{-6}$
železo armco	0,4	$6 \cdot 10^{-5}$
alnico V	1,3	$5,5 \cdot 10^{-2}$

Bude užitečné uvést několik čísel, která charakterizují různé magnetické látky. Dvěma takovými užitečnými charakteristikami jsou polohy průsečíků hysterezní křivky s osami B a H , jak to naznačuje obr. 37.12. Tyto průsečíky se nazývají *zbytková remanentní magnetická indukce B_r* , a *koerzivní pole H_c* . V tab. 37.1 uvádíme jejich hodnoty pro několik magnetických látek.

37.5 ZVLÁŠTNÍ MAGNETICKÉ LÁTKY

Nyní bychom chtěli hovořit o poněkud exotických magnetických látkách. V periodické tabulce existuje mnoho prvků, jejichž vnitřní elektronové slupky nejsou úplné, a proto mají nenulové atomové magnetické momenty. Například přímo vedle feromagnetických prvků železa, niklu a kobaltu najdete chrom a mangan. Proč *oni* nejsou feromagnetické? Odpověď spočívá v tom, že člen λ v rovnici (37.1) má v jejich případě opačné znaménko. V krystalické mřížce chromu se například spiny atomů chromu *střídají*, jak je znázorněno na obr. 37.13b. Z vlastního hlediska je tedy chrom magnetický, ale pro techniku je nezajímavý, neboť nemá *vnější* magnetické projevy. Chrom je tak příkladem látky, v níž kvantově mechanické efekty způsobují střídání spinů. Taková látka se nazývá *antiferomagnetická*.

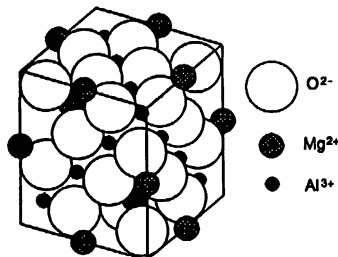


Obr. 37.13 Vzájemná orientace spinů elektronů v různých látkách: a) feromagnetická látka, b) antiferomagnetická látka, c) ferit, d) slitina železa a yttria (Čárkované šipky znázorňují směr celkového momentu hybnosti zahrnujícího i orbitální moment hybnosti.)

Uspořádání spinů antiferomagnetických látkách také závisí na teplotě. Pod kritickou teplotou jsou všechny spiny uspořádány ve střídající se posloupnosti, zahřejeme-li však látku nad určitou teplotu, která je opět nazývána *Curieova teplota*, spiny se najednou uspořádají náhodným způsobem. Uvnitř látky probíhá náhlý přechod, které lze pozorovat na křivce měrné tepelné kapacity. Podobně se projevuje i v některých speciálních magnetických jevech. Například přítomnost střídajících se spinů lze dokázat pomocí rozptylu neutronů na krystalu chromu. Jelikož neutron má sám spin (a magnetický moment), amplituda jeho rozptylu je různá podle toho, zda je jeho spin souhlasně nebo nesouhlasně orientován vůči spinu, na němž se rozptyluje. V důsledku toho je interferenční obraz jiný v případě, kdy se spiny v krystalu střídají, a jiný, když jsou spiny orientovány náhodně.

Existuje i jiný druh látek, v nichž kvantově mechanické jevy nutí spiny elektronů střídát se, které jsou však naopak tomu *feromagnetické*, tj. v krystalu existuje permanentní celková magnetizace. Vysvětlení vlastností takových látek obsahuje obr. 37.14. Obrázek znázorňuje strukturu krystalu *spinelu*, oxidu hořečnatohlinitého, který, jak je vidět, *není* magnetický. Oxid obsahuje dva druhy atomů kovů: hořčík a hliník. Nahradíme-li nyní hořčík a hliník dvěma magnetickými prvky, např. železem a zinkem nebo zinkem a manganem, tj. vložíme-li do látky místo nemagnetických atomů *magnetické*, dojde k zajímavému jevu. Nazvěme jeden druh kovového atomu *a* a druhý druh

b ; nyní je třeba vzít v úvahu různé kombinace sil. Existuje interakce $a - b$, která usiluje, aby atomy a a atomy b měly opačné spiny, protože kvantová mechanika vždy vede k zápornému znaménku interakční energie (kromě „záhadných“ atomů železa, niklu nebo kobaltu). Dále je tu přímá interakce $a - a$, která se snaží, aby spiny atomů a byly opačné, a podobná interakce $b - b$, která dělá totéž s atomy b . Samozřejmě, všechny spiny nemohou být navzájem opačné – a vůči b , a vůči a a b vůči b .



Obr. 37.14. Struktura nerostu spinelu (MgAl_2O_4): ionty Mg^{2+} se nacházejí ve vrcholech čtyřstěnnů, přičemž každý je obklopen čtyřmi ionty kyslíku, ionty Al^{3+} jsou ve vrcholech osmistěnnů, přičemž každý je obklopen šesti ionty kyslíku (Obrázek je z knihy Ch. Kittela, *op. cit.*)

Zřejmě díky vzdálenosti mezi atomy a a díky přítomnosti atomu kyslíku (ačkoliv přesně nevíme, proč je to tak) se ukazuje, že interakce $a - b$ je silnější než $a - a$ nebo $b - b$. V tomto případě si tedy příroda vybrala řešení, v němž jsou všechny spiny a navzájem rovnoběžné stejně jako všechny spiny b , ale oba systémy jsou orientovány *opačně*. Takové řešení má nejmenší energii, neboť interakce mezi a a b je nejsilnější. Výsledek tedy je: všechna a jsou orientována nahoru a všechna b směřují dolů – nebo naopak, přirozeně. *Nejsou-li však magnetické momenty atomů typu a a atomů typu b stejné*, vypadá situace jako na obr. 37.13c a v látce existuje nenulová celková magnetizace. Látka je, ačkoliv trochu slaběji, feromagnetická. Takové látky se nazývají *ferity*. Jejich saturační magnetizace není tak vysoká jako v případě železa (důvody jsou zřejmé), takže jsou užitečné jen ve slabých polích. Liší se však jednou důležitou vlastností: jsou nevodivé; ferity jsou *feromagnetické izolátory*. Vříivé proudy, které v nich vznikají ve vysokofrekvenčních polích, jsou malé; proto lze ferity použít např. v mikrovlnných systémech. Mikrovlnná pole mohou vnikat do takového nevodivého materiálu, zatímco ve vodiči typu železa to vříivé proudy nedovolí.

Existuje další skupina magnetických látek, které byly objeveny nedávno – jsou to členy skupiny ortokřemičitanů, které se nazývají *granáty*. Jsou to opět krystaly, v nichž mřížka obsahuje dva druhy kovových atomů, a opět se setkáváme se situací, kdy lze oba druhy podle libovůle obměňovat. Mezi mnoha zajímavými sloučeninami existuje jedna, která je feromagnetická. Ve struktuře granátu se nacházejí atomy yttria a železa a vysvětlení jevu feromagnetizmu je v tomto případě velmi kuriózní. Opět kvantová mechanika vyžaduje opačnou orientaci sousedních spinů, takže tu máme opět uzavřený systém spinů, v němž spiny elektronů železa směřují jedním směrem a spiny elektronů yttria směrem opačným. Atom yttria je však složitý. Patří mezi vzácné zeminy k jeho magnetickému momentu a velkou část přispívá *orbitální* pohyb elektronů. V případě yttria je příspěvek od orbitálního pohybu opačný než spinový příspěvek a navíc větší. A tak, ačkoliv kvantová mechanika prostřednictvím vylučovacího principu nutí spiny yttria zaujmout opačnou orientaci, jako mají spiny železa, je *celkový* magnetický moment atomu yttria v důsledku orbitálního efektu *rovnoběžný* se železem, jak znázorňuje obr. 37.13d. Sloučenina je tedy normálním feromagnetem.

Jiný zajímavý druh feromagnetizmu se vyskytuje u některých prvků skupiny vzácných zemin. Souvisí s ještě neobvyklejším uspořádáním spinů. Látka není ani feromagnetická v tom smyslu,

že všechny spiny jsou rovnoběžné, ani není antiferomagnetická v tom smyslu, že spiny sousedních atomů jsou opačné. V těchto krystalech jsou všechny spiny *v jedné vrstvě* rovnoběžné a leží v rovině vrstvy. V následující vrstvě jsou všechny spiny také rovnoběžné, ale v směřují trochu jiným směrem. Další vrstva má zase jiný směr atd. Výsledkem je, že vektor lokální magnetizace se mění po spirále – magnetické momenty po sobě následujících vrstev se stáčíjí, když se pohybujeme podél přímky, která je na vrstvy kolmá. Bylo by zajímavé pokusit se prozkoumat, co se stane, vložíme-li takovou spirálu do vnějšího pole, najít všechna ta pootočení a zkroučení, která se musí dít se všemi atomovými magnety. (Někteří lidé se opravdu *rádi* baví teorií takových jevů!) Přitom existují nejen „ploché“ spirály, ale i případy, v nichž vektory po sobě následujících vrstev vytvářejí kužel, takže v nich není jen spirálová složka, ale i homogenní feromagnetická složka určitého směru!

Magnetické vlastnosti látek na vyšší úrovni, než jsme dokázali probrat s vámi, fascinují fyziky různých zaměření. V první řadě jsou mezi nimi praktičtí lidé, které baví věci zdokonalovat, baví je navrhovat lepší a zajímavější magnetické látky. Objevy takových látek, jako jsou ferity, a jejich využití okamžitě nadchnou lidi, kteří mají v oblíbené vtipné nápady a vymýšlejí různé aplikace. Kromě nich však existují i tací, které fascinuje obrovská složitost jevů, které příroda vytváří na základě několika základních zákonů. Vycházejíc z jediné obecné myšlenky, přechází příroda od feromagnetizmu železa a jeho domén k antiferomagnetizmu chrómu, k magnetizmu feritů a granátů, ke spirálové struktuře prvků vzácných zemin atd., atd. Je úchvatné objevovat v experimentech všechny ty podivné jevy, které v těchto zvláštních látkách probíhají. Teoretickým fyzikům dále feromagnetizmus předkládá řadu velmi zajímavých, nevyřešených, překrásných hádanek. Jednou z nich je pochopit, proč vůbec feromagnetizmus existuje. Jinou je předpovědět statistiku interagujících spinů v ideální mřížce. I když zapomeneme na všechny vedlejší komplikace, tento problém se dosud brání úplnému pochopení. Důvod, proč je to tak zajímavý problém, spočívá v jednoduchosti, s jakou jej lze zformulovat: Máme-li v pravidelné mřížce určité množství spinů elektronů, které interagují podle daného zákona, co se s nimi děje? Problém se snadno vysloví, ale úplná analýza i po mnoha letech není dokončena. Ačkoliv situace při teplotách dostatečně vzdálených Curieově bodu, byla prozkoumána podrobně, teorie náhlého přechodu v Curieově bodě stále není uzavřena.

Celá oblast studia chování soustav spinujících magnetických momentů – feromagnetizmus, paramagnetizmus i jaderný magnetizmus – byla vždy fascinujícím tématem pro studenty fyziky ve vyšších ročnících. Na soustavě spinů lze tak i onak působit vnějšími magnetickými poli, takže si lze pohrát s rezonancemi, relaxačními jevy, se spinovým echem a jinými jevy. To vše slouží jako prototyp mnoha komplikovaným termodynamickým soustavám. Výhodou je to, že např. v paramagnetických látkách je situace často velmi jednoduchá, a lidi baví s nimi experimentovat i snažit se o teoretické vysvětlení jevů.

Nyní naše studium elektřiny a magnetizmu uzavřeme. V první kapitole jsme si řekli o velké cestě, kterou lidstvo prošlo od dob, kdy Řekové objevili chování jantaru a magnetitu. Ani po dlouhých a komplikovaných úvahách jsme dosud nevysvětlili, *proč se kus jantaru třením nabíjí*, ani *proč je magnetit zmagetizován*. Můžete namítnout: „Ale vždyť se nám jen nepodařilo dospět ke správnému znaménku!“ Ne, problém je obtížnější. I kdybychom *byli* dospěli ke správnému znaménku, stále by nám zůstala otázka: Proč je zmagetizovaný magnetit na Zemi? Existuje, samozřejmě, zemské magnetické pole, *ale odkud se toto zemské magnetické pole bere?* Opravdu nikdo neví – máme jen několik rozumných dohadů. Vidíte tedy, že naše fyzika nás v mnohém klame – začali jsme s chováním jantaru a magnetitu a na konci cesty zjišťujeme, že ani jednomu z jevů pořádně nerozumíme. Ale po cestě jsme se přece naučili *ohromné* množství velmi vzrušujících a velmi užitečných věcí!

Pružnost

38.1 HOOKEŮV ZÁKON

38.2 HOMOGENNÍ DEFORMACE

38.3 TORZNÍ TYČ. STŘIŽNÉ VLNY

38.4 PROHNUTÝ NOSNÍK

38.5 VZPĚRNOST

Přečtěte si znovu: kapitolu 47, díl 1, Zvuk. Vlnová rovnice

38.1 HOOKEŮV ZÁKON

Teorie pružnosti se zabývá chováním takových těles, která obnovují své rozměry a tvar, když přestanou působit síly, které je deformují. Takové pružné vlastnosti mají do jisté míry všechny pevné látky. Kdybychom měli dost času na to, abychom se tímto tématem zabývali do hloubky, všimli bychom si mnohých otázek: chování různých látek, obecných zákonů pružnosti, obecné teorii pružnosti, mechanismu na úrovni atomů, který určuje pružné vlastnosti, a konečně i omezení zákonů pružnosti v případě, kdy jsou působící síly tak velké, že dochází k plastickému tečení a lomu. Podrobně probírat všechna tato témata by zabralo více času než máme k dispozici, proto budeme muset některé otázky vynechat. Nebudeme se například zabývat plasticitou a omezeními zákonů pružnosti. (Těchto problémů jsme se dotkli při diskuzi dislokací v kovech.) Také se nebudeme moci věnovat vnitřním mechanismům pružnosti; našemu přístupu tedy bude chybět ta úroveň úplnosti, o jakou jsme usilovali v předcházejících kapitolách. Naším cílem bude seznámení se s některými cestami, jak přistupovat k takovým praktickým problémům, jakým je například prohýbání nosníků.

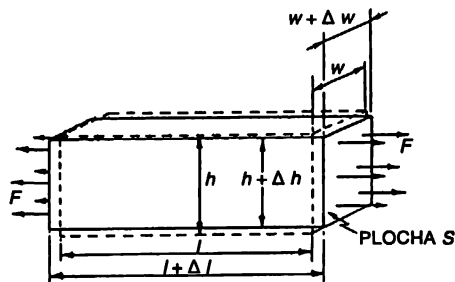
Stlačíte-li kousek látky, „poddá“ se, zdeformuje se. Je-li síla dostatečně malá, jsou relativní posunutí různých bodů v látce úměrné síle; takové chování nazýváme *pružným*. Budeme si všimnout jen pružného chování. Nejdříve zapíšeme základní zákony pružnosti a pak je využijeme v několika různých situacích.

Představte si pravouhlý hranol z nějaké látky, jehož délka je l , šířka je w , a výška h (obr. 38.1.). Natahujeme-li jeho konce silou F , zvětší se jeho délka o hodnotu Δl . Ve všech případech budeme předpokládat, že změna délky je jen malou částí původní délky. Ve skutečnosti se takové látky jako dřevo nebo ocel naruší, je-li změna jejich délky větší než několik procent původní délky. Experi-

menty ukazují, že pro velké množství látek při dostatečně malých změnách délky je síla úměrná prodloužení:

$$F \sim \Delta l \quad (38.1)$$

Tento vztah je znám pod názvem *Hookeův zákon*.



Obr. 38.1 Protážení hranolu vlivem rovnoměrného tahu

Prodloužení hranolu Δl závisí i na jeho délce. Lze to ukázat pomocí následující úvahy. Slepíme-li k sobě dva identické hranoly na jednom konci, působí na každý stejná síla a každý se prodlouží o Δl . Prodloužení hranolu s délkou $2l$ bude tedy dvakrát větší než prodloužení hranolu se stejným průřezem, jehož délka je pouze l . Abychom získali veličinu, která lépe charakterizuje daný materiál a méně závisí na jeho speciálním tvaru, budeme si všimnout raději relativního prodloužení $\Delta l/l$, poměru prodloužení k původní délce. Tento poměr je úměrný síle, ale nezávisí na l .

$$F \sim \frac{\Delta l}{l}. \quad (38.2)$$

Síla F závisí i na obsahu plochy průřezu hranolu. Představme si, že položíme dva hranoly vedle sebe. Na dané prodloužení Δl musí na každý blok působit síla F ; na oba bloky musí tedy působit síla dvojnásobná. Pro dosažení daného prodloužení musí být síla úměrná ploše S průřezu hranolu. Abychom získali zákon, v němž koeficient úměrnosti nezávisí na rozměrech tělesa, zapíšeme Hookeův zákon pro pravouhlý hranol ve tvaru

$$F = YS \frac{\Delta l}{l}. \quad (38.3)$$

Konstanta Y závisí jen na podstatě dané látky; je známa jako *Youngův modul pružnosti*. (Obvykle se Youngův modul pružnosti označuje písmenem E , které jsme však použili k označení intenzity elektrického pole, energie a elektromotorického napětí, takže budeme raději používat jiné písmeno.)

Síla, která působí na jednotku plochy, se nazývá *napětí* a prodloužení na jednotku délky – *relativní prodloužení* – se nazývá *deformace*. Rovnici (38.3) lze tedy přepsat na následující tvar:

$$\frac{F}{S} = Y \times \frac{\Delta l}{l} \quad (38.4)$$

$$\text{napětí} = (\text{Youngův modul pružnosti}) \times (\text{deformace}).$$

Hookeův zákon má ještě další část: *Natáhnete-li* hranol z dané látky v jednom směru, ve směrech kolmých na směr tahu se hranol *zkrátí*. Zmenšení jeho šířky je úměrné samotné šířce w a také $\Delta l/l$. Relativní boční zkrácení je stejné v případech šířky i výšky a obvykle se zapisuje jako

$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta h}{h} = -\sigma \frac{\Delta l}{l}, \quad (38.5)$$

přičemž konstanta σ je další charakteristikou látky, která se nazývá *Poissonův poměr*. Je vždy kladná a menší než 1/2. (Je „rozumné“, že σ je obecně kladná, ale není zcela zřejmé, že opravdu *musí* být kladná.)

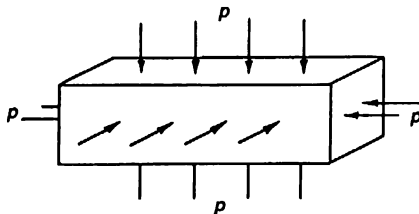
Dvě konstanty Y a σ úplně určují pružné vlastnosti *homogenních izotropních* (tj. nekystalických) látek. V krystalických látkách mohou být prodloužení a zkrácení v různých směrech různá, proto pružných konstant může být mnohem více. Zatím se však omezíme na homogenní izotropní látky, jejichž vlastnosti jsou charakterizovány konstantami Y a σ . Jako obvykle, stejné jevy lze popisovat různými způsoby; někteří lidé k popisu pružných vlastností látek raději používají jiné konstanty. Jsou však vždy dvě a lze najít jejich souvislost s hodnotami σ a Y .

Poslední obecný zákon, který potřebujeme, je princip superpozice. Jelikož vztahy mezi silami a posunutími v zákonech (38.4) a (38.5) jsou lineární, bude platit princip superpozice. Působí-li jeden soubor sil, který vyvolává určitá posunutí, a k němu přidáte jiný soubor sil s jinými dodatkovými posunutími, budou výsledná posunutí součtem posunutí, které byste získali, kdyby oba soubory sil působily nezávisle.

Nyní máme pohromadě všechny obecné zákonitosti – princip superpozice a vztahy (38.4) a (38.5). To je vše, co je třeba k popisu pružnosti. Je to však stejná situace, jako když si řeknete, že Newtonovy zákony jsou vše, co v mechanice potřebujeme, nebo že Maxwellovy rovnice obsahují vše z elektřiny. Je samozřejmě pravda, že z těchto principů opravdu vyplývá skoro vše, neboť vaše současné matematické schopnosti vám už umožňují projít dlouhou cestu samostatně. Přesto rozebereme několik speciálních aplikací.

38.2 HOMOGENNÍ DEFORMACE

Nejdříve zkusme zjistit, co se stane s pravouhlým hranolem vlivem hydrostatického tlaku. Vložíme hranol do tlakové nádoby. Na každou stěnu hranolu bude tláčit síla, která je úměrná její ploše (obr. 38.2). Jelikož je hydrostatický tlak stejný ve všech směrech, je *napětí* (síla na jednotku plochy) na každé straně hranolu stejné. Nejdříve vypočítáme změnu jeho délky. Můžeme si ji představit jako součet změn délky, k nimž dojde ve třech nezávislých úlohách znázorněných na obr. 38.3.



Obr. 38.2 Hranol pod vlivem homogenního hydrostatického tlaku

Úloha 1. Působíme-li na konce hranolu tlakem p , je deformace v tlaku p/Y a má záporné znaménko,

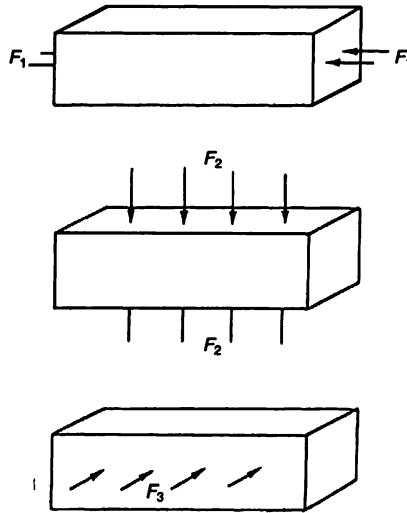
$$\frac{\Delta l_1}{l} = -\frac{p}{Y}$$

Úloha 2. Působíme-li na boční stěny hranolu tlakem p , je deformace v tlaku opět p/Y , nás však zajímá deformace ve směru délky hranolu. Tu získáme vynásobením boční deformace faktorem $-\sigma$. Boční deformace je

$$\frac{\Delta w}{w} = -\frac{p}{Y}$$

takže

$$\frac{\Delta l_2}{l} = +\sigma \frac{p}{Y}$$



Obr. 38.3 Hydrostatický tlak je superpozicí tří podélných stlačení

Úloha 3. Působíme-li na hranol shora, je deformace tlakem opět p/Y a odpovídající deformace v bočních směrech je opět $-\sigma p/Y$. Proto

$$\frac{\Delta l_3}{l} = +\sigma \frac{p}{Y}$$

Složením výsledků všech tří úloh, tj. vezmeme-li $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3$, získáme vztah

$$\frac{\Delta l}{l} = -\frac{p}{Y}(1 - 2\sigma). \quad (38.6)$$

Problém je, samozřejmě, symetrický ve všech třech směrech; proto stejně

$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta h}{h} = -\frac{p}{Y}(1 - 2\sigma). \quad (38.7)$$

Zajímavá je i změna *objemu* pod vlivem hydrostatického tlaku. Jelikož $V = lwh$, můžeme při malých změnách psát

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta h}{h}.$$

Pomocí (38.6) a (38.7) získáme

$$\frac{\Delta V}{V} = -3\frac{p}{Y}(1 - 2\sigma). \quad (38.8)$$

Lidé obvykle nazývají $\Delta V/V$ objemovou deformací a zapisují

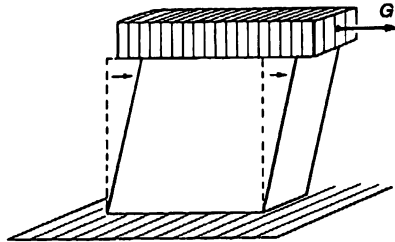
$$p = -K\frac{\Delta V}{V}.$$

Opět platí Hookeův zákon: „*objemové napětí*“ (hydrostatický tlak) je úměrné objemové deformaci. Koeficient K je nazývá *modul objemové pružnosti*. Souvisí s ostatními konstantami podle vztahu

$$K = \frac{Y}{3(1 - 2\sigma)}. \quad (38.9)$$

Jelikož má K i praktický význam, uvádějí mnohé tabulky hodnoty Y a K namísto Y a σ . Potřebujete-li σ , můžete si jej snadno vypočítat ze vztahu (38.9). Z tohoto vztahu je také vidět, proč musí být Poissonova konstanta σ menší než jedna polovina. Kdyby nebyla, byl by objemový modul pružnosti K záporný a látka by se při zvyšování tlaku rozpínala. To by nám umožnilo získat z původního hranolu energii, tj. hranol by byl v nestabilní rovnováze. Jakmile by se jednou začal rozpínat, pokračoval by sám od sebe, přičemž by se uvolňovala energie.

Nyní si všimněme, co se stane, udělíme-li látce smykové napětí. Deformací ve smyku rozumíme deformaci znázorněnou na obr. 38.4. Předběžně se podíváme na *krychli* z dané látky, na níž působí síly jako na obr. 38.5.

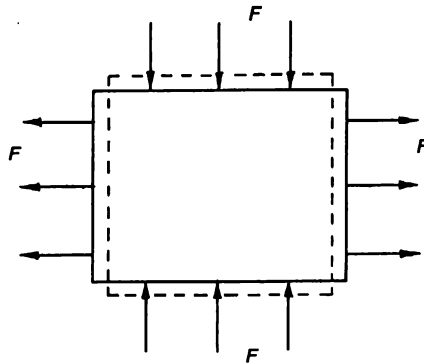


Obr. 38.4 Krychle při homogenním smyku

Opět můžeme problém rozložit na dva: svislý tlak a vodorovný tah. Označíme-li velikost plochy stěny krychle jako S , změna délky ve vodorovném směru je

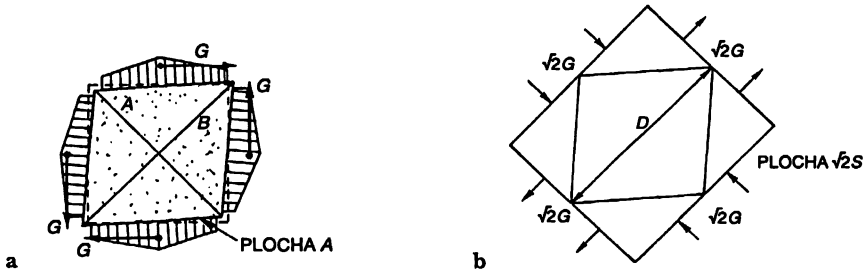
$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{Y} \frac{F}{S} + \sigma \frac{1}{Y} \frac{F}{S} = \frac{1 + \sigma}{Y} \cdot \frac{F}{S}. \quad (38.10)$$

Změna ve svislém směru je stejná, má jen opačné znaménko.



Obr. 38.5 Krychle, na níž působí shora a zdola tlakové síly a na boční stěny působí stejné síly tahu

Nechť na tutéž krychli působí smykové síly znázorněné na obr. 38.6 (a). Uvědomte si, že všechny síly musí být stejné, má-li být výsledný moment síly nulový a krychle má být v rovnováze. (Podobné síly musí existovat i na obr. 38.4, jelikož hranol v rovnováze je. Vznikají díky „lepidlu“, které udržuje hranol na stole.) O krychli se o takovém případě říká, že se nachází ve stavu „čistého smyku“. Všimněte si však, že rozřízneme-li krychli rovinou pod úhlem 45° , řekněme podél úhlopříčky A na obrázku, je celková síla, která působí na této ploše, kolmá na rovinu a je rovna $\sqrt{2} G$.



Obr. 38.6 Dva páry smykových sil na obrázku a vytvářejí stejné napětí jako tlakové a tahové síly na obrázku b.

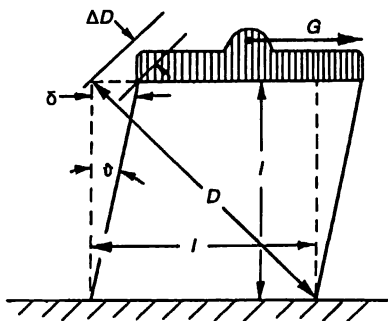
Plocha, na níž tato síla působí, má velikost $\sqrt{2} S$; výsledné napětí v tahu, kolmé na tuto plochu, je prostě G/A . Podobně podíváme-li se na plochu pod úhlem 45° podél úhlopříčky B na obrázku, vidíme, že na ni působí kolmé napětí v tlaku $-G/A$. Odtud je zřejmé, že napětí v „čistém smyku“ jsou ekvivalentní kombinaci sil tahových a tlakových, které mají stejnou velikost a jsou navzájem kolmé, přičemž s původními stěnami krychle svírají úhel 45° . Vnitřní napětí a deformace jsou stejné, jako bychom našli ve větší krychli z dané látky, na níž působí síly jako na obr. 38.6 (b). Tento problém jsme však už vyřešili. Změna délky úhlopříčky D je dána vztahem (38.10),

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{1 + \sigma}{Y} \frac{G}{A}. \quad (38.11)$$

(Jedna úhlopříčka se zkrátí, druhá prodlouží.)

Často je užitečné vyjádřit deformaci ve smyku pomocí úhlu, o němž se krychle zkosí – úhlu ϑ na obr. 38.7. Z geometrie obrázku vidíte, že posun δ horní hrany ve vodorovném směru je roven $\sqrt{2}\Delta D$. Proto

$$\vartheta = \frac{\delta}{l} = \frac{\sqrt{2}\Delta D}{l} = 2 \frac{\Delta D}{D}. \quad (38.12)$$



Obr. 38.7 Smyková deformace ϑ je $2\Delta D/D$

Smykové napětí g je definováno jako tangenciální síla působící na stěnu dělená její plochou, $g = G/A$. Pomocí (38.11) a (38.12) získáme

$$\vartheta = 2 \frac{1 + \sigma}{Y} g,$$

nebo zapíšeme-li rovnici ve tvaru napětí = konstanta krát deformace, dostaneme

$$g = \mu \vartheta. \quad (38.13)$$

Koeficient úměrnosti μ se nazývá *modul pružnosti ve smyku* (nebo někdy i koeficient tuhosti). Vyjádřen pomocí Y a σ je roven

$$\mu = \frac{Y}{2(1 + \sigma)}. \quad (38.14)$$

Modul pružnosti ve smyku musí být zřejmě kladný – jinak bychom mohli získat energii ze samovolného smyku hranolu. Z rovnice (38.14) vyplývá, že σ musí být větší než -1 . Víme tedy, že σ musí být někde mezi -1 a $+1/2$; ve skutečnosti je vždy větší než nula.

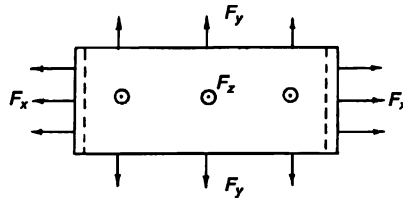
Jako poslední příklad podobného typu, kdy jsou napětí homogenní v celé látce, vezmeme problém hranolu, který je natahován, a přitom se nemůže zkrátit v bočních směrech. (Technicky je snazší látku stlačit a přitom zabránit jejímu vyduť v bočních směrech, ale je to stejná úloha.) Co se stane? Samozřejmě, musí existovat boční síly, které brání změnám tloušťky hranolu, síly, které dopředu neznáme, ale musíme je vypočítat. Takový problém jsme už řešili, jen algebra je trochu jiná. Představme si síly ve všech třech směrech jako na obr. 38.8. Vypočteme změny

rozměrů a příčné síly vybereme tak, aby výška a šířka zůstaly konstantní. Na základě obvyklých úvah najdeme všechny tři deformace:

$$\frac{\Delta l_x}{l_x} = \frac{1}{Y} \frac{F_x}{S_x} - \frac{\sigma}{Y} \frac{F_y}{S_y} - \frac{\sigma}{Y} \frac{F_z}{S_z} = \frac{1}{Y} \left[\frac{F_x}{S_x} - \sigma \left(\frac{F_y}{S_y} + \frac{F_z}{S_z} \right) \right] \quad (38.15)$$

$$\frac{\Delta l_y}{l_y} = \frac{1}{Y} \left[\frac{F_y}{S_y} - \sigma \left(\frac{F_x}{S_x} + \frac{F_z}{S_z} \right) \right] \quad (38.16)$$

$$\frac{\Delta l_z}{l_z} = \frac{1}{Y} \left[\frac{F_z}{S_z} - \sigma \left(\frac{F_x}{S_x} + \frac{F_y}{S_y} \right) \right] \quad (38.17)$$



Obr. 38.8 Protážení bez příčného zkrácení

Jelikož nyní předpokládáme, že Δl_y a Δl_z jsou nulové, vztahy (38.16) a (38.17) jsou dvě rovnice pro určení F_y a F_z pomocí F_x . Jejich společným řešením je

$$\frac{F_y}{S_y} = \frac{F_z}{S_z} = \frac{\sigma}{1 - \sigma} \frac{F_x}{S_x} \quad (38.18)$$

Dosadíme-li řešení do (38.15), dostaneme

$$\frac{\Delta l_x}{l_x} = \frac{1}{Y} \left(1 - \frac{2\sigma^2}{1 - \sigma} \right) \frac{F_x}{S_x} = \frac{1}{Y} \left(\frac{1 - \sigma - 2\sigma^2}{1 - \sigma} \right) \frac{F_x}{S_x} \quad (38.19)$$

Často najdete tento vztah v obráceném tvaru a s rozloženým kvadratickým výrazem obsahujícím σ , v tom případě

$$\frac{F}{S} = \frac{1 - \sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} Y \frac{\Delta l}{l} \quad (38.20)$$

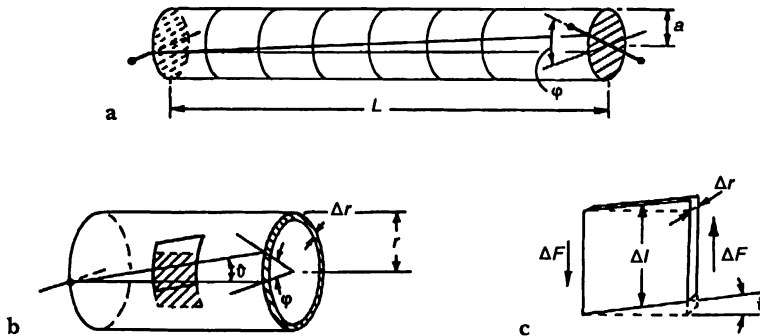
Přidržíme-li boční stěny, Youngův modul pružnosti se násobí složitou funkcí σ . Ze vztahu (38.19) je nejlépe vidět, že činitel před Y je vždy větší než 1. Je těžší natáhnout hranol, když jeho stěny držíme; to znamená, že hranol je *pevnější*, když jsou jeho stěny upevněny, než když jsou volné.

38.3 TORZNÍ TYČ. STŘIŽNÉ VLNY

Nyní obraťme pozornost na případ, který je o něco složitější, neboť v různých částech látky jsou různá napětí. Všimněme si zkroucené tyče, takové, jakou lze najít v hnacím hřídeli nějakého stroje nebo jako závěs z křemenného vlákna, který se vyskytuje v přesných přístrojích. Jak asi víte z pokusů s torzním kyvadlem, *moment síly*, který působí na zkroucenou tyč, je úměrný *úhlu* pootočení, přičemž konstanta úměrnosti zřejmě závisí na délce a poloměru tyče a na vlastnostech látky. Otázka je: jaká je tato závislost? Už víme dost na to, abychom takovou otázku zodpověděli; je třeba si jen pohrát s trochou geometrie.

Obr. 38.9a znázorňuje válcovou tyč s délkou L a poloměrem a , jejíž jeden konec je vůči druhému zkroucen o úhel φ . Chceme-li najít souvislost s deformacemi, které už známe, můžeme si tyč představit jako soubor mnoha válcových slupek a vypočítat, co se stane s každou jednotlivou slupkou. Nejdříve se podívejme na tenký, krátký váleček s poloměrem r (menším než a) a s tloušťkou stěny Δr , jak je nakresleno na obr. 38.9b. Všimneme-li si nyní malé části tohoto válce, která byla původně malým čtverečkem, zjistíme, že se zdeformovala do tvaru rovnoběžníku. Každá taková část válce je ve smyku a úhel smyku je

$$\vartheta = \frac{r\varphi}{L}.$$



Obr. 38.9 a) Válcová tyč při zkroucení.
b) Válcová slupka při zkroucení.
c) Každá malá část slupky je ve smyku

Smykové napětí g v látce je tedy (podle vztahu (38.13))

$$g = \mu \vartheta = \mu \frac{r\varphi}{L}. \quad (38.21)$$

Smykové napětí je tangenciální síla ΔF na konci čtverce dělená jeho plochou $\Delta l \Delta r$ (obr. 38.9c):

$$g = \frac{\Delta F}{\Delta l \Delta r}.$$

Síla ΔF na konci takovéhoho čtverce přispívá momentem síly ΔN kolem osy tyče, který je roven

$$\Delta N = r \Delta F = r g \Delta l \Delta r. \quad (38.22)$$

Celkový moment síly N je součtem takových momentů přes celý průřez válce. Složíme-li tedy dostatečný počet takových částí, aby byl součet všech Δl roven $2\pi r$, zjistíme, že celkový moment síly v duté trubici je

$$r g (2\pi r) \Delta r \quad (38.23)$$

nebo, pomocí (38.21),

$$N = 2\pi\mu \frac{r^3 \Delta r \varphi}{L}. \quad (38.24)$$

Zjistili jsme, že rotační tuhost N/φ duté trubice vůči zkrácení je úměrná třetí mocnině poloměru r a tloušťce Δr a nepřímo úměrná délce L .

Celou tyč si můžeme nyní představit jako soubor sousých trubiček, přičemž každá je zkroucena o stejný úhel φ (ačkoliv vnitřní napětí jsou různá v různých trubičkách). Celkový moment síly je součtem momentů sil potřebných na pootočení každé vrstvy; pro pevnou tyč platí

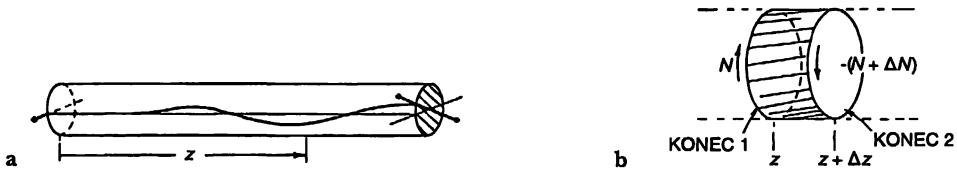
$$N = 2\pi\mu \frac{\varphi}{L} \int r^3 dr,$$

přičemž se integruje od $r=0$ po $r=a$ (po poloměr tyče). Po zintegrování vyjde

$$N = \mu \frac{\pi a^4}{2L} \varphi. \quad (38.25)$$

Pro torzní tyč je moment síly úměrný úhlu a čtvrté mocnině poloměru – tyč dvojnásobně tloušťky je šestnáctkrát pevnější vůči kroucení.

Dříve než opustíme problém torze, využijeme získané vědomosti k řešení zajímavého problému: problému torzních vln. Vezmeme-li si dlouhou tyč a náhle pootočíme jeden konec, bude se podél tyče šířit torzní vlna, jak to znázorňuje obr. 38.10a. Tento jev je o něco zajímavější než statické kroucení; podívejme se, zda dokážeme pochopit, co se stane.



Obr. 38.10 a) Torzní vlny v tyči. b) Objemový element tyče

Označme z vzdálenost nějakého bodu tyče od jejího pevného konce. Při statickém kroucení je moment síly stejný ve všech bodech podél tyče a je úměrný φ/L , poměru celkového torzního

úhlu k celkové délce. V naší úloze je však důležitá místní torzní deformace, která je, jak zřejmě chápete, $\partial\varphi/\partial z$. Není-li torze podél tyče rovnoměrná, musíme vztah (38.25) nahradit následujícím:

$$N(z) = \mu \frac{\pi a^4}{2} \frac{\partial\varphi}{\partial z}. \quad (38.26)$$

Nyní se podívejme, co se stane s malým elementem délky Δz , který vidíte zvětšen na *obr. 38.10b*. Na konci č. 1 malé části tyče působí moment síly $N(z)$ a na konci č. 2 působí jiný moment síly $N(z + \Delta z)$. Je-li Δz dostatečně malé, můžeme použít Taylorův rozvoj a napsat

$$N(z + \Delta z) = N(z) + \left(\frac{\partial N}{\partial z} \right) \Delta z. \quad (38.27)$$

Výsledný moment síly, který působí na malou část tyče mezi z a $z + \Delta z$, je zřejmě rozdílem mezi $N(z)$ a $N(z + \Delta z)$, nebo $\Delta N = (\partial N/\partial z) \Delta z$. Zderivujeme-li vztah (38.26), získáme

$$\Delta N = \mu \frac{\pi a^4}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \Delta z. \quad (38.28)$$

Takový moment síly způsobí úhlové zrychlení této části tyče. Jeho hmotnost je

$$\Delta M = (\pi a^2 \Delta z) \rho,$$

kde ρ je hustota látky. V kapitole 19 1. dílu jsme vypočítali, že moment setrvačnosti kruhového válce je $mr^2/2$; označíme-li moment setrvačnosti našeho kousku ΔI , pak

$$\Delta I = \frac{\pi}{2} \rho a^4 \Delta z. \quad (38.29)$$

Newtonův zákon říká, že moment hybnosti je roven momentu setrvačnosti krát úhlové zrychlení čili

$$\Delta N = \Delta I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (38.30)$$

Složíme-li všechno dohromady, najdeme

$$\mu \frac{\pi a^4}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \Delta z = \frac{\pi}{2} \rho a^4 \Delta z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

neboli

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (38.31)$$

V této rovnici snadno poznáte jednorozměrnou vlnovou rovnici. Zjistili jsme, že torzní vlny se budou po tyči šířit rychlostí

$$c_{\text{torz}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (38.32)$$

Čím je při stejné tuhosti tyč *hustější*, tím jsou vlny *pomalejší*, a čím je tyč *tužší*, tím rychleji se po ní vlny šíří. Rychlosti přitom nezávisí na *poloměru* tyče.

Torzní vlny jsou speciálním případem *střížných vln*. Obecně jsou to vlny, u nichž deformace nemění *objem* jednotlivých částí látky. U torzních vln se setkáváme se speciálním rozdělením smykových napětí, konkrétně jsou rozděleny po kruhu. Při libovolném rozdělení smykových napětí se vlny šíří stejnou rychlostí, kterou udává vztah (38.32). Seismologové se například setkávají s takovými střížnými vlnami uvnitř Země.

Ve světě pružnosti v pevných látkách se můžeme setkat i s jiným druhem vln. Stlačíme-li náhle nějakou látku, vzbudíme podélné vlny, které se také nazývají tlakové vlny. Podobají se zvukovým vlnám ve vzduchu nebo ve vodě – kmity probíhají ve směru šíření vlnění. (Na povrchu pružného tělesa může existovat i jiný typ vln, *Rayleighovy* nebo *Loveovy* vlny. Při nich nejsou deformace ani čistě podélné, ani čistě příčné. Na jejich studium nám však nezbyde čas.)

Když už jsme u vln, jaká je rychlost podélných vln ve *velkém* pevném tělese, např. v Zemi? Hovoříme o velkém tělese, neboť rychlost zvuku v širokém tělese je jiná než například v tenké tyči. „Širokým“ tělesem rozumíme takové, jehož příčné rozměry jsou mnohem větší než vlnová délka zvuku. Stlačíme-li těleso, nemůže se rozšířit do stran – stlačí se jen v jednom směru. Naštěstí, už jsme vyřešili speciální případ stlačení upevněného pevného tělesa. V kapitole 47 1. dílu jsme už také vypočetali rychlost zvukových vln v plynu. Na základě stejných úvah se můžete přesvědčit, že rychlost zvuku v pevné látce je rovna $\sqrt{Y/\rho}$, kde Y je podélný modul pružnosti, tlak dělený relativní změnou délky, v případě stlačení. Je to právě poměr $\Delta l/l = F/S$, který jsme našli ve vztahu (38.20). Rychlost podélného vlnění je tedy

$$c_{\text{podél.}}^2 = \frac{Y}{\rho} = \frac{1 - \sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \frac{Y}{\rho}. \quad (38.33)$$

Jelikož σ leží mezi 0 a 1/2, je modul pružnosti ve smyku menší než Youngův modul pružnosti a také Y je větší než Y , takže

$$\mu < Y < Y.$$

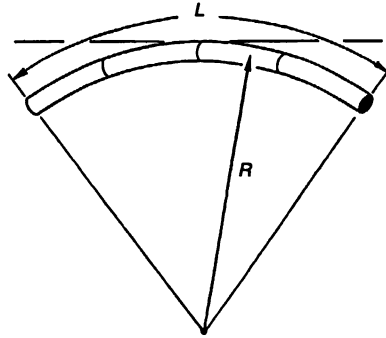
To znamená, že podélné vlny se šíří rychleji než příčné. Jednou z nejpřesnějších metod měření konstant pružnosti látky je změřit její hustotu a rychlosti obou druhů vlnění. Z této informace lze získat hodnoty Y a σ . Mimochodem, změřením rozdílu časů, za které obě vlny dorazí od zemětřesení na dané místo, jsou seismologové schopni odhadnout (dokonce za pomoci údajů z jediné stanice) vzdálenost epicentra.

38.4 PROHNUTÝ NOSNÍK

Nyní se podívejme na jiný praktický problém – prohýbání tyče nebo nosníku. Jaké síly jsou potřebné k ohnutí tyče libovolného průřezu? Problém vyřešíme pro případ tyče s kruhovým průřezem, ale výsledek bude platit pro libovolný průřez. Abychom ušetřili čas, situaci trochu zjednodušíme, takže odvozená teorie bude jen přibližná. Naše výsledky budou platné jen tehdy, je-li poloměr zakřivení mnohem větší než tloušťka nosníku.

Představte si, že uchopíte rovnou tyč na obou koncích a ohnete ji do tvaru křivky zobrazené na obr. 38.11. Co se děje uvnitř tyče? Je-li tyč ohnuta, je látka na vnitřní straně stlačena a na vnější straně roztahena. Uvnitř existuje určitá plocha, která je více méně rovnoběžná s osou tyče a která není stlačena ani roztahena. Nazývá se *neutrální plocha*. Lze očekávat, že se taková plocha nachází

někde kolem středu průřezu tyče. Lze ukázat (ale nebudeme to zde dělat), že při malém zakřivení jednoduchých nosníků prochází neutrální plocha „hmotným středem“ průřezu. Platí to však jen v případě „čistého“ ohybu, tj. když zároveň nosník nestlačujete nebo neroztahujete.



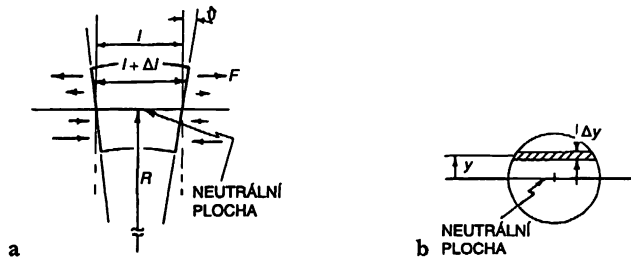
Obr. 38.11 Prohnutý nosník

Při čistém ohybu je tenký příčný plátek tyče deformován jako na obr. 38.12a. Látka je pod neutrální plochou stlačena, přičemž deformace v tlaku je *úměrná vzdálenosti* od neutrální plochy, a látka nad ní je protažena, opět *úměrně vzdálenosti* od neutrální plochy. Podélné *prodloužení* Δl je tedy *úměrné výšce* y . Konstanta úměrnosti je právě poměr l k poloměru křivosti tyče (obr. 38.12):

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{y}{R}.$$

Napětí – síla na jednotku plochy – v malém pásku kolem y je tedy také *úměrné vzdálenosti* od neutrální plochy:

$$\frac{\Delta F}{\Delta S} = Y \frac{y}{R}. \quad (38.34)$$



Obr. 38.12 a) Malý úsek prohnutého nosníku. b) Průřez nosníku

Podívejme se nyní na *síly*, které by způsobily takovou deformaci. Síly, které působí na malý úsek na obr. 38.12, jsou na obrázku zakresleny. Když si představíme libovolný průřez, mají síly, které na něj působí, jeden směr nad neutrální rovinou a opačný pod ní. Tvoří dvojice sil, které vytvářejí ohýbací silový moment M – pod ním chápeme moment síly kolem neutrální čáry. Celkový

moment síly můžeme vypočítat zintegrováním součinu síly a vzdálenosti od neutrální plochy pro jeden průřez na úseku na obr. 38.12:

$$M = \int_{\text{průřez}} y \, dF. \quad (38.35)$$

Podle vztahu (38.34) $dF = Yy/RdS$, takže

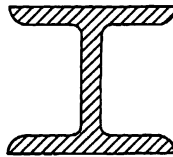
$$M = \frac{Y}{R} \int y^2 \, dS.$$

Integrál funkce $y^2 \, dS$ je právě „moment setrvačnosti“ geometrického průřezu tyče vzhledem k vodorovné ose, která prochází jejím „hmotným středem“⁵⁰⁾; označíme jej I :

$$M = \frac{YI}{R} \quad (38.36)$$

$$I = \int y^2 \, dS. \quad (38.37)$$

Rovnice (38.36) udává souvislost mezi ohýbacím silovým momentem Ma křivostí $1/R$ nosníku. Tuhost nosníku je úměrná Y a momentu setrvačnosti I . Jinými slovy, potřebujete-li co nejpevnější nosník z daného množství, řekněme hliníku, musíte umístit co nejvíce materiálu co nejdál od neutrální plochy, aby byl moment setrvačnosti co největší. Nesmíte to však přehnat, neboť pak se nosník nehne, jak byste očekávali, ale zkroutí se nebo vybočí, a tím se opět oslabí. Ale i tak už zřejmě chápete, proč se nosníky pro stavby vyrábějí ve tvaru I nebo H, jak je ukázáno na obr. 38.13.

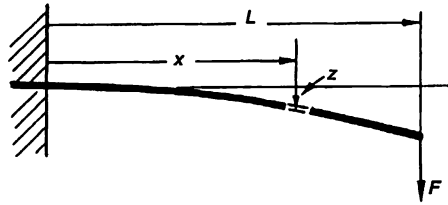


Obr. 38.13 Nosník ve tvaru I

Jako příklad využití naší rovnice pro nosník (38.36) vypočítáme ohyb konzoly, na kterou působí síla F soustředěná na jejím volném konci (viz obr. 38.14). (Konzolou zde chápeme nosník, jehož poloha a zároveň sklon jsou zafixovány na jednom konci – je vetknut do stěny.) Jaký je tvar nosníku? Označme průhyb ve vzdálenosti x od upevněného konce jako z ; chceme určit $z(x)$. Řešení najdeme pouze pro malé průhyby. Také budeme předpokládat, že nosník je dlouhý ve srovnání s rozměry jeho průřezu. Jak už víte z přednášek z matematiky, křivost $1/R$ libovolné křivky $z(x)$ je určena vztahem

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 z / dx^2}{[1 + (dz/dx)^2]^{3/2}}. \quad (38.38)$$

⁵⁰⁾ Je to, samozřejmě, moment setrvačnosti plátku s jednotkovou hmotností na jednotku plochy.



Obr. 38.14 Konzola, se zátěží na konci.

Jelikož nás zajímají jen malé ohyby (tak to je obvykle v inženýrských konstrukcích), zanedbáváme $(dz/dx)^2$ v porovnání s jednou a budeme používat

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 z}{dx^2}. \quad (38.39)$$

Dále potřebujeme znát ohýbací silový moment M . Je funkcí x , neboť je roven momentu vůči neutrální ose průřezu. Zanedbejme vlastní tíhu nosníku a uvažme jen sílu F , která působí na konci nosníku směrem dolů. (Pokud se vám zachce, můžete uvážit vliv tíhy nosníku sami.) Pak je ohýbající silový moment v bodě x roven

$$M(x) = F(L - x),$$

neboť je to moment síly vzhledem k bodu x , který vyvolává síla F – moment, který nosník musí unést v bodě x . Dostaneme

$$F(L - x) = \frac{YI}{R} = YI \frac{d^2 z}{dx^2}$$

neboli

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{F}{YI} (L - x). \quad (38.40)$$

Tuto rovnici lze vyřešit bez jakýchkoliv triků; řešení je

$$z = \frac{F}{YI} \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right). \quad (38.41)$$

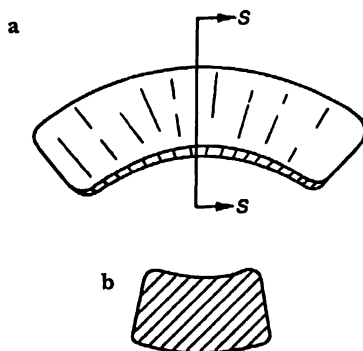
Přitom jsme použili naše předpoklady, že $z(0) = 0$ a dz/dx je také nulové v bodě $x = 0$. To je tedy tvar nosníku. Konec konzoly tedy klesne o

$$z(L) = \frac{F}{YI} \frac{L^3}{3}; \quad (38.42)$$

posunutí konce nosníku roste jako třetí mocnina jako délky.

Při odvozování naší přibližné teorie ohybu nosníku jsme předpokládali, že průřez nosníku se nezmění při jeho ohýbání. Je-li tloušťka nosníku malá ve srovnání s poloměrem křivosti, průřez se opravdu změní jen velmi málo a náš výsledek je v pořádku. Obecně však tento efekt není

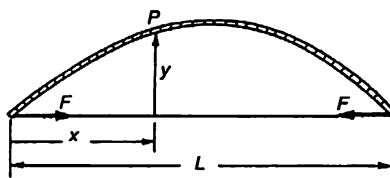
možné zanedbat, jak se snadno můžete přesvědčit, když v prstech ohnete měkký kousek gumy k mazání. Byl-li jeho průřez původně pravoúhlý, zjistíte, že po ohnutí je spodek rozšířen (obr. 38.15). Je to tak proto, že když stlačíme spodní část, rozšíří se látka do stran – jak to určuje Poissonův poměr. Guma se snadno ohýbá i natahuje, ale trochu připomíná kapalinu, neboť je těžké změnit její objem – to pěkně vidíte, když gumu ohnete. Poissonův poměr nestlačitelné látky by měl být přesně $1/2$; v případě gumy je této hodnotě blízko.



Obr. 38.15 a) Ohnutý kousek gumy. b) Průřez.

38.5 VZPĚRNOST

Využijeme naši teorii ohybu nosníku, abychom vysvětlili vybočení trámů sloupů nebo tyčí. Představte si situaci znázorněnou na obr. 38.16, na němž je původně rovná tyč udržována ve stavu vybočení dvěma opačnými silami, které stlačují její konce. Vypočítáme tvar tyče a velikost sil na koncích.



Obr. 38.16 Tyč ve stavu vybočení

Označme odchylku tyče od přímky procházející jejími konci jako $y(x)$, přičemž x je vzdálenost od jednoho z konců. Ohýbající silový moment M v bodě P na obrázku je roven součinu síly F a ramene síly, které je rovno příčné vzdálenosti y ,

$$M(x) = Fy. \quad (38.43)$$

Pomocí rovnice pro nosník (38.36) získáme

$$\frac{YI}{R} = Fy. \quad (38.44)$$

Pro malé odchyšky můžeme použít $1/R = -d^2 y/dx^2$ (znaménko minus proto, že křivost směřuje dolů.) Vyjde nám

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{F}{YI} y, \quad (38.45)$$

což je diferenciální rovnice pro sinusoidu. Pro malé odchyšky je křivka, kterou vytvoří vybočený nosník, sinusoida. Vlnová délka λ sinusoidy je rovna dvojnásobku vzdálenosti L mezi konci nosníku. Je-li vybočení malé, je to právě dvojnásobek délky neprohnuté tyče. Rovnice křivky tedy je

$$y = K \sin \frac{\pi x}{L}.$$

Vypočítáme její druhou derivaci

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{L^2} y.$$

Porovnáme-li tento vztah s rovnicí (38.45), vidíme, že síla je rovna

$$F = \pi^2 \frac{YI}{L^2}.$$

Při malých vybočeních síla *nezávisí na odchyлке*!

Fyzikálně probíhá následující proces. Je-li působící síla menší než F ve vztahu (38.46), vůbec k vyduť nedojde. Je-li však jen o málo větší než tato síla, tyč se náhle silně prohne, vybočí. Stane se to, překročí-li síly kritickou hodnotu $\pi^2 YI/L^2$ (tato hodnota je často nazývána Eulerova síla.). Když váha nákladu v prvním poschodí budovy překročí Eulerovu sílu pro podpůrné sloupy, budova se zhroutí. Podobné síly jsou velmi důležité i při návrhu kosmických lodí. Na jedné straně musí raketa unést svou váhu na startovací rampě a snést napětí po dobu zrychlování; na druhé straně je důležité, aby váha celé konstrukce byla minimální, aby užitečný náklad i množství paliva mohly být co největší.

Ve skutečnosti se nosník nemusí zlomit, překročí-li síla Eulerovu hodnotu. Je-li vybočení větší, je potřebná větší síla, než jsme před chvílí vypočítali, neboť se stanou důležitými členy v $1/R$ (viz (38.38)), které jsme dříve zanedbali. Abychom určili sílu v případě velkého prohnutí nosníku, musíme se vrátit zpět k přesné rovnici (38.44), kterou jsme uvedli předtím, než jsme použili přibližný vztah mezi R a y . Vztah (38.44) má dost jednoduché geometrické vlastnosti⁵¹⁾.

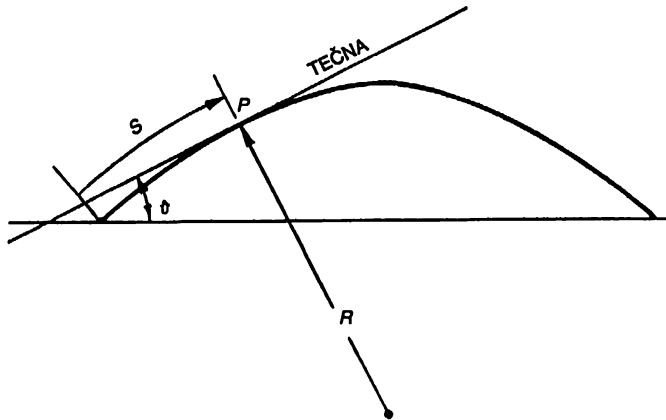
Řeší se sice trochu obtížněji, ale zato dost zajímavě. Místo popisování křivky pomocí x a y můžeme použít dvě nové proměnné: s – vzdálenost podél křivky a ϑ – úhel sklonu tečny ke křivce (viz *obr. 38.17*). Křivost je rychlost změny úhlu ve vzdálenosti:

$$\frac{1}{R} = \frac{d\vartheta}{ds}.$$

Přesnou rovnici (38.44) můžeme proto zapsat jako

$$\frac{d\vartheta}{ds} = -\frac{F}{YI} y.$$

⁵¹⁾ Stejný vztah vystupuje shodou okolností i v jiných fyzikálních situacích (např. při popisu tvaru povrchu kapaliny uzavřené mezi rovnoběžnými stěnami) a je možné využít stejné geometrické řešení.

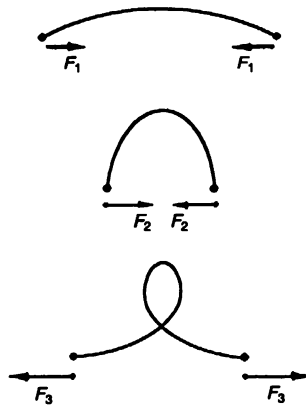


Obr. 38.17 Souřadnice s a ϑ , které popisují zakřivení nosníku

Zderivujeme-li tento vztah podle s a dy/ds nahradíme sinem úhlu ϑ , dostaneme

$$\frac{d^2 \vartheta}{ds^2} = -\frac{F}{YI} \sin \vartheta. \quad (38.47)$$

(Je-li ϑ malé, vrátíme se k rovnici (38.45). Vše souhlasí.)



Obr. 38.18 Tvary ve stavu vybočení

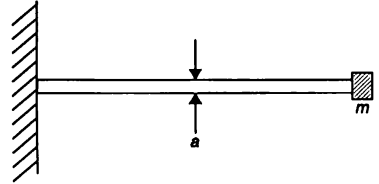
Možná, že vás potěší, že rovnice (38.47) je přesně stejná jako ta, která popisuje kmity kyvadla s velkou amplitudou; samozřejmě, F/YI je nahrazeno jinou konstantou. Dávno, v kapitole 9 prvního dílu, jsme se naučili řešit takovou rovnici numericky⁵²⁾. Jako výsledek najdete zajímavé křivky, známé jako *křivky elastiky*. Obr. 38.18 znázorňuje tři takové křivky odpovídající různým hodnotám F/YI .

52) Řešení lze také vyjádřit pomocí speciálních funkcí, Jacobiho eliptických funkcí, které můžete najít v tabulkách.

PŘÍKLADY A CVIČENÍ

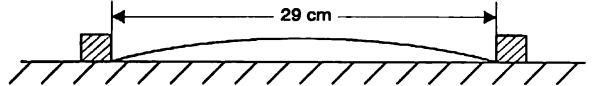
- 38.1 ■ Raketová technika vyžaduje konstrukce s maximální pevností a minimální hmotností.
- a) Porovnejte poloměry dvou válcových tyčí z hliníku a oceli, které mají stejnou délku a pevnost. Pevností rozumíme poměr působící příčné síly a výsledného posunutí.
- b) Liší se hmotnosti těchto tyčí podstatně?

- 38.2 ■ Hliníková tyč čtvercového průřezu je jedním koncem vetknuta a k jejímu volnému konci je upevněna hmotnost m (viz obrázek). Najděte vlastní frekvenci kmitů takové soustavy, je-li obsah průřezu tyče roven a^2 , její hmotnost je mnohem menší než m a rozměry hmotnosti m jsou zanedbatelné.



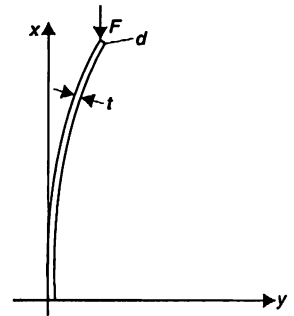
- 38.3 ■ Rychlost zvuku v *tekutině* jsme definovali jako derivaci tlaku podle hustoty. Ukažte, že pro *podélné* vlny v pevném tělese (rovinné vlny zhuštění) je fázová rychlost dána výrazem
$$v_{\text{podél}}^2 = \frac{(1 - \sigma)E}{(1 - 2\sigma)(1 + \sigma)\rho}$$
, kde σ je Poissonův poměr a E Youngův modul. Tento vzorec platí ovšem jen pro podélnou vlnu v „neohraničeném“ prostředí. Částice se přitom pohybují rovnoběžně se směrem šíření vlny... Příčné posunutí částic v takové vlně nenastává na rozdíl od situace, např. při stlačení tyče, při kterém se zvětšují její příčné rozměry. Odhadněte rozměry tyče, aby výše uvedený výraz pro fázovou rychlost přibližně platil.

- 38.4 ■ Ocelové pravítko délky $l = 30$ cm, šířky $a = 1,5$ cm a tloušťky $b = 0,08$ cm se oběma konci opírá o dvě lišty přibité ke stolu ve vzdálenosti $l = 29$ cm, jak je ukázáno na obrázku.



- a) Jakou matematickou křivku vytváří ohnuté pravítko?
b) Jakou silou působí pravítko na lišty?

- 38.5 ■ Dolní konec svislé tyče je vetknut a na jeho horní volný konec působí svislá síla F směrem dolů. Délka tyče je L . Příčný průřez tyče má tvar obdélníka se stranami t (tloušťka) a d (šířka). Najděte kritickou sílu, která vyvolá deformaci znázorněnou na obrázku.



Pružné látky

- 39.1 TENZOR DEFORMACE
- 39.2 TENZOR PRUŽNOSTI
- 39.3 POHYBY V PRUŽNÉM TĚLESE
- 39.4 NEPRUŽNÉ CHOVÁNÍ
- 39.5 VÝPOČET KONSTANT PRUŽNOSTI

39.1 TENZOR DEFORMACE

V předcházející kapitole jsme hovořili o deformacích konkrétních pružných těles. V této kapitole se chceme podívat na to, co se děje uvnitř pružné látky *obecně*. Nějak bychom chtěli popsat podmínky – napětí a deformace – uvnitř velkého bloku ze želatiny, který je pokroucen a stlačen nějakým velmi složitým způsobem. Na to musíme umět popsat *lokální deformaci* v okolí libovolného bodu pružného tělesa; můžeme to provést pomocí zadání šesti čísel – složek symetrického tenzoru – v každém bodě. Dříve (v kapitole 31) jsme hovořili o tenzoru napětí; nyní potřebujeme tenzor deformace.

Nejdříve si představme nedeformovanou látku a všimněme si pohybu malého zrnka „nečistoty“, které se nachází uvnitř tělesa, po zdeformování látky. Zrnko, které se původně nacházelo v bodě P s polohou $\mathbf{r} = (x, y, z)$, se přemístí do nové polohy P' s $\mathbf{r}' = (x', y', z')$, jak ilustruje *obr. 39.1*. Vektor posunutí z P do P' nazveme \mathbf{u} . Potom

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}. \quad (39.1)$$

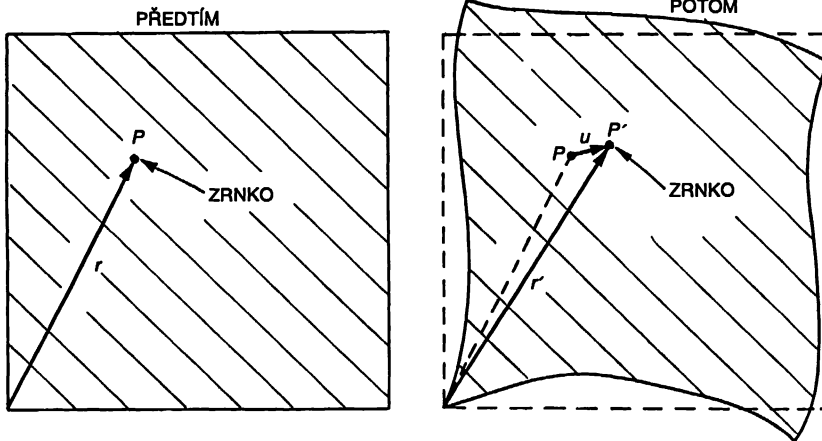
Posunutí \mathbf{u} samozřejmě závisí na bodě P , z něhož vycházíme, takže \mathbf{u} je vektorovou funkcí \mathbf{r} , nebo – pokud se vám to líbí více – funkcí (x, y, z) .

Nejdříve si všimněme jednoduché situace, kdy je deformace konstantní v celé látce – to je případ *homogenní deformace*. Máme například hranol z dané látky a rovnoměrně jej roztáhneme. Změníme jen jeho rozměry v jednom směru, např. ve směru osy x , jak ukazuje *obr. 39.2*. Posunutí u_x zrnka v bodě x je úměrné x . Máme

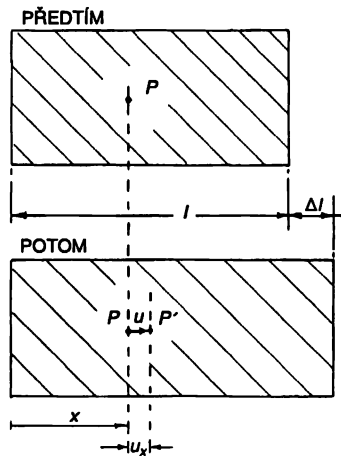
$$\frac{u_x}{x} = \frac{\Delta l}{l}.$$

u_x zapíšeme v následujícím tvaru

$$u_x = e_{xx}x.$$



Obr. 39.1 Zrnko látky v bodě P nedeformovaného bloku se při deformaci přemístí do bodu P'



Obr. 39.2 Homogenní deformace v tahu

Konstanta úměrnosti e_{xx} je samozřejmě shodná s $\Delta l/l$. (Za chvíli uvidíte, proč používáme dva indexy.)

Není-li deformace homogenní, bude se vztah u_x a x při přechodu z místa na místo v látce měnit. Obecně můžeme definovat e_{xx} jako jakési lokální $\Delta l/l$, a to jako

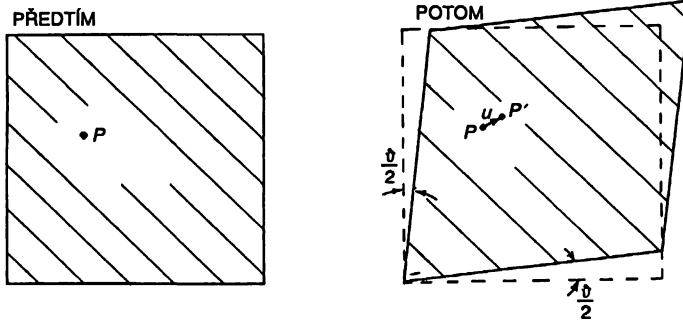
$$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}. \quad (39.2)$$

Toto číslo, které je nyní funkcí x , y a z , určuje velikost protažení ve směru osy x v celém kusu želatiny. Látka může být samozřejmě protažena i ve směru osy y a z . Tato protažení popisujeme funkcemi

$$e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (39.3)$$

Musíme se naučit popisovat i deformace ve smyku. Představme si malou krychli vyznačenou v původně neporušené želatině. Pokud želatinu stiskneme a změním její tvar, může se krychle změnit v rovnoběžnostěn, jak je ukázáno na obr. 39.3.⁵³⁾ Při takové deformaci je posunutí každé částice ve směru osy x úměrné souřadnici y ,

$$u_x = \frac{\vartheta}{2} y. \quad (39.4)$$



Obr. 39.3 Homogenní deformace ve smyku

Zároveň dojde k posunutí ve směru osy y úměrnému x ,

$$u_y = \frac{\vartheta}{2} x. \quad (39.5)$$

Deformaci střižného typu tedy můžeme popsat takto:

$$u_x = e_{xy}y, \quad u_y = e_{yx}x,$$

přičemž

$$e_{xy} = e_{yx} = \frac{\vartheta}{2}.$$

Dále byste si mohli představit, že v případě nehomogenních deformací bychom mohli popsat obecné deformace ve smyku pomocí e_{xy} a e_{yx} definovaných jako

$$e_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad e_{yx} = \frac{\partial u_y}{\partial x}. \quad (39.6)$$

⁵³⁾ V tomto případě jsme se rozhodli rozdělit celkový úhel smyku ϑ na dvě stejné části, aby deformace byla vůči záměně x a y symetrická.

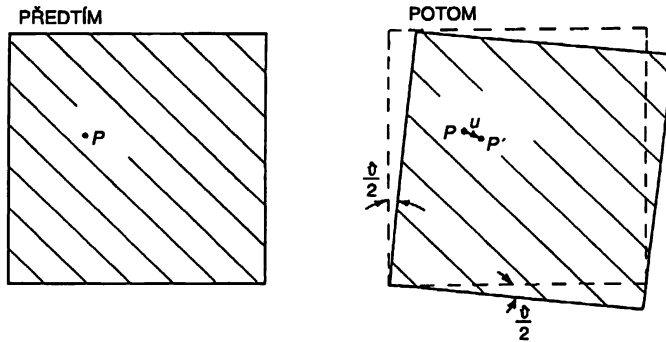
Je tu však jedna obtíž. Necht' jsou posunutí u_x a u_y dána vztahy

$$u_x = \frac{\vartheta}{2} y, \quad u_y = -\frac{\vartheta}{2} x.$$

Podobají se sice rovnicím (39.4) a (39.5), ale znaménko u_y je obrácené. Při takovém posunutí se malá krychle v želatině potočí o úhel $\vartheta/2$, jak ukazuje obr. 39.4. Není to žádná deformace – pouze pootočení v prostoru. Látka se nedeformovala; relativní polohy jejích atomů se vůbec nezměnily. Musíme nějak pozměnit naše definice, abychom vyloučili z našich deformací ve smyku čistá pootočení. Klíčem je skutečnost, že jsou-li $\partial u_y / \partial x$ a $\partial u_x / \partial y$ stejné, ale opačného znaménka, deformace neexistuje; můžeme proto problémy řešit *definicí*

$$e_{xy} = e_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right).$$

Při čisté rotaci jsou obě hodnoty nulové, přičemž při čistém smyku máme $e_{xy} = e_{yx}$, jak jsme chtěli.



Obr. 39.4 Homogenní rotace bez deformace

Při nejobecnější deformaci, která může zahrnovat jak roztažení nebo stlačení, jakož i smyk, *definujeme* stav deformace zadáním devíti čísel:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ e_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \dots \\ e_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \\ &\dots \end{aligned} \tag{39.7}$$

Jsou to složky *tenzoru deformace*. Protože je to *symetrický tenzor* (podle definice platí vždy $e_{xy} = e_{yx}$ atd.), obecně je to jen šest různých čísel. Jistě si pamatujete (viz kapitola 31), že obecnou

vlastností tenzoru je, že se jeho složky transformují jako součiny složek dvou vektorů. (Jsou-li A a B vektory, je $C_{ij} = A_i B_j$ tenzor.) Každý člen e_{ij} je součinem (nebo součtem takových součinů) složek vektoru $u = (u_x, u_y, u_z)$ a operátoru $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$, který se, jak víme, transformuje jako vektor. Nechť x_1, x_2, x_3 představují x, y, z a u_1, u_2, u_3 nahradí u_x, u_y, u_z ; pak můžeme obecnou složku e_{ij} tenzoru deformace zapsat jako

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad (39.8)$$

přičemž i a j mohou být rovny 1, 2 nebo 3.

Při homogenní deformaci zahrnující tah i smyk jsou všechna e_{ij} konstantní a můžeme zapsat

$$u_x = e_{xx}x + e_{xy}y + e_{xy}z. \quad (39.9)$$

(Počátek souřadnicové soustavy klademe do bodu, v němž $u = 0$.) V takovémto případě udává tenzor deformace vztah mezi dvěma vektory: polohovým vektorem $r = (x, y, z)$ a vektorem posunutí $u = (u_x, u_y, u_z)$.

Nejsou-li deformace homogenní, může se každý kousek želatiny i trochu pootočit; objeví se lokální rotace. Jsou-li všechny změny malé, platí

$$\Delta u_i = \sum_j (e_{ij} - \omega_{ij}) \Delta x_j, \quad (39.10)$$

kde ω_{ij} je *antisymetrický* tenzor

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad (39.11)$$

který popisuje rotace. Nebudeme se však dále trápit s rotacemi, zajímat nás budou jen deformace popsané symetrickým tenzorem e_{ij} .

39.2 TENZOR PRUŽNOSTI

Když už se nám podařilo popsat deformace, rádi bychom našli souvislost s vnitřními silami – napětími v látce. Budeme předpokládat, že v každé malé části látky platí Hookeův zákon a zapíšeme vztah úměrnosti mezi napětími a deformacemi. V kapitole 31 jsme definovali složku S_{ij} tenzoru napětí jako i -tou složku síly, která působí na jednotku plochy kolmé na j -tou osu. Hookeův zákon říká, že každá složka S_{ij} je v lineárním vztahu ke *každé* složce tenzoru deformace. Jelikož S_{ij} mají po devíti složkách, existuje $9 \times 9 = 81$ možných koeficientů, které popisují pružné vlastnosti látky. Je-li látka homogenní, jsou to konstanty. Tyto koeficienty nazveme C_{ijkl} a definujeme je vztahem

$$S_{ij} = \sum_{k,l} C_{ijkl} e_{kl}, \quad (39.12)$$

přičemž každé z i, j, k, l nabývá hodnoty 1, 2 nebo 3. Jelikož koeficienty C_{ijkl} zprostředkují vztah mezi dvěma tenzory, tvoří také tenzor – tenzor *čtvrtého řádu*. Můžeme jej nazvat *tenzorem pružnosti*.

Předpokládejme, že všechna G -číska jsou známa a že na nějaké těleso zvláštního tvaru působí komplikovaná síla. Uskuteční se všechny možné druhy deformací a těleso se nakonec ustálí v nějakém deformovaném tvaru. Jaká budou posunutí? Jistě chápete, že je to složitý problém. Znáte-li deformace, můžete určit pomocí vztahu (39.12) napětí (nebo naopak). Ale výsledné hodnoty napětí a deformací v libovolném bodě závisí na tom, co se stalo v celém zbytku látky.

Nejsnazší způsob, jak vyřešit úlohu, je uvažovat o energii systému. Působí-li síla, která je úměrná posunutí x , řekněme $F = kx$, je práce potřebná k posunutí x rovna $kx^2/2$. Podobně práce potřebná na deformaci jednotky objemu látky vychází

$$w = \frac{1}{2} \sum_{ijkl} C_{ijkl} e_{ij} e_{kl}$$

Celková práce W , která je vykonána při deformaci tělesa, je rovna integrálu w přes celý objem tělesa:

$$W = \int \frac{1}{2} \sum_{ijkl} C_{ijkl} e_{ij} e_{kl} dV. \quad (39.14)$$

To je tedy potenciální energie vnitřních napětí v látce. Je-li těleso v rovnováze, musí být vnitřní energie *minimální*. Problém určení deformací v tělese lze tedy vyřešit, najdeme-li taková posunutí u v tělese, která minimalizují W . V kapitole 19 jsme naznačili obecné myšlenky variačního počtu, které se používají při řešení minimalizačních problémů podobného typu. Zde už do dalších podrobností zajít nemůžeme.

Nyní nás hlavně zajímá, co je možné říci o obecných vlastnostech tenzoru pružnosti. Zaprvé, je jasné, že ve skutečnosti *ne všechny* z 81 prvků v C_{ijkl} jsou *různé*. Jelikož S_{ij} jakož i e_{ij} jsou symetrické tenzory, má každý jen šest různých složek a v C_{ijkl} může být nanejvýš 36 různých členů. Obvykle je jich však mnohem méně.

Podívejme se na konkrétní příklad kubického krystalu. Hustota energie w pro něj vychází

$$w = \frac{1}{2} \{ C_{xxxx} e_{xx}^2 + C_{xxyy} e_{xx} e_{yy} + C_{xxzz} e_{xx} e_{zz} + C_{xxyx} e_{xx} e_{xy} + C_{xxyy} e_{xx} e_{yy} \dots \text{atd.} \dots + \\ + C_{yyyy} e_{yy}^2 + \dots \text{atd.} \dots \text{atd.} \dots \}. \quad (39.15)$$

Dohromady 81 členů! Kubický krystal má však určité symetrie. Pootočíme-li krystal o 90° , má stejné fyzikální vlastnosti. Jeho pevnost při roztahení ve směru osy y je stejná jako ve směru osy x . Změníme-li tedy naše definice os x a y ve vztahu (39.15), energie se nezmění. V kubickém krystalu musí tedy platit

$$C_{xxxx} = C_{yyyy} = C_{zzzz}. \quad (39.16)$$

Dále můžeme ukázat, že členy typu C_{xxyy} musí být nulové. Kubický krystal má tu vlastnost, že je symetrický vůči *zrcadlovému odrazu* vzhledem k libovolné rovině, která je kolmá na jednu z jeho os. Zaměníme-li y za $-y$, nic se nezmění. Změníme-li však y na $-y$, e_{xy} se změní na $-e_{xy}$: posunutí ve směru $+y$ se změní na posunutí ve směru $-y$. Nemá-li se změnit energie, C_{xxyy} musí při odrazu přejít na $-C_{xxyy}$. Zrcadlový krystal je však stejný jako dříve, proto C_{xxyy} musí být rovno $-C_{xxyy}$. To je možné jen tehdy, když jsou obě hodnoty nulové.

Řeknete: „A stejnou úvahou dokážeme $C_{yyyy} = 0$!“ Ne, protože jsou tu *čtyři ypsilony*. Znaménko se mění jednou v každém z nich a čtyři minusy dávají plus. Tam, kde jsou *dva* nebo *čtyři* ypsilony, nemusí být příslušný člen nulový. Nulový je jen tehdy, jsou-li v něm *tři* nebo *jeden*. V kubickém

krystalu má tedy každý nenulový člen jen *sudý počet* totožných indexů. (Stejně argumenty jako pro y platí samozřejmě k pro x a z .) Už jsme však dokázali, že vyměníme-li navzájem všechna x a y (nebo všechna z a x , atd.), musíme dostat – v kubickém krystalu – stejné hodnoty. To znamená, že existují jen tři různé nenulové možnosti:

$$\begin{aligned} C_{xxxx} & (= C_{yyyy} = C_{zzzz}) \\ C_{xxyy} & (= C_{yyxx} = C_{xxzz}, \text{ atd.}) \\ C_{xyxy} & (= C_{yxyx} = C_{zzzz}, \text{ atd.}). \end{aligned} \quad (39.17)$$

V kubickém krystalu pak hustota energie vypadá takto:

$$w = \frac{1}{2} \{ C_{xxxx} (e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2) + 2 C_{xxyy} (e_{xx} e_{yy} + e_{yy} e_{zz} + e_{zz} e_{xx}) + 4 C_{xyxy} (e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{zx}^2) \}. \quad (39.18)$$

V izotropní (tj. nekystalické) látce je symetrie ještě vyšší. Céčka musí být stejná při *libovolném* výběru souřadnicové soustavy. Ukazuje se, že v tom případě existuje ještě jeden vztah mezi céčky, a to

$$C_{xxxx} = C_{xxyy} + C_{xyxy}. \quad (39.19)$$

Můžeme se o tom přesvědčit na základě následující obecné úvahy. Tenzor napětí S_{ij} musí s e_{ij} souviset způsobem, který vůbec nezávisí na souřadnicových směrech; mohou být vázány výlučně přes *skalární* veličiny. „To je snadné,“ řeknete si. „Jediný způsob, jak získat S_{ij} z e_{ij} , je vynásobením skalární konstantou. To je právě Hookeův zákon. Musí platit $S_{ij} = (\text{konstanta}) \cdot e_{ij}$.“ To však není úplně pravda; může se vyskytnout i *jednotkový tenzor* δ_{ij} vynásobený nějakým skalárem, který závisí na e_{ij} lineárně. Jediný invariant, který můžete vyrobit z éček je $\sum e_{ii}$. (Transformuje se jako $x^2 + y^2 + z^2$, což je skalár.) Nejobecnější tvar vztahu závislosti S_{ij} na e_{ij} v případě izotropních látek tedy je

$$S_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda \left(\sum_k e_{kk} \right) \delta_{ij}. \quad (39.20)$$

(První konstanta se obvykle píše jako *dvakrát* μ ; v tom případě je koeficient μ roven modulu pružnosti ve smyku, který jsme zavedli v předcházející kapitole.) Konstanty μ a λ se nazývají Lamého konstanty pružnosti. Porovnáte-li vztahy (39.20) a (39.12), vidíte, že

$$\begin{aligned} C_{xxyy} & = \lambda \\ C_{xyxy} & = 2\mu \\ C_{xxxx} & = 2\mu + \lambda. \end{aligned} \quad (39.21)$$

Tím jsme dokázali, že vztah (39.19) opravdu platí. Také vidíte, že pružné vlastnosti izotropní látky jsou úplně určeny dvěma konstantami, jak jsme to už tvrdili v minulé kapitole.

Céčka lze vyjádřit pomocí libovolných dvou konstant pružnosti, které jsme používali dříve, například pomocí Youngova modulu pružnosti Y a Poissonova poměru σ . Necháme vám jako úkol

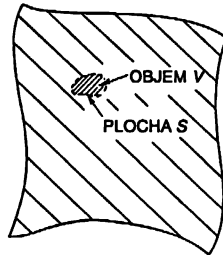
dokázat, že

$$\begin{aligned}
 C_{xxxx} &= \frac{Y}{1 + \sigma} \left(1 + \frac{\sigma}{1 - 2\sigma} \right) \\
 C_{xyxy} &= \frac{Y}{1 + \sigma} \left(\frac{\sigma}{1 - 2\sigma} \right) \\
 C_{xyxy} &= \frac{Y}{(1 + \sigma)}.
 \end{aligned} \tag{39.22}$$

39.3 POHYBY V PRUŽNÉM TĚLESE

Už jsme upozornili, že v případě pružného tělesa *v rovnováze* se vnitřní napětí přizpůsobí tak, aby energie byla minimální. Nyní se podíváme, co se stane, *nejsou-li* vnitřní síly v rovnováze. Vezměme malý kousek látky, který se nachází uvnitř nějaké plochy S (obr. 39.5). Je-li daný kousek v rovnováze, musí být celková síla F , která na něj působí, nulová. Tuto sílu si můžeme představit jako výslednici dvou sil. Jedna z nich je důsledkem vnějších sil, například gravitace, které z dálky působí na náš kousek látky a vytvářejí v něm objemovou *hustotu síly* f_{ext} . Celková vnější síla F_{ext} je integrálem f_{ext} přes objem kousku látky:

$$F_{\text{ext}} = \int f_{\text{ext}} dV. \tag{39.23}$$



Obr. 39.5 Malý element objemu V ohraničený plochou S

V rovnováze by se tato síla rušila s celkovou silou F_{int} , kterou na povrchu S vytváří okolní látka. *Není-li* však náš kousek v rovnováze, pokud se pohybuje, je součet vnitřní a vnější síly roven součinu hmotnosti a zrychlení. Máme

$$F_{\text{ext}} + F_{\text{int}} = \int \rho \mathbf{r} dV, \tag{39.24}$$

kde ρ je hustota látky a \mathbf{r} její zrychlení. Rovnice (39.23) a (39.24) můžeme zkombinovat a zapsat takto:

$$F_{\text{int}} = \int_V (-f_{\text{ext}} + \rho \mathbf{r}) dV. \tag{39.25}$$

Zápis se zjednoduší, zavedeme-li

$$\mathbf{f} = -\mathbf{f}_{\text{ext}} + \rho \mathbf{r}. \quad (39.26)$$

Potom se rovnice (39.25) zapíše jako

$$\mathbf{F}_{\text{int}} = \int_V \mathbf{f} dV. \quad (39.27)$$

Síla, kterou jsme nazvali \mathbf{F}_{int} , souvisí s napětími v látce. Tenzor napětí S_{ij} byl v kapitole 31 definován tak, že složka x síly $d\mathbf{F}$ působící na element povrchu dS , jehož jednotková normála je \mathbf{n} , je roven

$$d\mathbf{F}_x = (S_{xx}n_x + S_{xy}n_y + S_{xz}n_z) dS. \quad (39.28)$$

Složka \mathbf{F}_{int} ve směru x která působí na náš kousek látky, je integrálem $d\mathbf{F}_x$ přes plochu. Dosaďme-li do složky x vztahu (39.27), dostaneme

$$\int_S (S_{xx}n_x + S_{xy}n_y + S_{xz}n_z) dS = \int_V f_x dV. \quad (39.29)$$

Máme tu vztah mezi povrchovým integrálem a objemovým integrálem – a to nám připomíná něco, co jsme se naučili v části o elektřině. Všimněte si, že zapomenete-li na první index x v každém S_{ij} na levé straně rovnice (39.29), vypadá zbytek jako integrál veličiny „ $S^a \cdot \mathbf{n}$ “ (tj. normálové složky vektoru). Je to tok vektoru S_x daného objemu. Ten pak lze pomocí Gaussova zákona zapsat jako objemový integrál z divergence „ S^a “. Totéž platí bez ohledu na přítomnost indexu x – je to prostě matematická věta, kterou můžete odvodit pomocí integrování per partes. Jinými slovy, rovnici (39.29) můžeme změnit na

$$\int_V \left(\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial z} \right) dV = \int_V f_x dV. \quad (39.30)$$

Nyní můžeme vynechat objemové integrály a diferenciální rovnici pro obecnou složku f můžeme zapsat ve tvaru

$$f_i = \sum_j \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}. \quad (39.31)$$

Tento vztah prozrazuje, jak hustota síly souvisí s tenzorem napětí S_{ij} .

Teorie pohybů uvnitř pružného tělesa spočívá v následujícím: Známe-li počáteční posunutí, daná, řekněme, pomocí \mathbf{u} , můžeme vypočítat deformace ϵ_{ij} . Z deformací můžeme získat napětí pomocí vztahu (39.12). Z napětí vypočteme hustotu síly f v rovnici (39.31). Známe-li f , můžeme z rovnice (39.26) najít zrychlení \mathbf{r} v látce a ta nám prozradí, jak se budou měnit posunutí. Složíme-li vše dohromady, získáme hroznou pohybovou rovnici pružné pevné látky. Tu jen zapíšeme jako výsledek, který vyjde v případě izotropní látky. Použijete-li vztah (39.20) pro S_{ij} a ϵ_{ij} zapíšete jako $1/2(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$, najdete nakonec vektorovou rovnici

$$\mathbf{f} = (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (39.32)$$

Skutečně se můžete snadno přesvědčit, že vztah mezi f a u musí mít právě takový tvar. Síla musí záviset na druhých derivacích posunutí u . Jaké existují druhé derivace u , které jsou vektory? Jedna možnost je $\nabla(\nabla \cdot u)$; to je pravý vektor. Jediná jiná možnost je $\nabla^2 u$. Nejobecnější tvar tedy je

$$f = a\nabla(\nabla \cdot u) + b\nabla^2 u,$$

což je právě (39.32) s jinými názvy konstant. Třeba se podíváte, proč zde nemáme třetí člen s $\nabla \times \nabla \times u$, který je také vektorem. Uvědomte si však, že $\nabla \times \nabla \times u$ je totéž jako $\nabla^2 u - \nabla(\nabla \cdot u)$, je tedy jen lineární kombinací našich dvou členů. Kdybychom tento člen přidali, nic nového bychom nezískali. Opět jsme jednou dokázali, že izotropní látka má jen dvě konstanty pružnosti.

Abychom získali pohybovou rovnici látky, můžeme (39.32) přirovnat k $\rho \partial^2 u / \partial t^2$ (nyní zanedbáme objemové síly typu gravitace) a zapsat

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot u) + \mu \nabla^2 u. \quad (39.33)$$

Rovnice je trochu podobná vlnové rovnici v elektromagnetizmu, obsahuje však dodatečný složitý člen. Pro látky, jejichž pružné vlastnosti jsou všude stejné, můžeme tvar obecného řešení najít následujícím způsobem: Pamatujte si, že každé vektorové pole můžeme zapsat ve tvaru součtu dvou vektorů: jednoho, který má nulovou divergenci, a druhého, jehož rotace je nulová. Jinými slovy, můžeme psát

$$u = u_1 + u_2 \quad (39.34)$$

přičemž

$$\nabla \cdot u_1 = 0, \quad \nabla \times u_2 = 0. \quad (39.35)$$

Dosadíme-li $u_1 + u_2$ za u do vztahu (39.33), najdeme

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} [u_1 + u_2] = (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot u_2) + \mu \nabla^2 (u_1 + u_2). \quad (39.36)$$

Vektoru u_1 se můžeme zbavit, vypočítáme-li divergenci této rovnice

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \cdot u_2) = (\lambda + \mu) \nabla^2 (\nabla \cdot u_2) + \mu \nabla \cdot \nabla^2 u_2$$

Jelikož pořadí operátorů (∇^2) a ($\nabla \cdot$) můžeme zaměnit, můžeme vyjmout divergenci a získat

$$\nabla \cdot \left\{ \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \nabla^2 u_2 \right\} = 0. \quad (39.37)$$

Jelikož $\nabla \times u_2$ je podle definice nulové, je rotace členu ve složené závorce také nulová; proto i sám člen v závorce je identicky roven nule; platí

$$\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 u_2. \quad (39.38)$$

To je vektorová vlnová rovnice pro vlny, které se pohybují rychlostí $c_2 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$. Jelikož je rotace \mathbf{u}_2 nulová, není s touto vlnou spojen žádný smyk; je tu jen vlna podélná (podobná zvukové), o níž jsme hovořili v předcházející kapitole. Její rychlost je rovna právě $c_{\text{podél}}$, které jsme tam určili.

Podobně vypočítáme-li rotaci vztahu (39.36), můžeme ukázat, že \mathbf{u}_1 splňuje rovnici

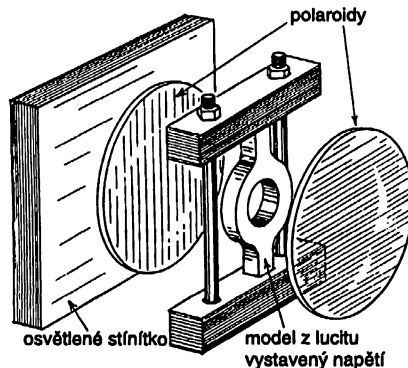
$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_1}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \mathbf{u}_1. \quad (39.39)$$

Je to opět vektorová vlnová rovnice – pro vlny s rychlostí $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$. Jelikož $\nabla \cdot \mathbf{u}_1$ je nulové, \mathbf{u}_1 nezpůsobuje změny hustoty; vektor \mathbf{u}_1 popisuje střížné (smykové) vlnění, s nímž jsme se také setkali v předcházející kapitole: $c_2 = c_{\text{torz}}$.

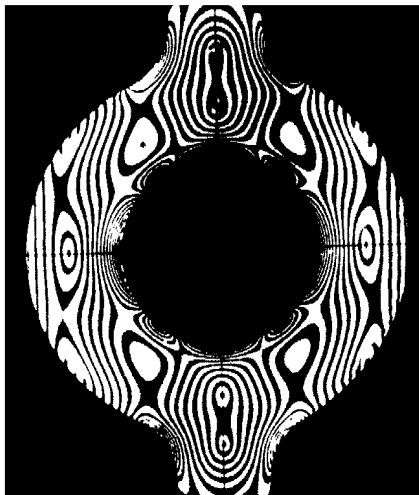
Kdybychom chtěli určit statická napětí v izotropní látce, mohli bychom je v principu najít vyřešením rovnice (39.32) s f rovnými 0 (případně rovnými hustotě statických objemových sil gravitace, jako např. ρg) za určitých podmínek, které souvisejí se silami působícími na stěnách našeho velkého bloku látky. Je to o něco těžší úloha než odpovídající problém v elektromagnetismu. Je těžší za prvé proto, že příslušné rovnice jsou o něco složitější, a za druhé proto, že tvary pružných těles, které by nás mohly zajímat, jsou obvykle mnohem komplikovanější. V elektromagnetismu nás často zajímají řešení Maxwellových rovnic v okolí relativně jednoduchých geometrických útvarů, jako jsou válce, koule apod., neboť jsou to vhodné tvary pro elektrická zařízení. V teorii pružnosti bychom rádi prozkoumali objekty dost složitých tvarů, jako je hák jeřábu, automobilová kliková hřídel nebo rotor plynové turbíny. Takové problémy lze někdy vyřešit přibližně pomocí numerických metod, které využívají zmíněný princip minima energie. Jiný způsob je použít model tělesa a změřit vnitřní deformace experimentálně pomocí polarizovaného světla.

Dělá se to takto: Přiložíme-li k průhledné izotropní látce (např. průzračné umělé hmotě typu plexiskla) napětí, stane se dvojlomnou. Propouštíme-li jí polarizované světlo, rovina polarizace se pootočí o hodnotu, která souvisí s napětím. Změřením pootočení lze změřit napětí.

Obr. 39.6 znázorňuje, jak takové měřicí zařízení vypadá. Obr. 39.7 je fotografie pružného modelu komplikovaného tělesa pod tlakem.



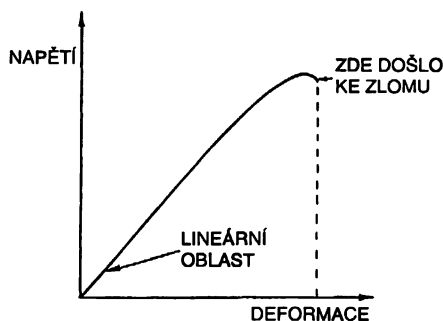
Obr. 39.6 Měření vnitřních napětí pomocí polarizovaného světla



Obr. 39.7 Takto vypadá plastický model pod tlakem mezi dvěma zkříženými polaroidy (Z knihy F. W. Saerse *Optics*. Addison-Wesley Publishing co., Reading, Mass., 1949.)

39.4 NEPRUŽNÉ CHOVÁNÍ

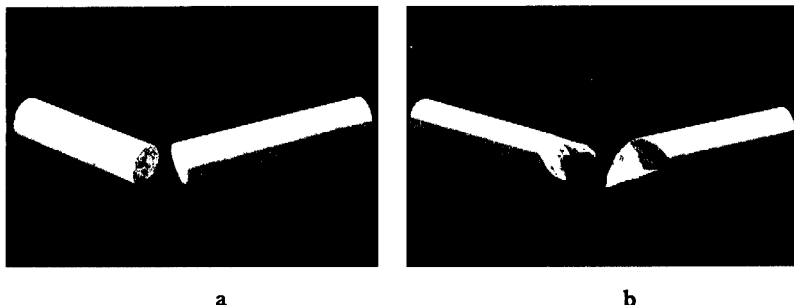
U všeho, o čem jsme dosud hovořili, jsme předpokládali, že napětí je úměrné deformaci; obecně to však *není* pravda. Obr. 39.8 zobrazuje typickou křivku závislosti mezi napětím a deformací. Pro malé deformace je napětí deformaci úměrné. Ale za určitým bodem se vztah mezi napětím a deformací začne odchylovat od přímky.



Obr. 39.8 Typický vztah mezi napětím a deformací při velkých deformacích

U mnohých látek, takových, které lze nazvat křehkými, se deformovaný předmět zlomí jen malý kousek za bodem, kde se křivka začne zakřivovat. Obecně vztah mezi napětím a deformací obsahuje i jiné komplikace. Deformujete-li například nějaký předmět, mohou být napětí nejdříve velká, ale pomalu se s časem zmenšují. Navíc, dosáhnete-li velmi vysokého napětí (ale nižšího, než je bod zlomu) a pak zmenšíte deformaci, budou se napětí vracet podél jiné křivky. Objevuje se zde slabý hysteretzní jev (podobný tomu, jaký jsme pozorovali na vztahu B a H v magnetických látkách).

Napětí, při němž dojde ke zlomu, je u různých látek dost odlišné. Některé látky se lámou, když je dosaženo určitého maximálního napětí *v tahu*. Jiné látky prasknou, když je převýšena určitá hodnota maximálního smykového napětí. Křída je příkladem látky, které je mnohem slabší v tahu než ve smyku. Když zatahnete za konce kousku školní křídly, zlomí se křída kolmo na směr působící síly proto, že je jen souborem částic, které byly stlačeny dohromady, ale která lze snadno oddělit. Látka je však mnohem pevnější ve smyku, neboť v tom případě si částice navzájem překázejí. Jistě si nyní vzpomenete, že v případě torzní tyče dochází v každém průřezu ke smyku. Ukázali jsme, že smyk je ekvivalentní kombinaci tahu a tlaku pod úhlem 45° . Zkrouťte-li kus školní křídly, zlomí se podél složité plochy, která začíná pod úhlem 45° vůči její ose. Fotografie takto zlomeného kousku křídly je na *obr. 39.9b*. Křída se zlomí tam, kde je napětí maximální.



Obr. 39.9 a) Kousek křídly zlomený tahem na koncích. b) Kousek zlomený kroucením

Některé látky se chovají velmi divně a složitě. Čím je látka složitější, tím je její chování zajímavější. Vezmete-li si kousek plastového obalu, zmačkáte jej do tvaru koule a hodíte na stůl, pomaličku se rozvine a vrátí se do původního plochého tvaru. Na první pohled byste mohli být v pokušení myslet si, že mu setrvačnost brání vrátit se do původního tvaru. Jednoduchý výpočet vás však přesvědčí, že setrvačná síla je o několik řádů slabší než síla, která takovýto jev může vysvětlit. Zdá se, že tu bojují dva důležité mechanismy: „něco“ uvnitř látky si zapamatuje původní tvar a usiluje o návrat, ale něco jiného dává přednost novému tvaru a brání návratu do starého tvaru.

Nebudeme se snažit popsat mechanismy, které hrají úlohu v plastovém obalu, ale představu o tom, jak dochází k takovému jevu, můžete získat i z následujícího *modelu*. Představte si látku, která se skládá z dlouhých, pružných, ale silných vláken, mezi nimiž se nacházejí dutiny naplněné viskózní kapalinou. Také si představte, že mezi dutinami existují uzoučké kanálky, takže kapalina může pomalu prosakovat z jedné dutiny do sousední. Zmačkáme list tenké látky, deformujeme dlouhá vlákna, přičemž vytlačíme kapalinu z jednoho místa a přinutíme ji zaplnit jiné dutiny, které se protáhly. Když list uvolníme, dlouhá vlákna se snaží vrátit do původního tvaru. Aby se toto mohlo stát, musí se také kapalina vrátit na původní místo, což se v důsledku viskozity stane relativně pomalu. Síly, které jsme vyvinuli při mačkání listu, jsou mnohem větší než síly, které vyvíjejí vlákna. List můžeme zmačkat rychle, ale vracet se bude pomaleji. Za chování plastového obalu je bezpochyby odpovědná kombinace dlouhých pevných a malých pohyblivých molekul. Taková představa také souvisí s faktem, že látka se vrátí do původního tvaru rychleji, když je zahřátá, než když je chladná. Teplo zvyšuje pohyblivost malých molekul (snižuje viskozitu).

Ačkoliv jsme zde diskutovali o tom, kdy přestává platit Hookeův zákon, pozoruhodnou věcí není ani tak moc to, že Hookeův zákon neplatí při velkých deformacích, ale spíše to, že je jeho platnost tak univerzální. Jistou představu o tom, proč to tak je, můžeme získat z pohledu ne energii deformace látky. Tvzení, že napětí je úměrné deformaci, je ekvivalentní tvzení, že

energie deformace je úměrná druhé mocnině deformace. Vezměme tyč a zkrutíme ji o malý úhel ϑ . Platí-li Hookeův zákon, měla by být energie deformace vy úměrná druhé mocnině ϑ . Předpokládejme, že energie je libovolnou funkcí úhlu; můžeme ji zapsat ve tvaru Taylorova rozvoje kolem nulového úhlu

$$W(\vartheta) = W(0) + W'(0) \vartheta + \frac{1}{2} W''(0) \vartheta^2 + \frac{1}{6} W'''(0) \vartheta^3 \dots \quad (39.40)$$

Moment síly N je derivací W podle úhlu, takže dostaneme

$$N(\vartheta) = W'(0) + W''(0) \vartheta + \frac{1}{2} W'''(0) \vartheta^2 + \dots \quad (39.41)$$

Měříme-li nyní úhly od *rovnovážné* polohy, je první člen nulový. První nenulový člen je úměrný ϑ ; při dostatečně malých úhlech dominuje nad členem řádu ϑ^2 . (Ve skutečnosti bývají látky uvnitř značně symetrické, takže $N(\vartheta) = -N(-\vartheta)$; v tom případě je člen úměrný ϑ^2 nulový a odchylka od linearit pochází až od členu s ϑ^3 .) Není však důvodu, aby něco podobného platilo i při roztahování a stlačování. Jediné, co jsme nevysvětlili, je skutečnost, že se předměty obvykle lámou brzy po té, co se členy vyššího řádu stanou významnými.

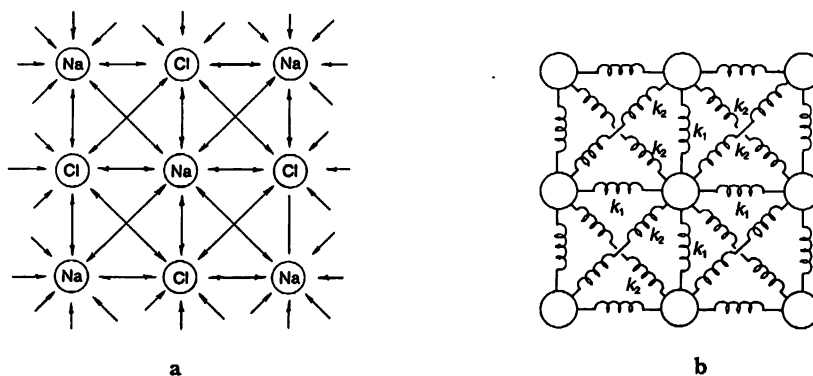
39.5 VÝPOČET KONSTANT PRUŽNOSTI

Jako poslední téma z teorie pružnosti si ukážeme, jak se lze pokusit o výpočet konstant pružnosti látky na základě znalosti některých vlastností atomů, které látku tvoří. Prozkoumáme pouze jednoduchý případ, a to *iontový* kubický krystal, jakým je např. chlorid sodný. Když se krystal deformuje, změní se jeho objem nebo tvar. Tyto změny způsobí vzrůst potenciální energie krystalu. Chceme-li vypočítat energii deformace, musíme vědět, kam se který atom přemístil. Ve složitých krystalech se atomy uspořádají v mřížce velmi komplikovaným způsobem, aby celková energie byla co nejmenší. Důležitým je výpočet energie deformace velmi těžký. V případě jednoduchého kubického krystalu je však snadné usoudit, co se stane. Deformace uvnitř krystalu budou geometricky podobné deformacím na vnějších hranicích krystalu.

Konstanty pružnosti pro kubickou mřížku můžeme vypočítat následujícím způsobem. Nejdříve budeme předpokládat existenci nějakého zákona vzájemného působení mezi každým párem atomů v krystalu. Dále vypočítáme změnu vnitřní energie krystalu, když se odchýlí od rovnovážného tvaru. Tak získáme vztah mezi energií a deformací, který je kvadratický ve všech deformacích. Porovnáme-li takto získanou energii s výrazem (39.13), můžeme ztotožnit koeficienty u jednotlivých členů s konstantami pružnosti C_{ijkl} .

V našem příkladu budeme předpokládat, že zákon vzájemného působení je jednoduchý: že síla mezi sousedními atomy je *centrální*, tj. že působí ve směru spojnice atomů. Můžeme to udělat proto, že síly mezi ionty v krystalu jsou převážně coulombovské. (U kovalentní vazby jsou síly obvykle složitější, protože mohou vést i k bočnímu tlaku na sousední atom; tuto komplikaci zanedbáme.) Také zahrneme jen síly mezi každým z atomů a jeho *nejbližším a za ním následujícím blízkým* sousedem. Jinými slovy použijeme takové přiblížení, v němž všechny ostatní síly zanedbáme. Síly, které zahrnujeme, jsou pro rovinu xy znázorněny na obr. 39.10a. Je třeba také započítat odpovídající síly v rovinách yz a zx .

Jelikož nás zajímají pouze konstanty pružnosti v případě malých deformací, a potřebujeme tedy jen členy v energii, které se mění kvadraticky s deformacemi, představíme si, že síla mezi každým párem atomů se při posunutí mění lineárně. Pak si můžeme představit, že každý pár atomů je spojen lineární pružinou jako na *obr. 39.10b*. Všechny pružiny mezi atomem sodíku a atomem chloru by měly mít stejnou tuhost, řekněme k_1 . Pružiny mezi dvěma sodíky a mezi dvěma chloremy by mohly mít různé tuhosti, ale pro zjednodušení naší diskuse je budeme považovat za stejné a označíme je k_2 . (Mohli bychom se později vrátit a uvažovat různé tuhosti, nejdříve se však naučme, jak při výpočtu postupovat.)



Obr. 39.10 a) Meziatomové síly, které bereme v úvahu.
b) Model, v němž jsou atomy vzájemně spojeny pružinami.

Předpokládejme, že krystal je deformován pod vlivem homogenní deformace popsané tenzorem deformace e_{ij} . Obecně bude mít složky ve směrech x, y i z , pro tuto chvíli si však všimneme jen takové deformace, která má tři složky e_{xx}, e_{xy} a e_{yy} , abychom si mohli situaci snáze představit. Vybereme-li si jeden atom jako počátek, posunutí každého jiného atomu je dáno rovnicemi typu (39.9):

$$u_x = e_{xx}x + e_{xy}y \quad (39.42)$$

$$u_y = e_{xy}x + e_{yy}y.$$

Nazvěme atom se souřadnicemi $x = y = 0$ jako atom 1 a očísľujme jeho sousedy v rovině xy tak, jak je to znázorněno na *obr. 39.11*. Označíme-li mřížkovou konstantu a , najdeme posunutí u_x a u_y ve směru x a y , které jsou uvedeny v *tab. 39.1*.

Nyní můžeme vypočítat energii pružin, která je rovna $k/2$ krát druhá mocnina posunutí každé pružiny. Např. energie vodorovné pružiny mezi atomem 1 a atomem 2 je

$$\frac{k_1 (e_{xx} a)^2}{2}. \quad (39.43)$$

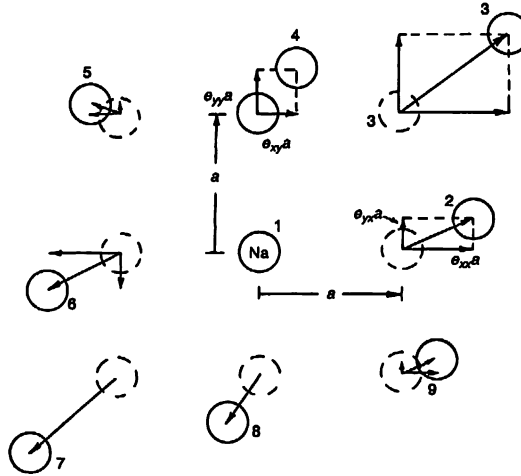
Všimněte si, že s přesností do prvního řádu nemění posun atomu 2 ve směru y délku pružiny mezi atomem 1 a atomem 2. Abychom však určili energii deformace diagonální pružiny, např. té, která je spojena s atomem 3, musíme vypočítat změnu délky v důsledku vodorovného i svislého

posunutí. Při malých posunutích z původní polohy můžeme změnu vzdálenosti atomu 3 od počátku zapsat jako součet složek u_x a u_y ve směru úhlopříčky, tj.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(u_x + u_y).$$

Použijeme-li hodnotu u_x a u_y z tabulky, dostaneme energii

$$\frac{k_2}{2} \left(\frac{u_x + u_y}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{k_2 a^2}{4} (e_{xx} + e_{yy} + e_{xy} + e_{yx})^2. \quad (39.44)$$



Obr. 39.11 Posunutí nejbližších a následujících sousedů atomu 1 (v přehnaném měřítku)

Tabulka 39.1

Atom	Poloha (x, y)	u_x	u_y	k
1	0, a	0	0	—
2	a, 0	$e_{xx} a$	$e_{yx} a$	k_1
3	a, a	$(e_{xx} + e_{xy}) a$	$(e_{yx} + e_{yy}) a$	k_2
4	0, a	$e_{xy} a$	$e_{yy} a$	k_1
5	-a, a	$(-e_{xx} + e_{xy}) a$	$(-e_{yx} + e_{yy}) a$	k_2
6	-a, 0	$-e_{xx} a$	$-e_{yx} a$	k_1
7	-a, -a	$(-e_{xx} + e_{xy}) a$	$(-e_{yx} + e_{yy}) a$	k_2
8	0, -a	$-e_{xy} a$	$-e_{yy} a$	k_1
9	a, -a	$(e_{xx} - e_{xy}) a$	$(e_{yx} - e_{yy}) a$	k_2

Pro výpočet celkové energie všech pružin v rovině xy musíme vypočítat součet osmi členů typu (39.43) a (39.44). Označíme-li tuto energii jako W_0 , platí

$$\begin{aligned}
 W_0 = & \frac{a^2}{2} \left\{ k_1 e_{xx}^2 + \frac{k_2}{2} (e_{xx} + e_{yx} + e_{xy} + e_{yy})^2 + \right. \\
 & + k_1 e_{yy}^2 + \frac{k_2}{2} (e_{xx} - e_{yx} - e_{xy} + e_{yy})^2 + \\
 & + k_1 e_{xx}^2 + \frac{k_2}{2} (e_{xx} + e_{yx} + e_{xy} + e_{yy})^2 + \\
 & \left. + k_1 e_{yy}^2 + \frac{k_2}{2} (e_{xx} - e_{yx} - e_{xy} + e_{yy})^2 \right\}. \quad (39.45)
 \end{aligned}$$

Abychom určili celkovou energii všech pružin spojených s atomem 1, musíme přidat k energii ve vztahu (39.45) ještě něco. Ačkoliv uvažujeme jen složku x a y deformace, existují energie, které souvisejí s nejbližšími sousedy mimo rovinu xy . Tato dodatečná energie je

$$k_2 (e_{xx}^2 a^2 + e_{yy}^2 a^2). \quad (39.46)$$

Konstanty pružnosti jsou ve vztahu k hustotě energie w podle rovnice (39.13). Energie, kterou jsme vypočítali, souvisí s jedním atomem; přesněji, je to *dvojnásobek* energie na jeden atom, neboť polovina každé pružiny se musí připisat každému ze dvou atomů, které spojuje. Jelikož v jednotce objemu se nachází $1/a^3$ atomů, w a W_0 souvisejí podle vztahu

$$w = \frac{W_0}{2a^3}.$$

Abychom určili konstanty pružnosti C_{ijkl} už potřebujeme jen rozvinout druhé mocniny ve vztahu (39.45), přidat členy v (39.46) a porovnat koeficienty u $e_{ij}^2 e_{kl}$ s odpovídajícími koeficienty v rovnici (39.13). Například vezmeme-li členy obsahující e_{xx} a e_{yy} , dostaneme koeficient

$$(k_1 + 2k_2) \cdot a^2$$

takže

$$C_{xxxx} = C_{yyyy} = \frac{k_1 + 2k_2}{a}.$$

U ostatních členů je situace o trochu složitější. Jelikož nemůžeme navzájem odlišit součiny typu $e_{xx}e_{yy}$ a $e_{yy}e_{xx}$, je koeficient u takovýchto členů v naší energii roven součtu dvou členů v rovnici (39.13). Koeficient u $e_{xx}e_{yy}$ ve vztahu (39.45) je $2k_2$, takže platí

$$C_{xxyy} = C_{yyxx} = \frac{2k_2}{a}.$$

Ale v důsledku symetrie našeho krystalu je $C_{xxyy} = C_{yyxx}$, takže máme

$$C_{xxyy} = C_{yyxx} = \frac{k_2}{a}.$$

Podobně určíme

$$C_{xyxy} = C_{yxyx} = \frac{k_2}{a}.$$

Nakonec si všimněte, že každý člen, který obsahuje x nebo y jen jednou, je nulový, jak jsme zjistili už dříve na základě úvah o symetrii krystalu. Shrňme naše výsledky:

$$\begin{aligned} C_{xxxx} = C_{yyyy} &= \frac{k_1 + 2k_2}{a} \\ C_{xyxy} = C_{yxyx} &= \frac{k_2}{a} \\ C_{xxyy} = C_{yyxx} = C_{xyyx} = C_{yxyx} &= \frac{k_2}{a} \\ C_{xxxy} = C_{xyyy} = \text{atd.} &= 0 \end{aligned} \tag{39.47}$$

Podařilo se nám tedy najít souvislost mezi makroskopickými konstantami pružnosti a atomovými vlastnostmi, které vystupují v podobě konstant k_1 a k_2 . V našem konkrétním případě $C_{xyxy} = C_{xxyy}$. Ukazuje se (což je vám už možná zřejmé na základě provedených výpočtů), že tyto členy jsou si v případě kubického krystalu *vždy* rovny, bez ohledu na to, kolik sil vezmeme v úvahu, *za předpokladu*, že síly působí jen podél spojnic mezi páry atomů, tj. pokud jsou síly mezi atomy podobné pružinám a nemají boční složky, jaké se objevují v případě pružné tyče (a jaké opravdu existují u kovalentních vazeb).

Tento závěr lze ověřit porovnáním s experimentálním měřením konstant pružnosti. V *tab. 39.2* uvádíme pozorované hodnoty třech konstant pružnosti pro různé kubické krystal⁵⁴. Všimněte si, že C_{xxyy} a C_{xyxy} obecně nejsou stejné. Důvod je ten, že např. v kovech sodíku nebo draslíku nepůsobí meziatomové síly podél spojnic atomů, jak jsme předpokládali v našem modelu. Podobně diamant nevyhovuje našemu zákonu, neboť síly v diamantu jsou kovalentní a mají jiné směrové vlastnosti – vazby svírají úhly jako ve čtyřstěnu. Iontové krystal⁵⁴ jako fluorid lithný nebo chlorid sodný apod. mají téměř všechny fyzikální vlastnosti, které jsme v našem modelu předpokládali, a tabulka dokazuje, že konstanty C_{xxyy} a C_{xyxy} jsou téměř stejné. Proč chlorid stříbrný podmínku $C_{xxyy} = C_{xyxy}$ nespĺňuje, není jasné.

54) V literatuře se často setkáváme s jiným označením. Například obvykle se zapisuje $C_{xxxx} = C_{11}$, $C_{xxyy} = C_{12}$ a $C_{xyxy} = C_{44}$.

Tabulka 39.2⁵⁵⁾ Konstanty pružnosti kubických krystalů v $10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$

	C_{xxxx}	C_{xyyy}	C_{xyxy}
Na	0,055	0,042	0,049
K	0,046	0,037	0,026
Fe	2,37	1,41	1,16
Diamant	10,76	1,25	5,76
Al	1,08	0,62	0,28
LiF	1,19	0,54	0,53
NaCl	0,486	0,127	0,128
KCl	0,40	0,062	0,062
NaBr	0,33	0,13	0,13
KI	0,27	0,043	0,042
AgCl	0,60	0,36	0,062

⁵⁵⁾ Ch. Kittel, viz záhlaví kapitoly 37.

Proudění

„suché vody“

40.1 HYDROSTATIKA

40.2 POHYBOVÉ ROVNICE

40.3 USTÁLENÉ PROUDĚNÍ – BERNOULLIOVA VĚTA

40.4 VÍŘIVÉ PROUDĚNÍ

40.5 VÍROVÉ ČÁRY

40.1 HYDROSTATIKA

Proudění tekutin a zvláště vody fascinuje každého člověka. Všichni si pamatujeme, jak jsme si v dětství hrávali s touto zvláštní látkou ve vaně nebo v blátivé kaluži. Jak stárneme, pozorujeme potoky, vodopády a víry a jsme okouzleni touto látkou, která v porovnání pevnými látkami vypadá jako živá. Chování tekutin je v mnoha směrech nečekané a zajímavé, a právě to bude tématem této a následující kapitoly. Úsilí dříve přehradit malý potůček na ulici a jeho překvapení nad tím, jak podivně si voda najde únikovou cestu, mají svou analogii v našich mnohaletých pokusech pochopit proudění kapalin. Snažili jsme se v naší teorii „přehradit vodu“ odvozením zákonů a rovnic, které popisují proudění. Popíšeme takové pokusy v této kapitole. V následující kapitole ukážeme originální způsob, jakým voda prolomila naši hráz a unikla pokusům vysvětlit její chování.

Předpokládáme, že základní vlastnosti vody vám jsou už známé. Hlavní vlastností, která odlišuje tekutinu od pevné látky, je to, že tekutina není schopná ani chvíli udržet smykové napětí. Působíme-li na ni smykovým napětím, dá se do pohybu. Hustější tekutiny, jako med, se pohybují obtížněji než např. vzduch nebo voda. Mírou toho, jak snadno se tekutina poddá napětí je její viskozita. V této kapitole si budeme všimnout jen těch situací, v nichž lze vliv viskozity zanedbat. Viskózními jevy se budeme zabývat v následující kapitole.

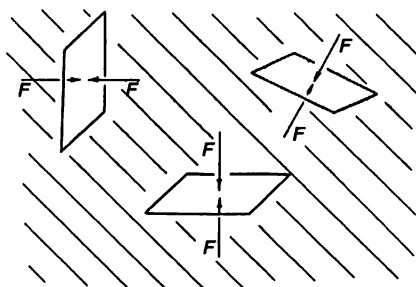
Nejdříve se budeme věnovat hydrostatice, teorii kapalin v klidu. Jsou-li kapaliny v klidu, neexistují v nich smykové síly (dokonce ani ve viskózních kapalinách). Základní zákon hydrostatiky tedy zní, že napětí jsou vždy kolmá na libovolnou plochu uvnitř kapaliny. Kolmá síla

na jednotku plochy se nazývá *tlak*. Ze skutečnosti, že v klasické kapalině smyky nejsou, vyplývá, že tlakové napětí je stejné ve všech směrech (obr. 40.1). Necháme vás, abyste se pobavili důkazem, že nedochází-li na žádné ploše v kapalině ke smyku, musí být tlak stejný v každém směru.

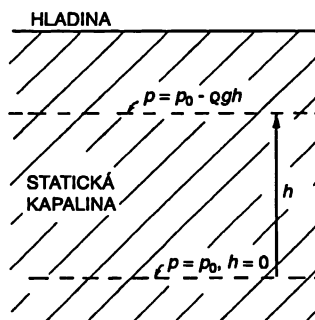
Tlak v kapalině se může od místa k místu měnit. Například ve statické kapalině na zemském povrchu se tlak mění s výškou, protože působí tíha kapaliny. Považujeme-li hustotu kapaliny ρ za konstantní a tlak na nějaké (libovolně zvolené) úrovni je p_0 (obr. 40.2) je tlak ve výšce h nad touto úrovní $p = p_0 - \rho gh$, přičemž g je tíhová síla, která působí na jednotkovou hmotnost. Součet

$$p + \rho gh$$

je proto u statické kapaliny konstantní. Tento vztah je vám znám, ale nyní odvodíme obecnější výsledek, jehož je poslední vztah jen speciálním případem.



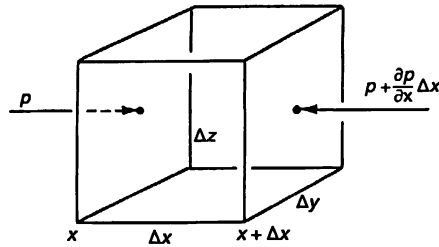
Obr. 40.1 Ve statické kapalině je síla působící na jednotku určité plochy kolmá na tuto plochu a má stejnou velikost při libovolné orientaci plochy.



Obr. 40.2 Tlak ve statické kapalině

Představme si malou vodní krychli. Jakou výslednou silou na ni působí tlak? Jelikož je tlak na každém místě stejný ve všech směrech, může být síla na jednotku objemu nenulová pouze v důsledku toho, že se tlak bod od bodu mění. Předpokládejme, že se tlak mění ve směru osy x , a souřadnicové osy zvolme rovnoběžně s hranami krychle. Tlak na stěnu při souřadnici x způsobuje sílu $p\Delta y\Delta z$ (obr. 40.3) a tlak na stěnu při $x + \Delta x$ sílu $-[p + (\partial p / \partial x)\Delta x]\Delta y\Delta z$, takže výsledná síla je $-(\partial p / \partial x)\Delta x\Delta y\Delta z$. Vezmeme-li v úvahu i zbývající stěny krychle, snadno zjistíme,

že tlaková síla na jednotku objemu je $-\nabla p$. Působí-li i další síly (např. gravitace), musí je tlaková síla v rovnováze vyrovnávat.



Obr. 40.3 Výsledná hustota tlakové síly na krychli je $-\nabla p$

Vezměme si případ, kdy takovou dodatečnou sílu lze popsat pomocí potenciální energie, jako je to v případě gravitace; φ bude označovat potenciální energii na jednotku hmotnosti. (V případě gravitace je např. φ právě gz .) Síla na jednotku hmotnosti se pomocí potenciálu vyjadřuje jako $-\nabla\varphi$ a je-li ρ hustota kapaliny, bude síla na jednotku objemu $-\rho\nabla\varphi$. V rovnováze musí být součet této hustoty síly a hustoty tlakové síly nulový:

$$-\nabla p - \rho\nabla\varphi = 0. \quad (40.1)$$

Rovnice (40.1) je rovnicí hydrostatiky. *Obecně nemá řešení.* Pokud se hustota v prostoru mění libovolným způsobem, síly se nijak nemohou vyrovnat a kapalina se nemůže nacházet ve stabilní rovnováze. Začnou téci konvekční proudy. Můžeme to vidět přímo z rovnice, neboť tlakový člen je úplným gradientem, zatímco druhý člen ne, neboť obsahuje i proměnnou hustotu ρ . Pouze je-li ρ konstantní, je i potenciální člen úplným gradientem. Pak je řešením rovnice

$$p + \rho\varphi = \text{konst.}$$

Jiná možnost vzniku hydrostatické rovnováhy je případ, kdy ρ je jen funkcí p . Opustíme však hydrostatiku, neboť není ani zdaleka tak zajímavá jako situace, kdy jsou kapaliny v pohybu.

40.2 POHYBOVÉ ROVNICE

Nejdříve prodiskutujeme pohyb tekutin z čistě abstraktního, teoretického hlediska a pak si všimneme několika speciálních případů. Abychom popsali pohyb kapaliny, musíme zadat její vlastnosti v každém bodě. Například v různých místech se voda (nazýváme naši kapalinu vodou) pohybuje různými rychlostmi. Abychom specifikovali charakter proudění, musíme v každém bodě a v každém čase zadat tři složky rychlosti. Dokážeme-li zformulovat rovnice, které určují rychlost, budeme vědět, jak se kapalina v každém okamžiku pohybuje. Rychlost však není jedinou vlastností kapaliny, která se mění od místa k místu. Právě před chvílí jsme hovořili o změnách tlaku. A existují i další proměnné veličiny. Od bodu k bodu se může měnit i hustota. Navíc kapalina může být i vodičem a vést elektrický proud, jehož hustota j mění od bodu k bodu svou velikost i směr. Měnit se může i teplota, magnetické pole atd. Počet polí, které potřebujeme k popisu úplné situace, závisí na tom, jak komplikovaný je studovaný problém. Dochází

k zajímavým jevům, kdy dominantní úlohu při určování chování kapaliny hrají proudy a magnetizmus; to je tématem *magnetohydrodynamiky*, jíž se v současnosti věnuje velká pozornost. Takových složitějších situací si však nebudeme všimnout, neboť už na nižší úrovni existuje řada zajímavých jevů a i tato elementární úroveň bude dost komplikovaná.

Zvažme situaci, v níž nevystupuje magnetické pole ani vodivost, a nebudeme se starat ani o teplotu, neboť budeme předpokládat, že teplota v libovolném bodě je jednoznačně určena hustotou a tlakem. Dokonce si práci zjednodušíme předpokladem, že hustota je konstantní – budeme si představovat, že kapalina je v podstatě nestlačitelná. Jinými slovy, předpokládáme, že změny tlaku jsou tak malé, že jimi způsobené změny jsou zanedbatelné. Kdyby to tak nebylo, museli bychom vzít v úvahu další jevy, např. šíření zvuku nebo rázových vln. Šíření zvuku a rázových vln jsme už do jisté míry probrali, proto nyní náš rozbor hydrodynamiky od těchto jevů izolujeme a budeme předpokládat, že hustota ρ je konstantní. Je snadné určit, kdy je přiblížení konstantního ρ dobré. Můžeme říci, že pokud jsou rychlosti proudění mnohem menší než rychlost zvukové vlny v kapalině, nemusíme se o změny hustoty zajímat. To, jak voda uniká našim pokusům pochopit její chování, nesouvisí s přiblížením konstantní hustoty. Komplikace, které její únik umožňují, probereme v následující kapitole.

Obecnou teorii tekutin musíme začít od *stavové rovnice*, která udává souvislost tlaku a hustoty. V našem přiblížení je tato stavová rovnice jednoduchá:

$$\rho = \text{konst.}$$

To je první vztah pro naše proměnné. Další vztah vyjadřuje zachování látky: Odtéká-li látka z nějakého místa, musí se množství látky, které v daném místě zůstává zmenšit. S podobným vztahem jsme se setkali u elektřiny. Odtud také víme, že divergence takové veličiny udává rychlost poklesu hustoty za jednotku času. Podobně rovnice

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (40.2)$$

vyjadřuje zachování hmotnosti tekutiny; je to hydrodynamická *rovnice kontinuity*. V našem přiblížení nestlačitelné tekutiny je ρ konstantní a rovnice kontinuity má jednoduchý tvar

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (40.3)$$

Rychlost tekutiny \mathbf{v} (podobně jako magnetická indukce \mathbf{B}) má nulovou divergenci. (Rovnice hydrodynamiky jsou často analogické s rovnicemi elektrodynamiky; proto jsme studovali nejdříve elektrodynamiku. Někteří lidé mají jiný názor; myslí si, že je nutné nejdříve studovat hydrodynamiku, takže je pak snazší porozumět elektrodynamice. Elektrodynamika je ale ve skutečnosti mnohem snazší než hydrodynamika.)

Další rovnici získáme z Newtonova zákona, který nám říká, jak se rychlost mění v důsledku působících sil. Hmotnost objemového elementu kapaliny krát jeho zrychlení musí být rovno síle, která na element působí. Vybereme-li element s jednotkovým objemem a označíme-li sílu na jednotku objemu jako \mathbf{f} , platí

$$\rho \times (\text{zrychlení}) = \mathbf{f}.$$

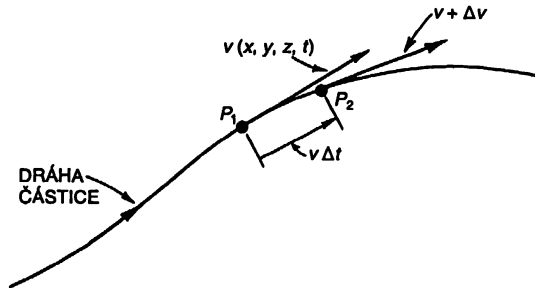
Hustotu síly zapíšeme jako součet tří členů. Už jsme zmínili tlakovou sílu na jednotku objemu, $-\nabla p$. Dále existují vnější síly, které působí na dálku, např. gravitace nebo elektřina. Jsou-li to konzervativní síly, jejichž potenciál na jednotku hmotnosti je φ , odpovídá jim hustota síly $\rho \nabla \varphi$. (Kdyby vnější síly nebyly konzervativní, museli bychom za hustotu vnější síly psát $f_{\text{vněj.}}$.) Existuje ještě jiná, vnitřní síla na jednotku objemu, která souvisí se skutečností, že v *proudící* tekutině mohou existovat smyková napětí. Nazývá se viskózní síla; označíme ji f_{visk} . Naše pohybová rovnice je

$$\rho \times (\text{zrychlení}) = -\nabla p - \rho \nabla \varphi + f_{\text{visk}}. \quad (40.4)$$

V této kapitole budeme předpokládat, že tekutina je řídká v tom smyslu, že viskozita není důležitá, a vynecháme f_{visk} . Vynecháme-li viskozitu, provádíme přiblížení, které popisuje nějakou ideální látku, a ne skutečnou vodu. John von Neumann si svého času byl dobře vědom obrovského rozdílu mezi chováním tekutiny, vynecháte-li resp. zahrnete-li viskózní členy, a byl si také vědom skutečnosti, že po dobu téměř celého vývoje hydrodynamiky přibližně do roku 1900 se většina zájmu koncentrovala na řešení krásných *matematických* problémů, které neměly téměř nic společného se skutečnými tekutinami. Proto teoretiky, kteří se zabývali takovými analýzami, nazval lidmi, kteří studují „suchou vodu“. Takové analýzy vynechávají *podstatnou* vlastnost tekutin. Jelikož i my v této kapitole v našich výpočtech tuto vlastnost zanedbáváme, nazvali jsme ji „Proudění suché vody“. Diskuzi *skutečné* vody odložíme do následující kapitoly.

Vynecháme-li f_{visk} , máme v rovnici (40.4) vše potřebné kromě výrazu pro zrychlení. Mohli byste si myslet, že vzorec pro zrychlení částice kapaliny bude velmi jednoduchý, neboť se zdá zřejmé, že je-li v rychlost částice v některém místě tekutiny, je zrychlení pouze $\partial v / \partial t$. *Není*, a důvod pro to je dost rafinovaný. Derivace $\partial v / \partial t$ je rychlost, jíž se rychlost $v(x, y, z, t)$ mění v *pevném bodě* prostoru. My však potřebujeme vědět, jak rychle se mění rychlost *určité části* tekutiny. Představte si, že obarvíme kapku vody, abychom ji mohli pozorovat. Za malý čas Δt se tato kapka přesune na jiné místo. Pohybuje-li se kapka podél nějaké trajektorie jako na *obr. 40.4*, za čas Δt se například přesune z bodu P_1 do P_2 . Ve směru osy x se posune o $v_x \Delta t$, ve směru osy y o $v_y \Delta t$ a ve směru osy z o $v_z \Delta t$. Vidíme, že je-li $v(x, y, z, t)$ rychlost částice v tekutině v bodě (x, y, z) v čase t , má *tatáž* částice v čase $t + \Delta t$ rychlost $v(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, t + \Delta t)$, přičemž

$$\Delta x = v_x \Delta t, \quad \Delta y = v_y \Delta t \quad \text{a} \quad \Delta z = v_z \Delta t.$$



Obr. 40.4 Zrychlení částice kapaliny

Podle definice parciálních derivací (vzpomeňte si na rovnici (2.7)) s přesností prvního řádu platí

$$v(x + v_x \Delta t, y + v_y \Delta t, z + v_z \Delta t, t + \Delta t) = v(x, y, z, t) + \frac{\partial v}{\partial x} v_x \Delta t + \frac{\partial v}{\partial y} v_y \Delta t + \frac{\partial v}{\partial z} v_z \Delta t + \frac{\partial v}{\partial t} \Delta t.$$

Zrychlení $\Delta v / \Delta t$ je pak rovno

$$v_x \frac{\partial v}{\partial x} + v_y \frac{\partial v}{\partial y} + v_z \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Zacházíme-li s ∇ jako s vektorem, můžeme poslední vztah zapsat symbolicky

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}. \quad (40.5)$$

Všimněte si, že zrychlení může být nenulové i tehdy, když $\partial v / \partial t = 0$, tj. když se rychlost v daném bodě nemění. Uvedme příklad: Voda, která teče po kružnici konstantní rychlostí, se zrychluje, ačkoliv se rychlost v daném bodě nemění. Důvodem samozřejmě je, že rychlost vybraného množství vody, které se původně nacházelo v jednom bodě na kružnici, má za okamžik jiný směr; působí na ni dostředivé zrychlení.

Zbytek naší teorie je čistá matematika – je nutné najít řešení pohybových rovnic, které dostaneme, dosadíme-li zrychlení (40.5) do rovnice (40.4). Platí

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \varphi, \quad (40.6)$$

přičemž jsme viskozitu vynechali. Tuto rovnici můžeme přepsat na jiný tvar, využijeme-li následující identity z vektorové analýzy:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}).$$

Definujeme-li nyní rotaci \mathbf{v} jako nové vektorové pole $\boldsymbol{\Omega}$

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v}, \quad (40.7)$$

lze vektorovou identitu přepsat na

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2$$

a naše pohybová rovnice (40.6) se změní na

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \varphi. \quad (40.8)$$

Ekvivalence rovnic (40.6) a (40.8) si můžete ověřit tak, že je přepíšete do složek a porovnáte, přičemž využijete vztah (40.7).

Vektorové pole Ω se nazývá *vířmatost*. Je-li Ω všude rovno nule, proudění nazýváme *nevířivým*. V článku 3.5 jsme zavedli *cirkulaci* vektorového pole. Cirkulace podél uzavřené smyčky v kapalině je křivkový integrál rychlosti kapaliny (v daném časovém okamžiku) podél smyčky:

$$(\text{cirkulace}) = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$$

Cirkulace *na jednotku plochy* infinitezimální smyčky je pak podle Stokesovy věty rovna $\nabla \times \mathbf{v}$. Vektor Ω tedy udává cirkulaci kolem jednotkové plochy (kolmé na směr Ω). Kromě toho je zřejmé, že vložíte-li na libovolné místo v kapalině kousek nečistoty (*ne* infinitezimálně malý), bude se otáčet úhlovou rychlostí $\Omega/2$. Pokuste se to dokázat. Také můžete zkusit dokázat, že v případě vědra s vodou na otočném stolku je Ω rovno dvojnásobku lokální úhlové rychlosti vody.

Zajímáme-li se jen o pole rychlostí, můžeme z našich rovnic vyloučit tlak. Vypočítáme-li rotaci obou stran rovnice (40.8), vzpomeneme si, že ρ je konstantní a rotace libovolného gradientu je nulová, a použijeme vztah (40.3), dostaneme

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \nabla \times (\Omega \times \mathbf{v}) = 0. \quad (40.9)$$

Tato rovnice spolu s rovnicemi

$$\Omega = \nabla \times \mathbf{v} \quad (40.10)$$

a

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (40.11)$$

úplně popisuje pole rychlostí \mathbf{v} . Matematicky řečeno, známe-li v nějakém čase Ω , známe i rotaci vektoru rychlosti. Dále víme, že jeho divergence je nulová, takže v dané fyzikální situaci máme vše potřebné k určení \mathbf{v} v celém prostoru. (Se stejnou situací jsme se setkali v magnetizmu, kde $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ a $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} / \epsilon_0 c^2$.) Zadání Ω určuje \mathbf{v} podobně jako zadání \mathbf{j} určuje \mathbf{B} . Známe-li \mathbf{v} , rovnice (40.9) nám poví, jaká je rychlost změny Ω , a z ní opět najdeme nové \mathbf{v} atd. Vidíte, že tyto rovnice obsahují vše potřebné pro výpočet rychlosti proudění. Uvědomte si však, že tato procedura poskytuje jen pole rychlostí; celou informaci o tlaku jsme ztratili.

Uvedme jeden speciální důsledek našich rovnic. Je-li $\Omega = 0$ všude v nějakém čase t , je $\partial \Omega / \partial t$ také nulové, takže Ω je nulové i v čase $t + \Delta t$. Řešením naší rovnice je tedy proudění, které je neustále, v každém čase, *nevířivé*. Začalo-li pole s nulovou rotací, bude mít nulovou rotaci vždy. Pak je třeba vyřešit rovnice

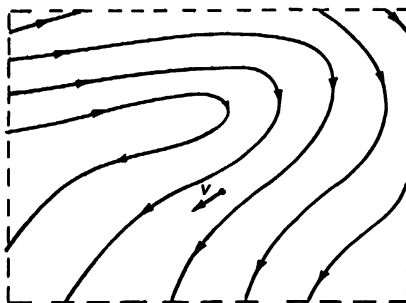
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{v} = 0.$$

Připomínají rovnice pro elektrostatické a magnetické pole v prázdném prostoru. Později se k nim vrátíme a podíváme se na několik konkrétních příkladů.

40.3 USTÁLENÉ PROUDĚNÍ – BERNOULLIOVA VĚTA

Nyní se vrátíme k pohybovým rovnicím (40.8), ale omezíme se na případy ustáleného proudění. Ustáleným prouděním rozumíme to, že se na žádném místě tekutiny rychlost nikdy

nemění. Tekutina v libovolném bodě je vždy nahrazena novou tekutinou, která proudí přesně stejným způsobem. Rychlosti vypadají stále stejně, v je statické vektorové pole. Podobně jako jsme kreslili siločáry v magnetostatice, můžeme nyní kreslit čáry, k nimž je rychlost neustále tečnou, jak to znázorňuje obr. 40.5. Tyto čáry se nazývají *proudnic*. V případě ustáleného proudění jsou to skutečné trajektorie částic tekutiny. (Při neustáleném proudění se proudnicový obraz mění v čase a proudnice v žádném okamžiku nepředstavují trajektorii částice tekutiny.)



Obr. 40.5 Proudnic při ustáleném proudění kapaliny

Ustálené proudění neznamená, že se neděje vůbec nic: atomy v tekutině se pohybují a mění své rychlosti. Platí jen $\partial v / \partial t = 0$. Vypočítáme-li pak skalární součin v v rovnici pohybu, člen $v \cdot (\Omega \times v)$ vypadne a zůstane nám

$$v \cdot \nabla \left\{ \frac{p}{\rho} + \varphi + \frac{1}{2} v^2 \right\} = 0. \quad (40.12)$$

Tato rovnice nám říká, že při malých posunutích ve směru rychlosti tekutiny se veličina ve složené závorce nemění. V případě ustáleného proudění se všechna posunutí dějí podél proudnic, takže rovnice (40.12) zároveň říká, že *pro všechny body podél proudnice platí*

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi = \text{konst} \quad (\text{na proudnici}). \quad (40.13)$$

Je to takzvaná *Bernoulliho věta*. Konstanta na pravé straně může být obecně pro různé proudnice různá; víme jen, že levá strana rovnice (40.13) je podél *dané proudnice* konstantní. Můžeme si však všimnout, že v případě ustáleného *nevířivého* proudění, při němž $\Omega = 0$, nám pohybová rovnice (40.8) poskytuje vztah

$$\nabla \left\{ \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi \right\} = 0,$$

takže

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + \varphi = \text{konst} \quad (\text{všude}). \quad (40.14)$$

Vztah je stejný jako (40.13) *ale nyní* musí mít konstanta *stejnou hodnotu v celé tekutině*.

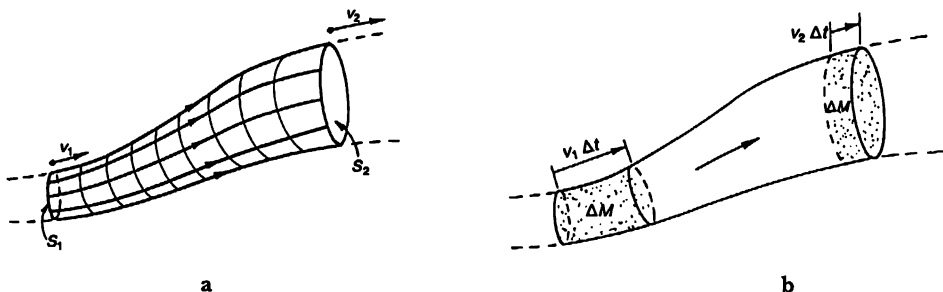
Bernoulliho věta není ve skutečnosti nic jiného než tvrzení o zachování energie. Taková věta o zachování energie nám poskytuje mnoho informací o proudění, aniž bychom skutečně našli detailní řešení rovnic. Bernoulliho věta je natolik důležitá a natolik jednoduchá, že vám ukážeme ještě jeden způsob jejího odvození, který se liší od formálních výpočtů, jaké jsme provedli dosud. Představte si svazek blízkých proudnic, které vytvářejí proudovou trubici jako na obr. 40.6. Jelikož jsou stěny trubice vytvořeny z proudnic, nevytéká jimi žádná tekutina. Nazvěme průřez na jednom konci proudové trubice S_1 , rychlost tekutiny v tomto průřezu v_1 , hustotu tekutiny ρ_1 a potenciální energii φ_1 . Odpovídající veličiny na druhém konci trubice jsou S_2 , v_2 , ρ_2 , a φ_2 . Za krátký časový úsek Δt se kapalina v S_1 posunula o vzdálenost $v_1 \Delta t$ a tekutina v S_2 o vzdálenost $v_2 \Delta t$ (obr. 40.6b). Zachování hmotnosti vyžaduje, aby hmotnost, která vejde do trubice koncem S_1 , byla rovna hmotnosti, která z ní vyjde koncem S_2 . Tyto hmotnosti musí být na obou koncích stejné:

$$\Delta M = \rho_1 S_1 v_1 \Delta t = \rho_2 S_2 v_2 \Delta t.$$

Máme tedy rovnost

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2. \quad (40.15)$$

Tato rovnice nám říká, že při konstantní hustotě se rychlost mění nepřímo úměrně průřezu proudové trubice.



Obr. 40.6 Pohyb tekutiny v proudové trubici

Nyní vypočítáme práci, kterou vykonal tlak v tekutině. Práce vykonaná na tekutině, která vtéká do S_1 , je $p_1 S_1 v_1 \Delta t$, zatímco práce odevzdaná v S_2 je $p_2 S_2 v_2 \Delta t$. Výsledná práce vykonaná na tekutině mezi S_1 a S_2 je proto

$$p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t$$

a musí být rovna zvýšení energie hmotnosti ΔM tekutiny při přechodu z S_1 do S_2 . Jinými slovy:

$$p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t = \Delta M(E_2 - E_1), \quad (40.16)$$

přičemž E_1 je energie na jednotku hmotnosti tekutiny v S_1 a E_2 energie na jednotku hmotnosti na S_2 . Energii na jednotku hmotnosti tekutiny můžeme zapsat jako

$$E = \frac{1}{2} v^2 + \varphi + W,$$

kde $v^2/2$ je kinetická energie na jednotku hmotnosti, φ je potenciální energie na jednotku hmotnosti a W je dodatečný člen, který reprezentuje vnitřní energii jednotky hmotnosti tekutiny. Vnitřní energie může odpovídat například tepelné energii stlačitelné tekutiny nebo chemické energii. Všechny tyto veličiny se od místa k místu mění. Využijeme-li vztah pro energii v (40.16), vyjde

$$\frac{p_1 S_1 v_1 \Delta t}{\Delta M} - \frac{p_2 S_2 v_2 \Delta t}{\Delta M} = \frac{1}{2} v_2^2 + \varphi_2 + W_2 - \frac{1}{2} v_1^2 - \varphi_1 - W_1.$$

Už jsme však viděli, že $\Delta M = \rho S v \Delta t$, takže dostaneme

$$\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} v_1^2 + \varphi_1 + W_1 = \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} v_2^2 + \varphi_2 + W_2, \quad (40.17)$$

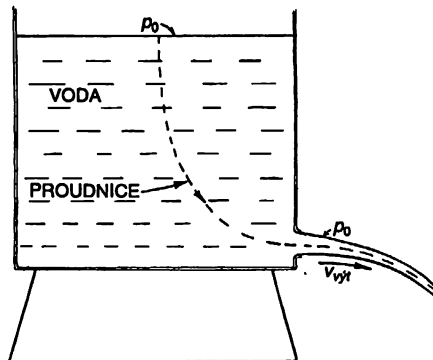
což je Bernoulliův výsledek s dodatečným členem za vnitřní energii. Je-li tekutina nestlačitelná, vnitřní energie je na obou stranách rovnice stejná a opět vychází, že podél každé proudnice platí vztah (40.14).

Nyní si všimneme několika jednoduchých příkladů, v nichž nám Bernoulliovo řešení umožňuje najít proudění. Necht' voda vytéká z otvoru u dna nádrže, jak je nakresleno na obr. 40.7. Uvažme situaci, v níž je rychlost proudění $v_{\text{výt}}$ u otvoru mnohem větší než rychlost proudění u hladiny nádrže; jinými slovy předpokládáme, že průměr nádrže je tak velký, že můžeme zanedbat pokles hladiny tekutiny. (Kdybychom chtěli, mohli bychom uskutečnit i přesnější výpočet.) U hladiny je tlak p_0 , tj. atmosférický tlak; stejný je i tlak, který působí na vytékající proud tekutiny. Napíšeme Bernoulliovu rovnici pro některou z proudnic, např. takovou jaká je zobrazena na obrázku. U hladiny nádrže vezmeme $v = 0$ a také gravitační potenciál $\varphi = 0$. U otvoru je rychlost $v_{\text{výt}}$ a $\varphi = -gh$, a tedy

$$p_0 = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_{\text{výt}}^2 - \rho gh$$

resp.

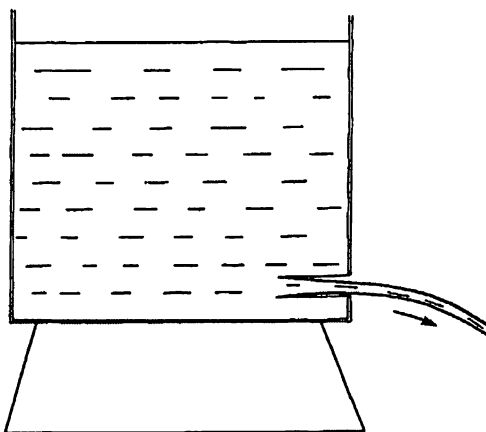
$$v_{\text{výt}} = \sqrt{2gh}. \quad (40.18)$$



Obr. 40.7 Proudění z nádrže

To je stejná rychlost jako rychlost tělesa padajícího z výšky h . Příliš nás to nepřekvapuje, neboť voda u otvoru získala kinetickou energii na úkor potenciální energie vody u hladiny. Nemyslete si však, že rychlost ubývá tekutiny v nádrži vypočítáte tak, že tuto rychlost vynásobíte velikostí plochy otvoru. V místě, kde proud tekutiny opouští otvor, nejsou rychlosti rovnoběžné, ale mají složky, které směřují dovnitř proudu – proud je sbíhavý. Když proud trochu postoupí, zužování se zastaví a rychlosti jsou opět rovnoběžné. Celkový výtok je tedy roven rychlost krát průřez *v tomto místě*. Opravdu, má-li výtokový otvor tvar kruhu s ostrým okrajem, zužuje se proud na 62 procent plochy průřezu otvoru. Redukovaná efektivní plocha výtoků se mění pro různé tvary výtokových trubíc a její experimentální hodnotu lze najít v tabulkách *výtokových koeficientů*.

Je-li výtoková trubice vsunuta dovnitř tekutiny jako na *obr. 40.8*, lze velmi krásně dokázat, že výtokový koeficient je přesně 50 %. Zde jen naznačíme, jak důkaz probíhá. Pro určení rychlosti (viz vztah (40.18)) jsme využili zachování energie, je však ještě nutné zvážit i zachování hybnosti.

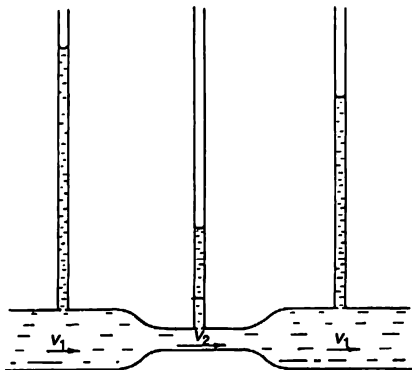


Obr. 40.8 Je-li výtoková trubice vsunuta dovnitř nádoby, je proud zužen na polovinu plochy průřezu

Jelikož s vytékajícím proudem odtéká i hybnost, na průřezu výtokové trubice musí působit nějaká síla. Odkud se tato síla bere? Síla musí pocházet z tlaku na stěny. Pokud je výtokový otvor malý a daleko od stěn, bude rychlost kapaliny blízko stěn nádrže velmi malá. Tlak na každou stěnu je proto stejný jako statický tlak v nehybné tekutině, viz vztah (30.14). Pak musí být statický tlak v libovolném bodě na jedné straně nádrže kompenzován stejným tlakem v bodě na protilehlé straně s *výjimkou* bodů na stěně, které leží proti výtokové trubici. Vypočítáme-li hybnost, která je „vypuzena“ tímto tlakem spolu s proudem tekutiny, zjistíme, že výtokový koeficient je $1/2$. Tento způsob výpočtu nemůžeme použít v případě výtokového otvoru na *obr. 40.7*, neboť zvýšení rychlosti u stěny v blízkosti výtokového otvoru způsobuje pokles tlaku, který neumíme vypočítat.

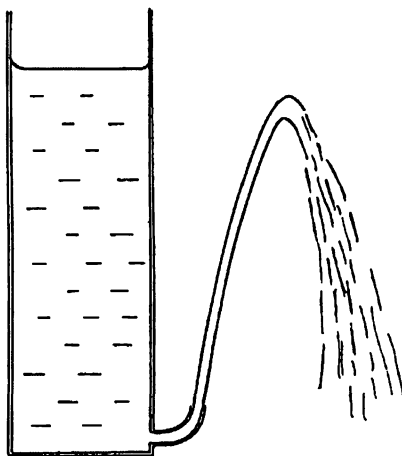
Nyní se podívejme na jiný příklad, na vodovodní trubku s proměnným průřezem jako na *obr. 40.9*, do níž vtéká voda jedním koncem a druhým vytéká. Zachování energie, tj. Bernoulliova rovnice, nám říká, že tlak je nižší ve zužené oblasti, kde je větší rychlost. Tento efekt můžeme snadno demonstrovat, změříme-li tlaky v různých průřezech pomocí malých svislých sloupců vody, které jsou k proudové trubici připojeny tak malými otvory, že nenarušují charakter proudění. V takovém případě je tlak úměrný výšce vody v těchto svislých sloupcích. Zjistíme, že tlak v místě zužení je nižší než na obou rozšířených stranách. Vráť-li se velikost průřezu za místem zužení na původní hodnotu před zužením, tlak opět vzroste. Bernoulliov vztah

předpovídá, že tlak za zúženým místem bude stejný jako předtím, ve skutečnosti je však viditelně menší. Důvod nesprávnosti naší předpovědi je ten, že jsme zanedbali třecí, viskózní síly, které způsobují pokles tlaku podél trubky. Přes tento pokles tlaku je tlak ve zúženém místě zaručeně nižší (vzhledem k větší rychlosti) než v obou širších místech souhlasně s Bernoulliovou předpovědí. Rychlost v_2 zaručeně musí převýšit v_1 , protéklo-li stejné množství zúženým místem. Voda je tedy při průchodu ze širšího místa do užšího zrychlována. Síla, která toto zrychlení způsobuje, pochází z poklesu tlaku.



Obr. 40.9 Tlak je nejnižší, když je rychlost nejvyšší

Naše výsledky můžeme ověřit ještě v jednom jednoduchém pokusu. Představte si, že máme nádrž s výtokovou trubicí, která vrhá proud vody směrem nahoru, jak je ukázáno na obr. 40.10. Kdyby byla výtoková rychlost přesně $\sqrt{2gh}$, musela by vytékající vody vystoupit do stejné výšky, v jaké se nachází hladina vody v nádrži. V experimentu až tam nevystoupí. Naše předpověď je přibližně správná, ale opět viskózní tření, které jsme nezahrnuli do našeho vzorce pro zachování energie, způsobilo energetické ztráty.



Obr. 40.10 Důkaz, že v není rovno $\sqrt{2gh}$

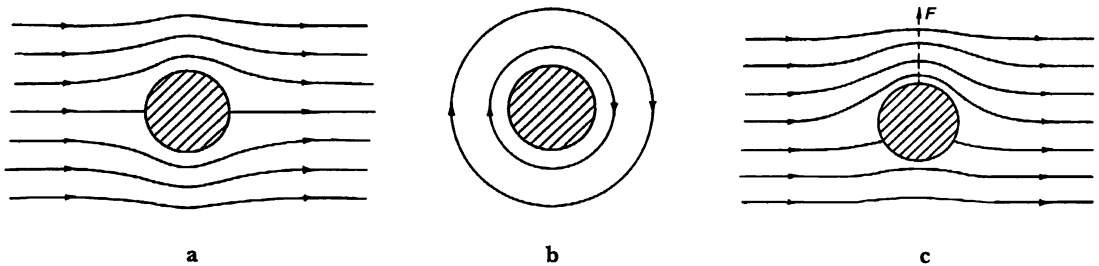
Drželi jste někdy u sebe dva listy papíru a zkusili jste je oddělit fouknutím? Zkuste to! Vrať se *k sobě*. Důvodem je, samozřejmě, že vzduch má vyšší rychlost, když prochází zúženým prostorem mezi listy, než když je mimo. Tlak mezi listy je *nížší* než atmosférický tlak, a tak k sobě listy přilnou, místo aby se vzdálili.

40.4 VÍŘIVÉ PROUDĚNÍ

Na začátku předcházejícího článku jsme zjistili, že v případě nestlačitelné tekutiny splňuje nevířivé proudění dvě rovnice:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{v} = 0. \quad (40.19)$$

Jsou to stejné rovnice jako v případě elektrostatiky a magnetostatiky v prázdném prostoru. Nejsou-li náboje, je divergence elektrického pole nulová a jeho rotace je nulová vždy. Nejsou-li proudy, je rotace magnetického pole nulová, zatímco divergence je nulová vždy. Rovnice (40.19) mají tedy stejné řešení jako rovnice pro E v elektrostatice a pro B v magnetostatice. V článku 12.5 jsme už vyřešili problém proudění tekutiny kolem koule jako příklad elektrostatické analogie. Elektrostatickým analogem je tu homogenní elektrické pole plus dipólu, které je vybráno tak, aby rychlost proudění, která je kolmá na povrch koule, byla nulová. Problém obtékání válce lze vyřešit podobně, použijeme-li vhodný lineární dipól spolu s homogenním proudovým polem. Toto řešení je vhodné pro situaci, kdy je rychlost proudění tekutiny ve velké vzdálenosti konstantní co do velikosti tak co do směru. Řešení je znázorněno na *obr. 0.11a*.



Obr. 40.11 a) Ideální obtékání válce b) Vířivé proudění kolem válce c) Superpozice a a b

V případě obtékání válce existuje i jiné řešení odpovídající podmínce, že tekutina se ve velké vzdálenosti pohybuje kolem válce po kružnicích. Proudění je pak nové všude jako na *obr. 40.11b*. Takovéto proudění má nenulovou cirkulaci kolem válce, ačkoliv \mathbf{v} *tekutině* je $\nabla \times \mathbf{v}$ nadále nulové. Jak může existovat cirkulace bez rotace? Cirkulace kolem válce existuje proto, že křivkový integrál \mathbf{v} podél libovolné smyčky, která *obejde* válec, není nulový. Současně křivkový integrál \mathbf{v} podél uzavřené dráhy, která válec *nezahrnuje*, je nulový. S podobným případem jsme se setkali při výpočtu magnetického pole v okolí vodiče. Rotace B byla mimo vodič nulová, ačkoliv křivkový integrál B podél dráhy, která vodič oklopovala, nulový nebyl. Pole rychlostí při nevířivém proudění kolem válce je přesně totéž jako magnetické pole v okolí vodiče. Pro kruhovou dráhu se středem ve středu válce je křivkový integrál rychlosti

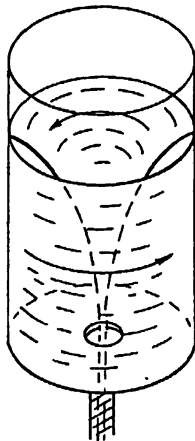
$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r v.$$

V případě nevířivého proudění nesmí integrál záviset na r . Nazvěme jeho konstantní hodnotu C ; pak platí

$$v = \frac{C}{2\pi r}, \quad (40.20)$$

kde v je tangenciální složka rychlosti a r je vzdálenost od osy válce.

Existuje pěkný způsob demonstrace, jak tekutina cirkuluje kolem otvoru. Vezměte si průhlednou válcovou nádrž s vypouštěcím otvorem uprostřed jejího dna. Naplníte ji vodou, trochu ji roztočíte a vytáhnete zátku z trubice. Uvidíte pěkný jev, znázorněný na obr. 40.12. Podobnou věc jste mnohokrát viděli ve vaně!



Obr. 40.12 Voda s cirkulací vytéká z nádrže

Ačkoliv jste na začátku dodali vodě určitou úhlovou rychlost ω , za chvíli v důsledku viskozity zmizí a proudění se stane nevířivým, ačkoliv kolem otvoru stále existuje určitá cirkulace.

Z teorie umíme vypočítat tvar vnitřní hladiny vody. Jak se částice blíží ke středu, nabývá rychlost. Podle rovnice (40.20) se tangenciální rychlost chová jako $1/r$. Je to důsledek zachování momentu hybnosti jako v případě krasobruslařky, která přitáhne ruce k tělu. I radiální rychlost se chová jako $1/r$. Zanedbáme-li tangenciální pohyb, zjistíme, že voda proudí do otvoru radiálním směrem a z rovnice $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ vyplývá, že radiální rychlost je úměrná $1/r$. Celková rychlost tedy také roste jako $1/r$ a voda teče podél tzv. Archimédových spirál. Hladina mezi vzduchem a vodou je celá pod atmosférickým tlakem a musí tedy mít (na základě rovnice (40.14)) následující vlastnost:

$$gz + \frac{1}{2} m v^2 = \text{konst.}$$

Rychlost v je však úměrná $1/r$, takže tvar hladiny je

$$z - z_0 = \frac{k}{r^2}.$$

Zajímavou zvláštností, která se *nevyskytuje v obecném případě*, jen v případě nevířivého proudění nestlačitelné tekutiny, je fakt, že známe-li jedno řešení a nějaké jiné řešení, je jejich součet také

řešením. Je to pravda, neboť rovnice (40.19) jsou lineární. Úplné rovnice hydrodynamiky (40.8), (40.9) a (40.10) jsou nelineární, a to způsobuje podstatnou odlišnost. V případě nevířivého proudění kolem válce však můžeme složit proudění z *obr. 40.11a* s prouděním z *obr. 40.11b* a získat nové proudové pole na *obr. 40.11c*. Toto proudění je zvláště zajímavé. Rychlost proudění je větší na horním konci válce než na spodním. Tlak na *horním* konci je tedy *nižší* než na dolním konci. Máme-li tedy kombinaci cirkulace kolem válce a vodorovného proudění, na válce působí výsledná svíslá síla, která se nazývá *vztlaková síla*. Samozřejmě, není-li cirkulace, podle naší teorie „suché“ vody na žádné těleso žádné výsledné síly nepůsobí.

40.5 VÍROVÉ ČÁRY

Už jsme napsali obecné rovnice proudění nestlačitelné tekutiny, pokud v ní existují víry. Jsou tu opět:

$$\text{I. } \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\text{II. } \boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v}$$

$$\text{III. } \frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) = 0.$$

Helmholtz slovně vysvětlil fyzikální obsah těchto rovnic pomocí tří tvrzení. Nejdříve si představte, že místo proudnic budeme v tekutině kreslit *vírové čáry*. Vírovými čarami chápeme čáry, které mají směr $\boldsymbol{\Omega}$ a jejich hustota je v libovolné oblasti úměrná velikosti $\boldsymbol{\Omega}$. Podle rovnice II je divergence $\boldsymbol{\Omega}$ *vždy* nulová (vzpomeňte si, že podle článku 3.7 je divergence rotace vektoru *vždy* nulová). Vírové čáry se tedy podobají magnetickým siločarám: nemají začátek ani konec a mají tendenci tvořit uzavřené smyčky. Rovnici III Helmholtz slovně formuloval takto: *vírové čáry se pohybují spolu s tekutinou*. To znamená, že kdybyste označili částice tekutiny pohybující se podél některých vírových čar (mohli byste je například zbarvit inkoustem), pak by při pohybu tekutiny a přenosu částic tyto částice vyznačovaly nové polohy vírových čar. Nechtě se atomy pohybují jakýmkoliv způsobem, vírové čáry se pohybují spolu s nimi. To je jeden způsob vyjádření zákonů hydrodynamiky.

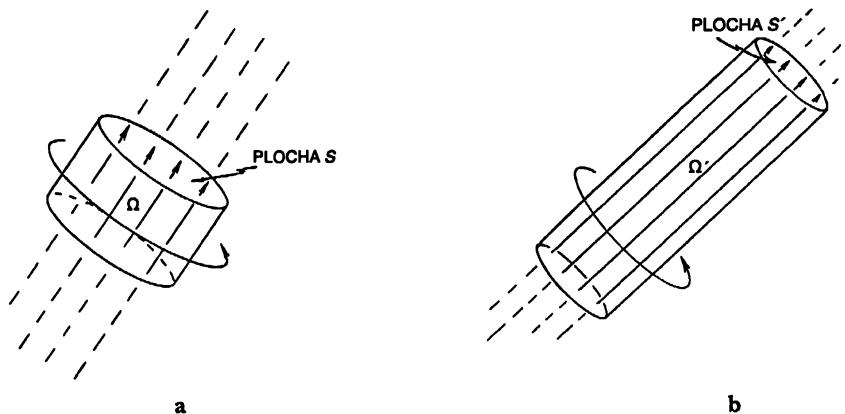
Naznačuje nám to i jednu metodu řešení libovolných úloh. Je-li dáno počáteční pole proudění (např. hodnoty \mathbf{v} ve všech bodech), můžete vypočítat $\boldsymbol{\Omega}$. Pomocí \mathbf{v} můžete také určit, kde se vírové čáry budou nacházet za chvíli; pohybují se rychlostí \mathbf{v} . Z nového $\boldsymbol{\Omega}$ můžete pomocí rovnic I a II určit nové \mathbf{v} . (Je to stejný problém jako výpočet \mathbf{B} z daných proudů.) Známe-li tedy pole proudění v jednom okamžiku, můžeme jej v principu vypočítat pro všechny následující časy. Získáme obecné řešení pro neviskózní proudění.

Dále bychom chtěli ukázat, jak lze alespoň z části pochopit Helmholtzovo tvrzení, a tedy i rovnici III. Ve skutečnosti je to jen zachování momentu hybnosti, použité v případě tekutiny. Představme si malý váleček v kapalině, jehož osa je rovnoběžná s vírovými čarami (*obr. 40.13a*). O něco později se *tatáž* část tekutiny bude nacházet někde jinde.

Obecně bude mít tvar válce s jiným průměrem a na jiném místě. Může mít i jinou orientaci (jako na *obr. 40.13b*). Pokud se však průměr změnil, výška válce se musela zvětšit, aby objem zůstal konstantní (neboť předpokládáme nestlačitelnost tekutiny). Jelikož jsou kromě toho vírové čáry vázány na danou látku, jejich hustota se zvýší, když se průřez válce zmenší. Součin

velikosti vírového vektoru Ω a plochy Sprůřezu válce bude konstantní, takže podle Helmholtze musí platit

$$\Omega_2 S_2 = \Omega_1 S_1. \quad (40.21)$$



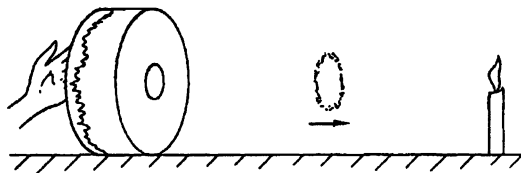
Obr. 40.13 a) Skupina vírových čar v čase t . b) Tytéž čáry v čase t' .

Nyní si všimněte, že při nulové viskozitě jsou všechny síly na povrchu válce (nebo vlastně libovolného objemu) kolmé na povrch. Tlakové síly mohou způsobit přemístění daného objemu z jednoho místa na jiné, nebo jej donutit změnit tvar; nepůsobí-li však *tangenciální* síly, nemůže se velikost *momentu hybnosti látky* v daném objemu změnit. Moment hybnosti tekutiny ve válečku je roven součinu jeho momentu setrvačnosti I a úhlové rychlosti tekutiny, která je úměrná vřmatosti Ω . V případě válce je moment setrvačnosti úměrný Mr^2 . Na základě zachování momentu hybnosti tak docházíme k závěru, že

$$(M_1 R_1^2) \Omega_1 = (M_2 R_2^2) \Omega_2.$$

Hmotnost je však stejná, $M_1 = M_2$ a průřezy jsou úměrné R^2 , takže zde máme opět vztah (40.21). Helmholtzovo tvrzení, které je ekvivalentní s rovnicí III, je jen důsledkem skutečnosti, že bez viskozity se moment hybnosti elementu tekutiny nemůže změnit.

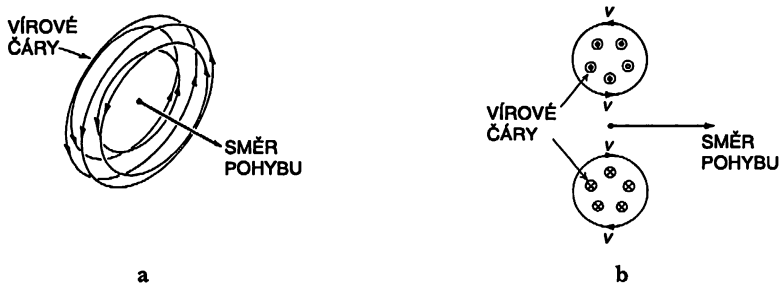
Pohybující se vír lze pěkně demonstrovat pomocí jednoduchého zařízení na obr. 40.14. Je to „buben“ s průměrem a délkou asi 60 cm, který získáme, napneme-li silnou gumovou fólii na otevřený konec válcové „krabice“. Buben je překllopen na stranu a jeho dno je pevně s výjimkou otvoru, který má průměr asi 8 cm. Udeřte-li prudce na gumovou membránu, vyrazí z otvoru vírový prstenec.



Obr. 40.14 Jak vytvořit putující vírový prstenec

Ačkoliv je neviditelný, můžete se o jeho existenci přesvědčit podle toho, že sfoukne plamen svíčky ve vzdálenosti 3–6 m. Ze zpoždění tohoto jevu poznáte, že „něco“ se šíří prostorem konečnou rychlostí. Lépe to uvidíte, nafoukáte-li nejdříve do krabice trochu dýmu. Pak uvidíte vír jako krásný okrouhlý prstenec.

Dýmový prstenec je vlastně prstencový svazek vírových čar (obr. 40.15a). Jelikož $\Omega = \nabla \times v$, popisují vírové čáry zároveň cirkulaci vektoru v jak ukazuje na obrázku část b. To, proč se prstenec pohybuje dopředu, můžeme pochopit následujícím způsobem: cirkulující rychlost ve spodní části prstence se šíří k jeho horní části a má tak složku rychlosti ve směru osy. Jelikož se vírové čáry pohybují spolu s tekutinou, i ony se pohybují vpřed rychlostí v . (Samozřejmě, že cirkulace rychlosti v horní části zajišťuje i dopředný pohyb vírových čar ve spodní části.)



Obr. 40.15 Pohybující se vírový (dýmový) prstenec. a) Vírové čáry. b) Průřez prstence

Musíme se zmínit ještě o jedné vážné komplikaci. Už jsme poznamenali, že z rovnice (40.9) vyplývá, že je-li Ω na počátku nulové, bude nulové vždy. Tento výsledek znamená neúspěch teorie „suché“ vody, neboť znamená, že když je Ω nulové jednou, bude takové *vždy* – žádným způsobem není možné vyrobit víry. V našem jednoduchém pokusu s bubnem jsme však vytvořili vírový prstenec ve vzduchu, který byl původně nehybný. (Před úderem bylo zaručeně všude v krabici $v = 0$ a $\Omega = 0$.) Také víme, že na jezeře můžeme vytvořit víry pomocí pádla. Je zřejmé, že k tomu abychom úplně pochopili chování tekutin, musíme přejít k teorii „mokrě“ vody.

Další tvrzení teorie „suché“ vody, které není správné, je obsaženo v předpokladu, který jsme provedli, když jsme uvažovali o proudění tekutiny na hranici s pevnou látkou. Když jsme hovořili o obtékání válce (jako např. na obr. 40.11), předpokládali jsme, že tekutina sklouzne po povrchu pevné látky. V naší teorii by rychlost na povrchu pevné látky mohla mít libovolnou hodnotu v závislosti na počátečních podmínkách; neuvažovali jsme „tření“ mezi tekutinou a pevnou látkou. Je však experimentálním faktem, že rychlost skutečné tekutiny vždy klesá u povrchu pevného tělesa k nule. Naše řešení pro případ válce (ať už s cirkulací, nebo bez ní) je proto chybné podobně jako náš výsledek, který se týká vzniku vírů. O správnějších teoriích si povíme v následující kapitole.

PŘÍKLADY A CVIČENÍ

- 40.1** ■ a) Dokažte správnost tvrzení v kapitole 40 o tom, že v nevazké kapalině je tlak ve všech směrech stejný.
b) Jako matematické cvičení dokažte velmi užitečnou vektorovou identitu použitou v kapitole 40: $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v})$, kde $\boldsymbol{\Omega} = (\nabla \times \mathbf{v})$.
- 40.2** ■ Kapalina ve válcové nádobě kruhového průřezu rotuje stálou úhlovou rychlostí ω (známé Newtonovo vědro). Určete tvar prohlubeniny, kterou vytvoří hladina kapaliny, rotují-li částice na povrchu kapaliny ve vzdálenosti r od osy rychlostí $\mathbf{v} = \omega r$. Ukažte, že cirkulace kapaliny vztažená k jednotce plochy, tj. rot \mathbf{v} , je rovna dvojnásobku úhlové rychlosti rotace.
- 40.3** ■ Koule o hmotnosti m a poloměru a se pohybuje konstantní rychlostí v „suché“ vodě. Ukažte, že součet kinetické energie koule a kapaliny je rovna $\frac{1}{2} \left(m + \frac{M}{2} \right) v^2$, kde M je hmotnost kapaliny vytěsněné koulí. Čemu je rovna celková hybnost koule a kapaliny?

Proudění „mokrý vody“

41.1 VISKOZITA

41.2 VISKÓZNÍ PROUDĚNÍ

41.3 REYNOLDSOVO ČÍSLO

41.4 OBTĚKÁNÍ KRUHOVÉHO VÁLCE

41.5 LIMITA NULOVÉ VISKOZITY

41.6 COUETTOVO PROUDĚNÍ

41.1 VISKOZITA

V předcházející kapitole jsme probrali chování vody, přičemž jsme zanedbali jev viskozity. Nyní bychom se chtěli podívat na *skutečné chování* tekutin. Kvalitativně popíšeme, jak se tekutiny chovají za nejrůznějších okolností, abyste získali o tématu jistou představu. Ačkoliv vám ukážeme několik složitých rovnic a řekneme o některých složitých jevech, není naším cílem, abyste se naučili všechno. V jistém smyslu je tato kapitola „kulturní vsuvkou“, která vám má poskytnout představu o tom, jak vypadá svět. Pouze jednu věc by se vám vyplatilo se naučit, a to jednoduchou definici viskozity, k níž se dostaneme za chvíli. Vše ostatní je tu pro vaše pobavení.

V předcházející kapitole jsme zjistili, že zákony pohybu tekutiny jsou obsaženy v této rovnici:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \varphi + \frac{\mathbf{f}_{\text{visk}}}{\rho}. \quad (41.1)$$

V našem přiblížení „suché“ vody jsme vynechali poslední člen a zanedbali tak všechny viskózní efekty. Kromě toho jsme občas přidali další přiblížení tím, že jsme tekutinu považovali za nestlačitelnou; tehdy jsme měli dodatečnou rovnici

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Poslední přiblížení je často velmi dobré, zvláště když jsou rychlosti proudění mnohem menší než rychlost zvuku. Ale ve skutečných tekutinách nemůžeme téměř nikdy zanedbat vnitřní tření, které nazýváme viskozitou; většina zajímavých jevů, k nimž dochází, s ní tak nebo onak souvisí. Například jsme viděli, že v „suché“ vodě se cirkulace nikdy nemění: byla-li nulová na počátku, nikdy nebude jiná. Naproti tomu cirkulace v tekutinách se objevuje každou chvíli. Musíme proto naši teorii poopravit.

Začneme důležitým experimentálním faktem. Když jsme se zabývali prouděním „suché“ vody kolem válce, tzv. „potenciálním prouděním“, nebyl důvod nedovolit vodě, aby měla tangenciální rychlost vzhledem k povrchu válce; pouze normálová složka musela být nulová. Nezvážili jsme možnost, že může existovat smyková síla mezi tekutinou a pevnou látkou. Ukazuje se (ačkoliv to není vůbec samozřejmé), že ve všech případech, které byly experimentálně prověřeny, je rychlost tekutiny u povrchu pevné látky přesně nulová. Už jste si bezpochyby všimli, že na lopatce ventilátoru se nasbívá tenká vrstva prachu a že na ní zůstane i po té, co provětrávala. Stejný jev uvidíte dokonce i na velkém ventilátoru v aerodynamickém tunelu. Proč vzduch neodvěje prach? Přesto, že lopatka ventilátoru se vzduchem pohybuje velkou rychlostí, rychlost vzduchu vzhledem k lopatce klesá u jejího povrchu k nule. Nejmenší částičky prachu proto zůstávají na místě.⁵⁶⁾ Musíme naši teorii pozměnit tak, aby byla ve shodě s experimentální skutečností, že ve všech normálních tekutinách mají molekuly blízko pevného povrchu (vzhledem k povrchu) nulovou rychlost.⁵⁷⁾

Původně jsme charakterizovali tekutinu tím, že přiložíte-li k ní (libovolně malé) smykové napětí, tekutina se mu poddá. Teče. Ve statických situacích neexistují smyková napětí. Ale dříve než je dosaženo rovnováhy, pokud ještě na tekutinu působíte, mohou smykové síly existovat. Viskozita právě popisuje smykové síly, které existují v pohybující se tekutině. Abychom našli míru smykových sil po dobu pohybu tekutiny, přestavíme si pokus následujícího typu. Představte si, že máme dvě pevné rovinné desky, mezi nimiž je voda (obr. 41.1), přičemž jednu z nich udržujeme v klidu a druhou pohybujeme rovnoběžně malou rychlostí v_0 . Změřte-li sílu, která je potřebná k tomu, abychom horní desku udrželi v pohybu, zjistíte, že je úměrná ploše desek a v_0/d , přičemž d je vzdálenost mezi deskami. Smykové napětí F/S je tedy úměrné v_0/d :

$$\frac{F}{S} = \eta \frac{v_0}{d}.$$

Konstanta úměrnosti η se nazývá *dynamická viskozita*.

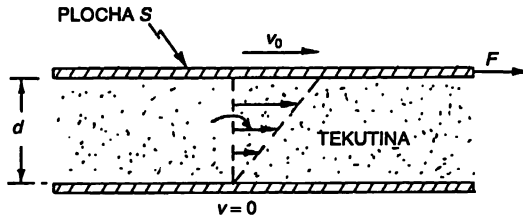
Ve složité situaci si vždy můžeme vybrat malý tenký hranol vody, jehož stěny jsou rovnoběžné s prouděním (obr. 41.2). Smyková síla, která působí na tento hranolek, je

$$\frac{\Delta F}{\Delta S} = \eta \frac{\Delta v_x}{\Delta y} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (41.2)$$

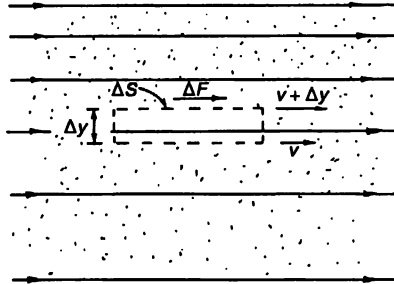
⁵⁶⁾ Z desky stolu můžete sfouknout velké prachové částičky, ale ne ty nejmenší. Větší částičky totiž vyčnívají do proudu vzduchu.

⁵⁷⁾ Lze si představit podmínky, za nichž toto tvrzení neplatí: sklo je teoreticky „tekutina“, ale zaručeně lze dosáhnout toho, aby klouzalo po povrchu oceli. I toto naše tvrzení tedy má své hranice, za nimiž přestává platit.

VISKOZITA



Obr. 41.1 Unášení viskózní tekutiny mezi dvěma rovnoběžnými deskami



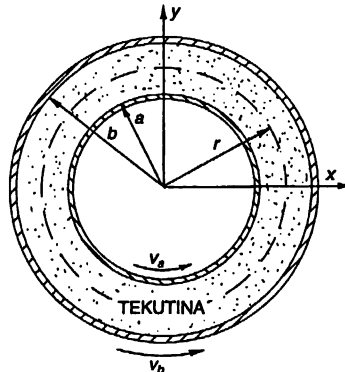
Obr. 41.2 Smykové napětí ve viskózní tekutině

Zde je $\partial v_x / \partial y$ rychlost změny deformace ve smyku, kterou jsme definovali v kapitole 38, takže v tekutině je smykové napětí úměrné rychlosti změny smykové deformace.

V obecném případě píšeme

$$S_{xy} = \eta \left(\frac{\Delta v_y}{\Delta x} + \frac{\Delta v_x}{\Delta y} \right). \quad (41.3)$$

Rotuje-li tekutina rovnoměrně, je $\partial v_x / \partial y$ opačně k $\partial v_y / \partial x$ a S_{xy} je nulové. Musí to tak být, neboť v rovnoměrně rotující tekutině nejsou smyková napětí. (Něco podobného jsme požadovali i při definici ϵ_{xy} v kapitole 39.) Samozřejmě, i pro S_{yz} a S_{zx} platí odpovídající výrazy.



Obr. 41.3 Proudění tekutiny mezi dvěma sousedními válci, které se otáčejí různými úhlovými rychlostmi.

Jako příklad využití těchto myšlenek si všimneme pohybu tekutiny mezi dvěma sousými válcovými plochami. Necht' má vnitřní plocha poloměr a a obvodovou rychlost v_a a vnější poloměr b a rychlost v_b (obr. 41.3). Můžeme si položit otázku: Jaké je rozdělení rychlostí mezi válcovými plochami? Abychom na ni mohli odpovědět, najdeme nejdříve vzorec pro viskózní smyk v tekutině ve vzdálenosti r od osy. Na základě symetrie problému můžeme předpokládat, že proudění je vždy tangenciální a že jeho rychlost závisí jen na r ; $v = v(r)$.

Pozorujeme-li ve vodě zrníčko ve vzdálenosti r od osy, jeho souřadnice jako funkce času jsou

$$x = r \cos \omega t, \quad y = r \sin \omega t,$$

kde $\omega = v/r$. Potom složka x a y rychlosti je

$$v_x = -r\omega \sin \omega t = -\omega y \quad \text{a} \quad v_y = r\omega \cos \omega t = \omega x. \quad (41.4)$$

Z rovnice (41.3) vyplývá

$$S_{xy} = \eta \left[\frac{\partial}{\partial x} (x\omega) - \frac{\partial}{\partial y} (y\omega) \right] = \eta \left[x \frac{\partial \omega}{\partial x} - y \frac{\partial \omega}{\partial y} \right]. \quad (41.5)$$

V bodě při $y=0$ je $\partial \omega / \partial y = 0$ a $x \partial \omega / \partial x$ je totéž, jako $r d\omega / dr$. V tomto bodě tedy

$$(S_{xy})_{y=0} = \eta r \frac{d\omega}{dr}. \quad (41.6)$$

(Je rozumné očekávat, že S bude záviset jen na $\partial \omega / \partial r$, pokud se ω nemění se změnou r , tekutina se rovnoměrně otáčí a nejsou napětí.)

Napětí, které jsme vypočítali, je tangenciální smyk, který je stejný všude kolem válce. *Moment síly* N , který působí na *válcové ploše* s poloměrem r a výškou l , můžeme vypočítat tak, že vynásobíme smykové napětí ramenem síly r a plochou $2\pi r l$. Dostaneme

$$N = 2\pi r^2 l (S_{xy})_{y=0} = 2\pi \eta l r^3 \frac{d\omega}{dr}. \quad (41.7)$$

Jelikož je proudění vody ustálené (neexistuje úhlové zrychlení), výsledný moment síly, který působí na válcovou vrstvu mezi r a $r + dr$ musí být nulový; tj. moment síly při r musí být v rovnováze se stejným, ale opačným momentem síly při $r + dr$, takže N musí být nezávislé na r . Jinými slovy $r^3 d\omega/dr$ je rovno nějaké konstantě, řekněme A , a

$$\frac{d\omega}{dr} = \frac{A}{r^3}. \quad (41.8)$$

Zintegrovaním zjistíme, že ω se s r mění jako

$$\omega = -\frac{A}{2r^2} + B. \quad (41.9)$$

Konstanty A a B je třeba určit tak, aby byly splněny podmínky $\omega = \omega_a$ při $r = a$ a $\omega = \omega_b$ při $r = b$. Vyjde nám

$$A = \frac{2a^2b^2}{b^2 - a^2} (\omega_b - \omega_a) \quad (41.10)$$

$$B = \frac{b^2\omega_b - a^2\omega_a}{b^2 - a^2}.$$

Už tedy známe ω jako funkci r , odkud $v = \omega r$.

Chceme-li zjistit moment síly, můžeme jej najít ze vztahu (41.7) a (41.8):

$$N = 2\pi\eta l A$$

nebo

$$N = \frac{4\pi\eta l a^2 b^2}{b^2 - a^2} (\omega_b - \omega_a). \quad (41.11)$$

Je úměrný relativní úhlové rychlosti obou válců. Standardní přístroj na měření dynamické viskozity je uspořádán takto: Jeden z válců, řekněme vnější, je připevněn k otáčející se ose, ale udržovaný v klidu pružinovým siloměrem, který měří působící moment síly, zatímco vnitřní se otáčí konstantní úhlovou rychlostí. Koeficient viskozity je pak určen pomocí rovnice (41.11).

Z definice dynamické viskozity vidíte, že její jednotka je pascal sekunda ($\text{Pa} \cdot \text{s}$). Voda při 20°C má

$$\eta = 10^3 \text{ Pa} \cdot \text{s} = 10^3 \text{ N s m}^{-2}.$$

Obvykle je užitečnější používat *kinematickou viskozitu*, což je η dělené hustotou ρ . Hodnoty pro vodu a vzduch jsou pak srovnatelné:

$$\begin{array}{ll} \text{voda při } 20^\circ\text{C}: & \eta/\rho = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \\ \text{vzduch při } 20^\circ\text{C}: & \eta/\rho = 15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}. \end{array} \quad (41.12)$$

Viskozita obvykle silně závisí na teplotě. Například v případě vody těsně nad bodem mrazu je η/ρ 1,8-krát větší než při 20°C .

41.2 VISKÓZNÍ PROUDĚNÍ

Nyní přejdeme k obecné teorii viskózního proudění – nebo alespoň natolik obecné, nakolik je lidem známa. Už jsme pochopili, že složky smykového napětí jsou úměrné prostorovým derivacím různých složek rychlostí, jako např. $\partial v_x/\partial y$ nebo $\partial v_y/\partial x$. V obecném případě *slučitelné* tekutiny existuje i další člen v napětích, který závisí na jiných derivacích rychlosti. Obecný výraz je

$$S_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \eta' \delta_{ij} (\nabla \cdot \mathbf{v}), \quad (41.13)$$

kde x_i je některá z kartézských souřadnic x , y nebo z , v_j je některá z kartézských souřadnic rychlostí. (Symbol δ_{ij} je Kroneckerovo delta, které je rovno 1, pokud $i=j$, a 0, když $i \neq j$.) Dodatečný člen přidává $\eta' \nabla \cdot \mathbf{v}$ všem diagonálním složkám S_{ij} tenzoru napětí. Je-li tekutina nestačitelná, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ a tento člen navíc se neobjeví. Souvisí tedy s vnitřními silami po dobu stlačování. Pro popis tekutiny jsou tedy třeba dvě konstanty, podobně jako jsme měli dvě konstanty i při popisu homogenního pružného tělesa. Koeficient η se nazývá *koeficient první viskozity* nebo smykový koeficient viskozity, zatímco nový koeficient η' se nazývá *koeficient druhé viskozity*.

Nyní chceme určit viskózní sílu na jednotku objemu, \mathbf{f}_{visk} , abychom ji mohli dosadit do rovnice (41.1) a získat tak pohybovou rovnici reálné tekutiny. Síla, která působí na malý element vody ve tvaru krychle, je výslednicí sil na všech šesti stěnách. Vezmeme-li vždy dvě z nich, které působí na protilehlé stěny, získáme rozdíly, které závisejí na derivacích napětí, a tedy na druhých derivacích rychlostí. To se nám hodí, protože se opět dostaneme k vektorové rovnici. Složka hustoty viskózní síly ve směru kartézské souřadnice x_i je

$$(f_{\text{visk}})_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\eta' \nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (41.14)$$

Závislost koeficientů viskozity na souřadnicích není obvykle podstatná a lze ji zanedbat. Hustota viskózní síly pak obsahuje jen druhé derivace rychlosti. V kapitole 39 jsme viděli, že nejobecnější tvar druhých derivací, které se mohou vyskytnout ve vektorové rovnici, je součtem členu s laplasiánem ($\nabla \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla^2 \mathbf{v}$) a členu s gradientem divergence ($\nabla (\nabla \cdot \mathbf{v})$). Rovnice (41.14) je právě takovýmto součtem s koeficienty η a $(\eta + \eta')$. Vyjde nám

$$\mathbf{f}_{\text{visk}} = \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\eta + \eta') \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (41.15)$$

V nestlačitelném případě $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ a viskózní síla na jednotku objemu je jen $\eta \nabla^2 \mathbf{v}$. Tento výraz používá většina lidí; kdybyste však chtěli vypočítat absorpci zvuku v tekutině, potřebovali byste i druhý člen.

Nyní můžeme završit odvození naší obecné pohybové rovnice reálné tekutiny. Dosazením rovnice (41.15) do (41.1) vyjde

$$\rho \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right\} = -\nabla p - \rho \nabla \varphi + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\eta + \eta') \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}).$$

Je to složitá rovnice. Taková je však příroda.

Dosadíme-li jako předtím vířnatost $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v}$, můžeme naši rovnici zapsat jako

$$\rho \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 \right\} = -\nabla p - \rho \nabla \varphi + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\eta + \eta') \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (41.16)$$

Znovu předpokládáme, že jediné působící objemové síly jsou konzervativní podobně jako gravitační síla. Abychom viděli, co náš nový člen znamená, všimněme si případu nestlačitelné tekutiny. Vypočítáme-li potom rotaci rovnice (41.16), dostaneme

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) = \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \boldsymbol{\Omega}. \quad (41.17)$$

Tato rovnice vypadá jako (40.9) s výjimkou nového členu na pravé straně. Kdyby byla pravá strana nulová, opět by platilo Helmholtzovo tvrzení, že víry se pohybují spolu s tekutinou. Nyní tu na pravé straně máme poměrně komplikovaný nenulový člen, který má však přímé fyzikální důsledky. Zanedbáme-li na okamžik člen $\nabla \times (\Omega \times v)$, získáme *difuzní rovnici*. Nový člen způsobuje, že vírnatost Ω *difunduje* do tekutiny. Je-li gradient vírnatosti velký, vírnatost se rozšíří do sousedních oblastí tekutiny.

Tento člen způsobuje, že dýmový prstenec se při pohybu rozplývá. To se také hezky projeví, vyšlete-li „čistý“ vír („bezdýmový“ prstenec vyrobený zařízením z předchozí kapitoly) oblakem dýmu. Když z oblaku vyjde, nese s sebou trochu dýmu. Opět vidíme dutý dýmový prstenec. Něco z Ω difunduje do okolního dýmu, přičemž si však udrží směr pohybu víru.

41.3 REYNOLDSOVO ČÍSLO

Ukážeme, jak se změní charakter proudění tekutiny v důsledku nového viskózního členu. Všimneme si podrobně dvou problémů. První je obtékání válce tekutinou – problém, který jsme se snažili v předcházející kapitole řešit použitím teorie neviskózní tekutiny. Ukazuje se, že viskózní rovnice dnes umíme vyřešit jen v několika speciálních případech. Proto část toho, o čem budeme hovořit, se bude zakládat na experimentálních měřeních, samozřejmě, vyhovuje-li experimentální model rovnici (41.17).

Matematický problém je následující: Rádi bychom našli řešení v případě obtékání dlouhého válce s průměrem D nestlačitelnou viskózní tekutinou. Proudění by mělo být určeno rovnicí (41.17) a vztahem

$$\Omega = \nabla \times v \quad (41.18)$$

za těch podmínek, že rychlost ve velké vzdálenosti je konstantní, řekněme V (nechť je rovnoběžná s osou x), zatímco na povrchu válce je nulová. To znamená,

$$v_x = v_y = v_z = 0 \quad (41.19)$$

při

$$x^2 + y^2 = \frac{D^2}{4}.$$

Toto úplně určuje naši matematickou úlohu.

Podíváte-li se na horní rovnice, uvidíte, že v úloze vystupují čtyři různé parametry: η , ρ , D a V . Možná že očekáváte, že se budeme muset zabývat celou řadou případů pro různá V , různá D atd. Ale není to tak. Všechna možná řešení odpovídají různým hodnotám *jediného* parametru. To je nejdůležitější obecný fakt, který můžeme uvést o viskózním proudění. Abychom pochopili, proč je to tak, všimněme si nejdříve, že viskozita a hustota vystupují jen jako poměr η/ρ , tj. ve formě *kinematické viskozity*. Tím se počet nezávislých parametrů redukuje na tři. Měřme dále všechny vzdálenosti pomocí jediné délky, která se v problému vyskytuje, pomocí průměru válce D ; tj. nahradíme proměnné x , y , z novými proměnnými x' , y' , z' podle vztahů

$$x = x'D, \quad y = y'D, \quad z = z'D.$$

Tak se D z (41.19) vytratí. Podobně měříme-li všechny rychlosti v jednotkách V , tj. dosadíme

$v = v' V$, zbavíme se i V a v' je ve velké vzdálenosti od válce rovno 1. Když jsme definovali naše jednotky délky a rychlosti, musí být náš jednotkou času D/V ; musíme zvolit

$$t = t' \frac{D}{V}. \quad (41.20)$$

V našich nových jednotkách se derivace v rovnici (41.18) změní z $\partial/\partial x$ na $(1/D)\partial/\partial x'$ a podobně; rovnice (41.18) se tak mění na

$$\Omega = \nabla \times v = \frac{V}{D} \nabla' \times v' = \frac{V}{D} \Omega'. \quad (41.21)$$

Naše hlavní rovnice (41.17) pak zní

$$\frac{\partial \Omega'}{\partial t} + \nabla' \times (\Omega' \times v') = \frac{\eta}{\rho V D} \nabla'^2 \Omega'.$$

Všechny konstanty se soustředily do jediného činitele, který ve smyslu používaných zvyklostí označíme jako $1/\mathfrak{R}$:

$$\mathfrak{R} = \frac{\rho}{\eta} V D \quad (41.22)$$

Zapamatujte-li si, že všechny naše rovnice je třeba psát se všemi veličinami v nových jednotkách, můžeme vynechat čárky. Naše rovnice proudění jsou pak

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \nabla \times (\Omega \times v) = \frac{1}{\mathfrak{R}} \nabla^2 \Omega \quad (41.23)$$

a

$$\Omega = \nabla \times v$$

s podmínkami

$$v = 0$$

při

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

a

$$v_x = 1, \quad v_y = v_z = 0 \quad (41.24)$$

při

$$x^2 + y^2 + z^2 \gg 1.$$

Je velmi zajímavé, co to znamená fyzikálně. Znamená to například, že vyřešíme-li problém obtékání pro jednu rychlost V_1 a určitý poloměr válce D_1 a pak se zeptáme na obtékání v případě jiného poloměru D_2 a jiné tekutiny, bude proudění stejné při rychlosti V_2 , která odpovídá stejnému Reynoldsovu číslu, tj. při

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{\rho_1}{\eta_1} V_1 D_1 = \mathfrak{R}_2 = \frac{\rho_2}{\eta_2} V_2 D_2. \quad (41.25)$$

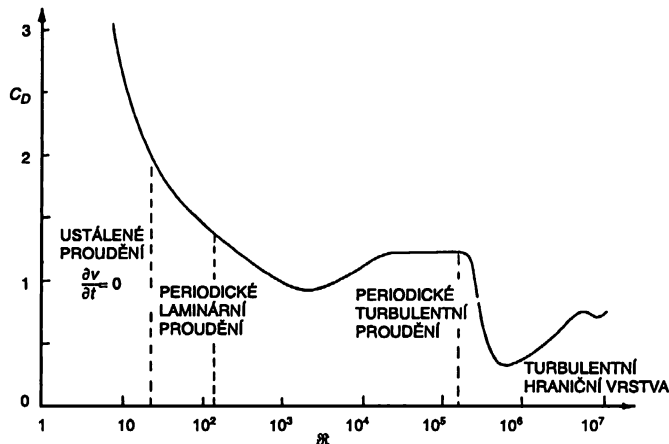
Pro každé dvě situace, které mají stejné Reynoldsovo číslo, bude proudění „vypadat“ stejně – použijeme-li odpovídající změněné veličiny x', y', z' a t' . Toto je důležité tvrzení, které znamená, že můžeme určit, jak vzduch obtéká křídlo letadla, aniž bychom postavili letadlo a experimentovali s ním. Místo toho můžeme vyrobit model a provádět měření s použitím rychlosti, která dává stejné Reynoldsovo číslo. To je princip, který umožňuje využít výsledky z „aerodynamického tunelu“, získané s malými letadélky, nebo ze „zkušebního kanálu“ s malou loďkou, k popisu skutečných letadel nebo lodí. Zapamatujte si však, že to můžeme udělat jen tehdy, je-li možné zanedbat stlačitelnost tekutiny. V opačném případě se objeví nová veličina – rychlost zvuku. Různé situace si opravdu budou odpovídat jen tehdy, kdy je poměr V rychlosti zvuku stejný. Tento poměr se nazývá *Machovo číslo*. Proto při těchto rychlostech kolem rychlosti zvuku nebo nad ní jsou proudění ve dvou situacích stejná, pokud se pro obě rovnají *jak Machova, tak i Reynoldsova čísla*.

41.4 OBTÉKÁNÍ KRUHOVÉHO VÁLCE

Vraťme se k problému obtékání válce pomalým (téměř nestlačitelným) prouděním. Kvalitativně popíšeme, jak proudí reálná tekutina. O takovémto proudění bychom chtěli vědět celou řadu věcí, např. jakou silou je válec unášen. Graf odporové síly, která na válec působí, je znázorněn na obr. 41.4 jako funkce \mathcal{R} , které je úměrné rychlosti V , jsou-li všechny ostatní veličiny konstantní. Ve skutečnosti je na obrázku vynesena *součinitel odporu* (koeficient aerodynamického odporu) C_D , což je bezrozměrné číslo, které je rovno síle dělené veličinou $(1/2)\rho V^2 D l$, kde D je průměr a l délka válce, zatímco ρ je hustota tekutiny:

$$C_D = \frac{F}{(1/2)\rho V^2 D l}$$

Součinitel odporu se složitě mění, a tím nám naznačuje, že v proudu dochází k něčemu zajímavému a komplikovanému. Nyní popíšeme charakter proudění v různých intervalech Reynoldsova čísla.

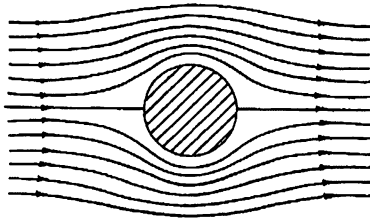


Obr. 41.4 Součinitel odporu C_D kruhového válce jako funkce Reynoldsova čísla.

Nejdříve, když je Reynoldsovo číslo velmi malé, je proudění vcelku ustálené; tj. rychlost je na všech místech stálá a proud obtéká válec. Rozdělení proudnic však není stejné jako při potenciálovém proudění. Získá se řešením trochu odlišné rovnice. Když je jeho rychlost velmi malá, nebo, což je ekvivalentní, když je viskozita velmi vysoká, takže tekutina je podobná medu, jsou inerciální členy zanedbatelné a proudění splňuje rovnici

$$\nabla^2 \Omega = 0.$$

Prvním, kdo tuto rovnici vyřešil, byl Stokes. On také vyřešil stejnou úlohu v případě koule. Pohybuje-li se malá kulička v podmínkách, které odpovídají malým Reynoldsovým číslům, působí na ni síla $6\pi\eta aV$, přičemž a je poloměr koule a V její rychlost. Je to velmi užitečný vztah který udává rychlost, kterou se drobná zrníčka prachu (nebo jiné částičky, které můžeme přibližně považovat na kuličky) pohybují v tekutině pod vlivem dané síly, např. v odstředivce nebo při sedimentaci nebo při difuzi. V oblastech malých Reynoldsových čísel, při $\mathcal{R} < 1$, mají proudnice v okolí válce tvar jako na obr. 41.5.



Obr. 41.5 Viskózní proudění kolem kruhového válce při malých rychlostech

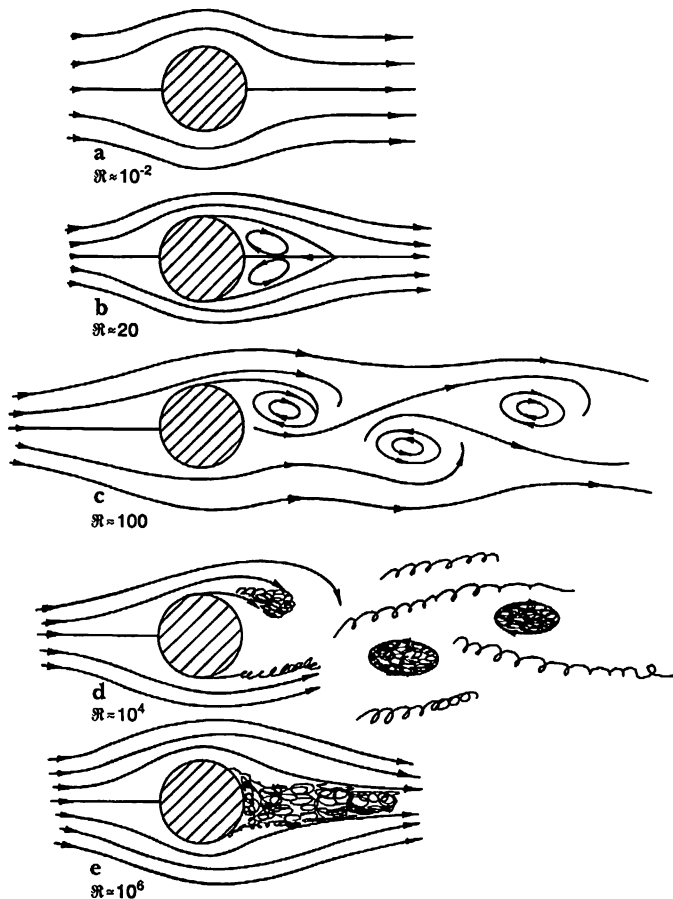
Zvýšíme-li nyní rychlost proudění tak, aby Reynoldsovo číslo vyšlo o něco větší než 1, zjistíme, že proudění je jiné. Za koulí se objeví víry jako na obr. 41.6b. Zůstává otevřenou otázkou, zda nějaké víry existují i při nejnižších Reynoldsových číslech, nebo zda se situace najednou změní při určité hodnotě Reynoldsova čísla. Kdysi se předpokládalo, že cirkulace roste spojitě. Ale dnes se věří, že víření vzniká náhle a je jisté, že se zesiluje při růstu \mathcal{R} . V každém případě v oblasti \mathcal{R} mezi 10 a 30 se charakter proudění mění. Za válcem existuje dvojice vírů.

Proudění se znovu změní, když dosáhneme Reynoldsova čísla kolem čtyřicítky. Náhle se povaha pohybu úplně změní. Jeden z vírů se za válcem natolik prodlouží, že se odtrhne a cestuje po proudu s tekutinou. Přitom tekutina za válcem vytvoří nový vír. Víry se odtrhávají střídavě na obě strany, takže v určitém okamžiku vypadá proudění asi jako na obr. 41.6c. Takový proud vírů se nazývá Kármánova vírová cesta. Objevuje se vždy při $\mathcal{R} > 40$. Na obr. 41.7 je fotografie takového proudění.

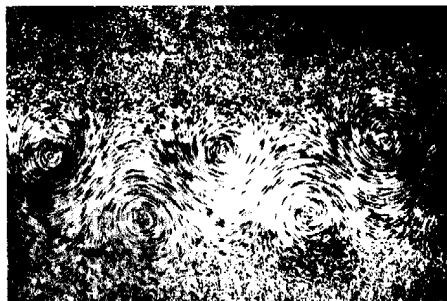
Rozdíl mezi prouděním na obr. 41.6c a na obr. 41.6b nebo 41.6a je téměř absolutní. Na obr. 41.6a a b je rychlost konstantní, zatímco na obr. 41.6c se rychlost v každém bodě s časem mění. Nad $\mathcal{R} = 40$ neexistuje stacionární řešení; hranici jsme na obr. 41.4 označili čárkovanou úsečkou. Při takových vyšších Reynoldsových číslech se proudění mění s časem, ale pravidelným, cyklickým způsobem.

O vzniku vírů si můžeme vytvořit následující fyzikální představu. Víme, že rychlost tekutiny musí být na povrchu válce nulová a že rychle roste, když se od povrchu vzdalujeme. Víry vznikají jako důsledek velkých místních změn rychlosti tekutiny. Je-li rychlost hlavního proudu dostatečně malá, je dost času na to, aby se víry rozptýlily z tenké vrstvy kolem povrchu pevného

tělesa, kde vznikají, a narostly do velké oblasti. Tato fyzikální představa by nás měla připravit na následující změnu podstaty proudění, když se rychlost hlavního proudu, resp. číslo Re dále zvyšuje.



Obr. 41.6 Obtékání válce při různých Reynoldsových číslech



Obr. 41.7 Fotografie Ludwiga Prandlta zachycuje „vířovou cestu“ v proudu za válcem

Roste-li rychlost, zůstává vírům méně a méně času na to, aby se rozptýlily do větších oblastí tekutiny. Dosáhne-li Reynoldsovo číslo hodnotu několika set, začnou víry zaplňovat úzký pás, jak znázorňuje obr. 41.6d. V této vrstvě je proudění chaotické a nepravidelné. Tato oblast se nazývá *mezní vrstva* a oblast nepravidelného proudění si při zvyšování \mathcal{R} proráží cestu stále dále a dále po proudu. V turbulentní oblasti jsou rychlosti velmi nepravidelné a neuspořádané; proudění už není dvojrozměrné, ale zakrucuje se a rotuje ve všech třech rozměrech. Spolu s turbulentním pohybem, však nadále existuje v tekutině i pravidelný pohyb.

Když se Reynoldsovo číslo nadále zvyšuje, proráží si oblast turbulence cestu vpřed, dokud nedosáhne bodu, kde proudnice opouštějí válec. K tomu dochází při $\mathcal{R} = 10^5$. Proudění vypadá jako na obr. 41.6e. Vytvořila se tzv. turbulentní mezní vrstva. Síla odporu se přitom drasticky změnila; podstatně klesla, jak to ukazuje obr. 41.4. V této oblasti rychlostí síla skutečně *klesá* při zvyšování rychlosti. Zdá se, že tu není ani stopy po periodičnosti.

Co se stane při ještě vyšších Reynoldsových číslech? Zvyšujeme-li dále rychlost, turbulentní ohon se opět zvětšuje a odpor roste. Nejnovější experimenty, v nichž bylo dosaženo hodnot \mathcal{R} řádu 10^7 , naznačují, že se v ohonu objevuje nová periodicitá buď proto, že ohon jako celek osciluje sem a tam, nebo proto, že se vytváří nový druh vírů, které koexistují s nepravidelným „šumovým“ pohybem. Podrobnosti ještě nejsou zcela jasné a nadále se experimentálně zkoumají.

41.5 LIMITA NULOVÉ VIZKOZITY

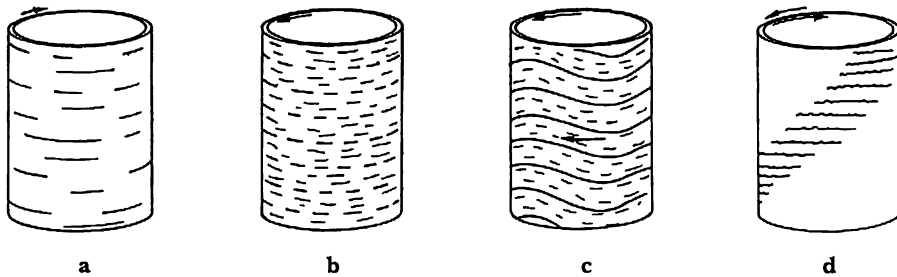
Chtěli bychom podtrhnout, že žádné z popsaných proudění není podobné řešení pro potenciálové proudění, které jsme našli v předcházející kapitole. Na první pohled je to dost překvapující. Konec konců \mathcal{R} je úměrné $1/\eta$ a limita $\eta \rightarrow 0$ je tedy ekvivalentní limitě $\mathcal{R} \rightarrow \infty$. Provedeme-li limitu pro velká \mathcal{R} v rovnici (41.23), zbavíme se pravé strany a získáme právě rovnici z minulé kapitoly. Je však těžké uvěřit, že vysoce turbulentní proudění při $\mathcal{R} = 10^7$ se přibližuje „hladkému“ proudění, vypočtenému z rovnic pro „suchou“ vodu. Jak je možné, že přibližujeme-li \mathcal{R} postupně k nekonečnu, je proudění na základě rovnice (41.23) úplně jiným řešením, než kdybychom na začátku zvolili $\eta = 0$? Odpověď je velmi zajímavá. Všimněte si, že člen na pravé straně rovnice (41.23) obsahuje $1/\mathcal{R}$ krát *druhá derivace*. Je to derivace vyššího řádu než všechny ostatní v rovnici. Ačkoliv je tedy koeficient $1/\mathcal{R}$ malý, existují v oblasti blízko povrchu velmi rychlé změny Ω . Tyto rychlé změny kompenzují důsledky malého koeficientu a součin *neklesá k nule* při růstu \mathcal{R} . Řešení se neblíží k limitnímu případu, kdy se koeficient při $\nabla^2 \Omega$ blíží k nule.

Můžete se divit: „Co to je turbulence malých rozměrů a jak se udržuje? Jak mohou víry, které vznikají někde u okraje válce, vytvořit tolik šumu v pozadí?“ Odpověď je opět zajímavá. Víření má tendenci se zesilovat. Zapomeneme-li na chvíli na difuzi, která způsobuje ztráty, říkají zákony proudění (jak jsme viděli), že vírové čáry jsou unášeny tekutinou rychlostí v . Představme si určitý počet čar Ω , které jsou díky složitému charakteru proudění v deformovány a zakrouceny. To stlačuje čáry a mísí je. Čáry, předtím jednoduché, se zauzlí a stlačí k sobě. Protáhnou se a zhusť. Intenzita vírů a její nepravidelnosti (kladné či záporné) obecně také. Intenzita víření ve třech rozměrech tedy roste tím víc, čím víc se tekutina mísí.

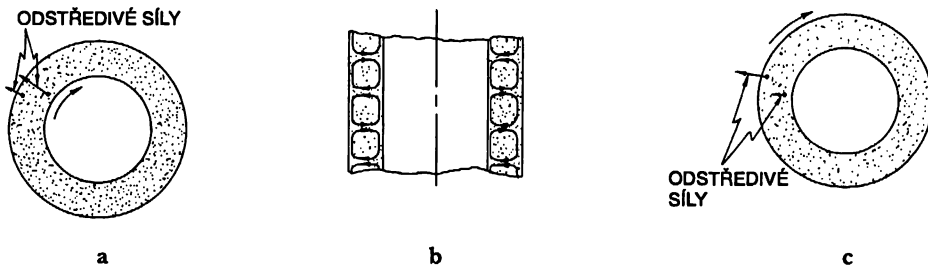
Můžete se také ptát: „Kdy je tedy potenciálové proudění uspokojivou teorií?“ V první řadě platí mimo turbulentní oblasti, kam se víry rozptýlily jen nepodstatně. Vyrobíme-li speciální proudnicové těleso, můžeme turbulentní oblast libovolně zmenšit. Například proudění kolem pečlivě navrženého křídla letadla je téměř výlučně potenciálové.

41.6 COUETTOVO ProuDĚNÍ

Lze ukázat, že složitý a proměnlivý charakter proudění kolem válce není zvláštností, ale že obecně existuje mnoho druhů možných proudění. V 1. článku této kapitoly jsme našli řešení pro viskózní proudění mezi dvěma válcovými plochami a nyní můžeme porovnat naše výsledky s tím, co se děje ve skutečnosti. Vezmeme-li si dva sousední válce, mezi nimiž je olej a v něm rozptýlen jemný hliníkový prach, můžeme snadno pozorovat proudění. Začneme-li nyní vnější válec pomalu otáčet, nestane se nic nečekaného (obr. 41.8a). Podobně se nestane nic zarážejícího, otáčíme-li pomalu vnitřním válcem. Začneme-li však vnitřním válcem otáčet rychleji, čeká nás překvapení. Proudění se rozloží do vodorovných pásů, jak je naznačeno na obr. 41.8b. Rotuje-li podobnou rychlostí vnější válec, přičemž vnitřní se nepohybuje, k žádnému podobnému jevu nedochází. Jak je možné, že je rozdíl mezi tím, zda otáčíme vnitřní nebo vnější válec? Vždyť charakter proudění, který jsme našli, závisel pouze na $\omega_b - \omega_a$! Odpověď můžeme najít, podíváme se na průřezy, které jsou znázorněny na obr. 41.9. Pohybují-li se vnitřní vrstvy tekutiny pohybují rychleji než vnější, mají snahu pohybovat se směrem k vnějšímu okraji – odstředivá síla je větší než tlak, který je udržuje na místě. Celá vrstva se nemůže pohybovat rovnoměrně, neboť jí překážejí vnější vrstvy. Musí se rozdělit na buňky, které cirkulují jako na obr. 41.9b. Situace je podobná konvekčním proudům v místnosti, v níž se horký vzduch nachází u podlahy. Když se vnitřní válec nepohybuje a vnější má velkou rychlost, vytvářejí odstředivé síly tlakový gradient, který vše udržuje v rovnováze (obr. 41.9c); (podobně jako v místnosti, v níž je horký vzduch nahore).



Obr. 41.8 Různé druhy proudění kapaliny mezi dvěma průhlednými rotujícími válci



Obr. 41.9 Proč se proudění rozloží na pásy

Nyní vnitřní válec urychlíme. Počet pásů nejdříve roste, pak se najednou pásy zvlí jako na obr. 41.8ca vlny putují kolem válce. Rychlost těchto vln lze snadno změřit. Při velkých rychlostech otáčení se blíží 1/3 rychlosti vnitřního válce. Přitom nikdo neví proč! To je výzva! Jednoduché číslo jako 1/3 a vysvětlení žádné. Ve skutečnosti není celý mechanismus vzniku vln úplně jasný, ačkoliv zde jde o ustálené laminární proudění.

Začneme-li nyní otáčet vnějším válcem (ale opačným směrem), charakter proudění se začne narušovat. Budou existovat zvláště oblasti, které se střídají se zdánlivě nehybnými oblastmi (obr. 41.8d), vytvářející spirálovitý obrazec. V těchto „nehybných“ oblastech však ve skutečnosti vidíme dost nepravidelné proudění; je vskutku úplně turbulentní. Zvláště oblasti také začínají získávat nepravidelný turbulentní charakter. Otáčej-li se válce ještě rychleji, celé proudění se stane chaoticky turbulentním.

V tomto jednoduchém pokusu pozorujeme mnohé zajímavé režimy proudění, které se navzájem liší, a přitom jsou všechny obsaženy v naší jednoduché rovnici při různých hodnotách jediného parametru \mathcal{R} . Při otáčení válců pozorujeme mnohé jevy, které se vyskytují při obtékání válce: nejdříve je proudění ustálené; pak se objeví proudění, které se mění s časem, ale přitom pravidelným, „hladkým“ způsobem; nakonec se proudění stane úplně nepravidelným. Všichni jste podobné jevy už viděli ve sloupci dýmu, který stoupá z cigarety, když je vzduch v klidu. Nejdříve je sloupec spojitý, pak se začne kroutit a proud dýmu se trhá, a nakonec máme jen nepravidelný převalující se oblak dýmu.

Hlavní poučení, které je třeba si z toho všeho zapamatovat, je skutečnost, že v jednoduché soustavě rovnic (41.23) se skrývá obrovské množství různých možností proudění. Všechny jsou řešením těchto rovnic, pouze hodnoty \mathcal{R} jsou různé. Není důvodu předpokládat, že v těchto rovnicích ještě nějaké členy chybějí. Jediný problém je, že není v našich silách rovnice matematicky analyzovat. Umíme to jen v případě velmi malých Reynoldsových čísel, tj. tehdy, když je viskozita velmi malá. To, že jsme dokázali napsat rovnici, ještě neubírá proudění tekutin ani půvab, ani záhadnost, ani překvapení.

Pokud takové množství možností existuje v jednoduché rovnici s jedním parametrem, co všechno musí být možné v případě složitějších rovnic! Je možné, že základní rovnicí, která popisuje spirálové mlhoviny i vznik, otáčení a výbuchy hvězd a galaxií, je právě jednoduchá rovnice hydrodynamického chování téměř čistého vodíkového plynu. V neodůvodněném strachu z fyziky lidé často říkají, že přece není možné napsat rovnici života. Ale možná je. Ve skutečnosti je možné, že takovou rovnici v dobrém přiblížení máme, zapíšeme-li rovnici kvantové mechaniky:

$$H\psi = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Právě jsme viděli, jak se jevy v celé jejich složitosti docela snadno a překvapivě vnoří z jednoduchých rovnic, které je popisují. Člověk si neuvědomuje možnosti jednoduchých rovnic a často dochází k závěru, že k vysvětlení složitosti okolního světa je třeba něco přinejmenším božského, ne pouhé rovnice.

Napsali jsme rovnici proudění tekutiny. Experiment nám poskytl celou řadu pojmů a přiblížení pro popis jednotlivých řešení, jako jsou vírová cesta, turbulentní ohon a mezní vrstva. Máme-li podobné rovnice k dispozici v méně známé situaci, v níž nemůžeme dělat různé experimenty, snažíme se rovnice vyřešit často primitivním, zavádějícím a zmateným způsobem, abychom určili, jaké nové kvalitativní rysy se mohou objevit, jako nové kvalitativní formy jsou důsledkem rovnic. Naše rovnice pro Slunce jako kouli vodíkového plynu například popisují

Slunce bez skvrn, bez zrnité struktury povrchu, bez prototubernací a bez koróny. Vše je to však v rovnicích obsaženo, jen jsme nenašli způsob, jak to z nich dostat.

Mnozí budou zklamáni, neobjevíme-li na jiných planetách život. Já ne – meziplanetární výzkum mi bude stále připomínat tu nekonečnou škálu nových jevů, které jsou důsledkem velmi jednoduchých principů, bude mě jimi znovu a znovu těšit a překvapovat. Zkušebním kamenem vědy je její schopnost předpovídat jevy. Kdybyste nikdy nevkročili na Zemi, dokázali byste předpovídat bouřky, sopky, vlny v oceánu, ranní svítání i barvitý západ Slunce? Užitečným poučením nám bude, dozvíme-li se, že všechno to se děje i na každé z těchto mrtvých planet, na těchto osmi nebo deseti koulích, které se sesbíraly ze stejného oblaku prachu a které splňují stejné fyzikální zákony.

Nová epocha probuzení lidského umu možná přinese metody, jak porozumět *kvalitativnímu* obsahu rovnic. Dnes to ještě neumíme, Nevidíme, že rovnice proudění vody obsahují takové jevy, jako spirálovitá struktura turbulence, kterou pozorujeme mezi rotujícími válci. Dnes nedokážeme usoudit, zda Schrödingerova rovnice obsahuje i žáby, i hudební skladatele, i morálku, nebo je neobsahuje. Také nedokážeme rozhodnout, zda kromě ní je třeba ještě něco navíc, něco jako Bůh. A proto na to může mít každý svůj vlastní názor.

PŘÍKLADY A CVIČENÍ

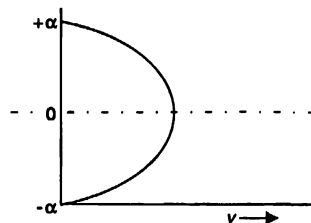
41.1 ■ Pohybuje-li se koule o poloměru a ve vazké kapalině rovnoměrně a dostatečně pomalu, takže proudění obtékající kapaliny je možno považovat za laminární, bude hybná síla rovna síle vazkého tření působícího na kouli. I když tuto sílu *můžete* určit přesně, může být užitečné určit ji na základě rozměrových úvah, zahrneme-li všechny parametry, na nichž může tato síla záviset. Proveďte to. Můžete kvalitativně zdůvodnit, proč tyto parametry vystupují ve výsledném vztahu právě tak a ne jinak?

41.2 ■ Pomalé proudění vazké kapaliny ve válcové trubici můžeme považovat za laminární, přičemž rychlostní profil vypadá přibližně tak, jak je ukázáno na obrázku.

Ukažte, že je-li r vzdálenost od osy trubice, η viskozita a $(p_1 - p_2)/L$ tlakový spád na jednotkové délce trubice, bude rychlostní profil dán výrazem $v(r) = \frac{1}{4\eta} \frac{(p_1 - p_2)}{L} (a^2 - r^2)$.

Podle analogie s Ohmovým zákonem bude objemový průtok kapaliny trubicí Q souviset s tlakovým spádem $\Delta p = (p_1 - p_2)$

vztahem $\Delta p = RQ$, kde R můžeme považovat za odpor trubice o poloměru a a délce L . Domníváte se, že uvedená analogie je pouhá hra slov nebo má hlubší význam? Co je v tom případě analogií kondenzátoru?



41.3 ■ Dno širokého bazénu je pokryto tenkou vrstvou vody (nebo nějaké nestlačitelné kapaliny s viskozitou η). Na hladině vody pluje tenká dřevěná deska, jejíž spodní strana je ve vzdálenosti d ode dna bazénu. Všechny ostatní rozměry desky jsou mnohem větší než d . Deska se pohybuje vodorovně malou rychlostí v . Čemu je rovna rychlost disipace energie v jednotce objemu ve vodě v blízkosti středu desky?

Zakřivený prostor

42.1 ZAKŘIVENÉ PROSTORY SE DVĚMA ROZMĚRY

42.2 KŘIVOST V TROJROZMĚRNÉM PROSTORU

42.3 NÁŠ PROSTOR JE ZAKŘIVEN

42.4 GEOMETRIE V ČASOPROSTORU

42.5 GRAVITACE A PRINCIP EKVIVALENCE

42.6 CHOD HODIN V GRAVITAČNÍM POLI

42.7 KŘIVOST ČASOPROSTORU

42.8 POHYB V ZAKŘIVENÉM ČASOPROSTORU

42.9 EINSTEINOVA TEORIE GRAVITACE

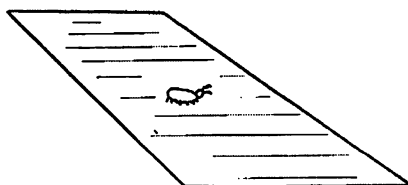
42.1 ZAKŘIVENÉ PROSTORY SE DVĚMA ROZMĚRY

Podle Newtona se vše navzájem přitahuje silou, která je nepřímo úměrná druhé mocnině vzájemné vzdálenosti, a tělesa reagují na síly zrychleními, která jsou silám úměrná. To jsou Newtonovy zákony obecného gravitačního působení a pohybu. Jak víte, vysvětlují pohyby míčů, planet, oběžnic, galaxií atd.

Einstein vytvořil jinou interpretaci zákona gravitace. Podle ní prostor a čas, které dohromady tvoří časoprostor, jsou v blízkosti velkých hmotností *zakřiveny*. Pohyb těles, jak jej známe, je důsledkem jejich snahy pohybovat se po „přímkách“ v zakřiveném prostoru. Je to velmi, velmi rafinovaná myšlenka, kterou chceme v této kapitole objasnit.

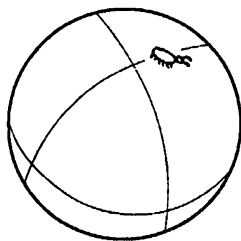
Naše téma se skládá ze tří částí. Jedna se zabývá gravitačními jevy. Druhá obsahuje myšlenku časoprostoru, kterou jsme se už zabývali. Třetí zahrnuje pojem zakřiveného časoprostoru. Na začátku všechno zjednodušíme tím, že se nebudeme starat o gravitaci a vynecháme čas – budeme hovořit jen o zakřiveném prostoru. Později si všimneme i ostatních složek, ale nyní se soustředíme na myšlenku zakřiveného prostoru: co se rozumí zakřiveným prostorem, nebo přesněji, co se pod ním rozumí v této konkrétní Einsteinově aplikaci. I toto je obtížné v případě trojrozměrného prostoru. Proto nejdříve problém ještě více zredukujeme a promluvíme si o tom, co se rozumí pojmem „zakřivený prostor“ ve dvou rozměrech.

Abyste pochopili myšlenku zakřiveného prostoru ve dvou rozměrech, musíte si uvědomit omezené pozorovací schopnosti obyvatele takového prostoru. Představme si brouka bez očí, který žije na rovině, jak ukazuje *obr. 42.1*. Může se pohybovat jen po rovině a nemá možnost zjistit, že lze objevit nějaký „vnější svět“. (Nemá vaši představivost.) Samozřejmě, naše úvahy se budou zakládat na analogii. My žijeme v trojrozměrném světě a nemáme představu, jak z něj lze vyjít nějakým novým směrem; musíme si tedy pomoci analogií. Je to tak, jako bychom byli brouky na rovině, ale v jiném směru by existoval prostor. Proto se nejdříve budeme zabývat broukem a budeme předpokládat, že musí žít na své ploše a nemůže ji opustit.



Obr. 42.1 Brouk na rovině

Jako jiný příklad brouka, žijícího ve dvou rozměrech, si představte takového, který žije na povrchu koule. Představujeme si, že se může procházet po povrchu koule jako na *obr. 42.2*, ale nemůže se podívat „nahoru“, ani „dolů“, ani „ven“.

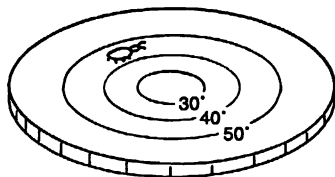


Obr. 42.2 Brouk na kouli

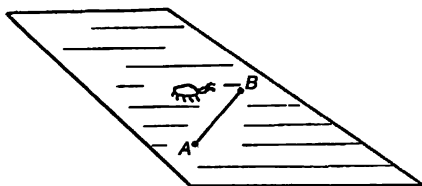
Dále si všimneme třetí bytosti. Je to opět brouk jako oba předcházející a žije na rovině jako náš první brouk, ale rovina je tentokrát zvláštní. Její teplota je na různých místech různá. Navíc brouk i všechna jeho pravítka jsou z látky, která se roztahuje, je-li zahřáta. Kdykoliv položí své pravítko na nějaké místo, aby si něco změřil, pravítko se okamžitě roztáhne na délku, která přísluší teplotě v daném místě. Kdykoliv položí nějaké těleso, sebe, pravítko, trojúhelník, cokoli, těleso se v důsledku teplotní roztažnosti zvětší. Vše je na horkých místech delší než na chladných a vše má stejný koeficient teplotní roztažnosti. Domov tohoto třetího brouka budeme nazývat „zahřátá plotýnka“, ačkoliv budeme mít na mysli speciální druh takové plotýnky, která je chladná ve středu a zahřívá se směrem k okrajům (*obr. 42.3*).

Nyní si představíme, že naši brouci začnou studovat geometrii. Ačkoliv si představujeme, že jsou slepí, takže nevidí „vnější“ svět, dokáží pomoci tykadla a nohou mnoha věcí. Umí kreslit čáry, vyrábět pravítka a měřit délky. Začnou od nejjednoduššího geometrického pojmu. Naučí se nakreslit úsečku – nejkratší spojnici dvou bodů. Náš první brouk (viz *obr. 42.4*) se naučí kreslit velmi pěkné čáry. Co se však stane našemu broukovi na kouli? Nakreslí svou úsečku jako nejkratší – pro něj nejkratší – spojnici dvou bodů (*obr. 42.5*). Nám může připadat jako křivka, on

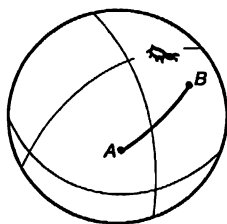
on se však od koule vzdálit nemůže, aby zjistil, že „ve skutečnosti“ existuje i kratší úsečka. On jen ví, že vyzkouší-li ve svém světě jinou cestu, je každá delší než jeho úsečka. Jeho úsečkou je tedy nejkratší oblouk mezi dvěma body. (Je to, samozřejmě, oblouk tzv. hlavní kružnice.)



Obr. 42.3 Brouk na ohřáté desce

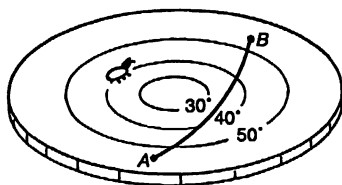


Obr. 42.4 „Úsečka“ v rovině



Obr. 42.5 „Úsečka“ na kouli

Konečně náš třetí brouk z *obr. 42.3* také bude kreslit „úsečky“, které nám budou připadat jako křivky. Například nejkratší vzdálenost mezi *A* a *B* na *obr. 42.6* bude podobný znázorněné křivce. Proč? Protože když se jeho křivka zakřivuje směrem k teplejší částem jeho ohřáté desky, pravítka se prodlouží (z našeho vševědoucího hlediska) a stačí přiložit pravítko méněkrát, abychom dosáhli z *A* do *B*. Pro něj je čára přímá; nemá možnost vědět, že může existovat kdosi v podivném trojrozměrném světě, kdo by za přímku považoval jinou čáru.

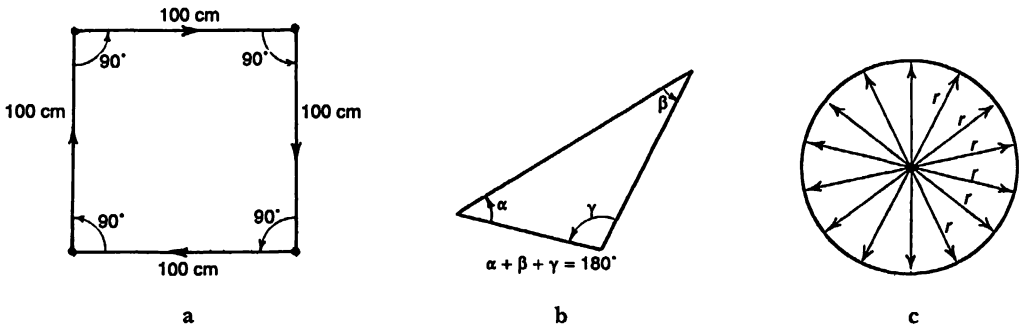


Obr. 42.6 „Úsečka“ na ohřáté desce

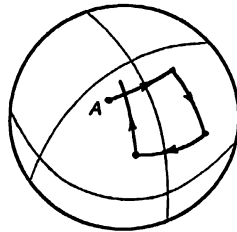
Myslím, že jste pochopili, že celý náš další výklad musí vycházet z hlediska bytostí na různých površích, a ne z *našeho* hlediska. S tímto vědomím se podíváme, jak bude vypadat zbytek jejich geometrie. Předpokládejme, že všichni brouci se naučili jak nakreslit dvě přímky, které se protínají pod pravým úhlem. (Můžete zkusit sami vymyslet, jak by to mohli udělat.) Náš první brouk (ten, co se nachází na obyčejné rovině) zjistí zajímavou věc. Vyjde-li z bodu *A*, nakreslí úsečku dlouhou 100 cm, pak se otočí o pravý úhel, vyznačí dalších 100 cm, znovu se otočí o 90° a projde dalších 100 cm, potřetí udělá pravý úhel a nakreslí čtvrtou stocentimetrovou úsečku, vrátí se do počátečního bodu, jak to znázorňuje *obr. 42.7a*. To je vlastnost jeho světa, jedna ze skutečností jeho „geometrie“.

Pak objeví jinou zajímavost. Nakreslí-li trojúhelník – obrázek ze tří úseček – součet úhlů je roven 180° , tj. součtu dvou pravých úhlů (*obr. 42.7b*).

Dále objeví kružnici. Co je kružnice? Kružnici vytvoříte takto: Vyjdete po přímkách z jediného bodu mnoha směry a zakreslíte množství bodů, které mají stejnou vzdálenost od daného bodu (*obr. 42.7c*). (Musíme geometrické pojmy pečlivě definovat, abychom dokázali udělat jejich analogii v případě broukových kamarádů.) Samozřejmě, je to ekvivalentní křivce, kterou získáte otočením pravítka kolem bodu. V každém případě se náš brouk naučí nakreslit kružnici. Jednoho dne si pak usmyslí změřit její délku. Změří různé kružnice a zjistí pěknou zákonitost: Délka kružnice je vždy součinem stejného čísla a poloměru r (což je, samozřejmě, vzdálenost od středu křivky). Obvod a poloměr mají vždy stejný poměr, přibližně 6,283, který nezávisí na velikosti kružnice.



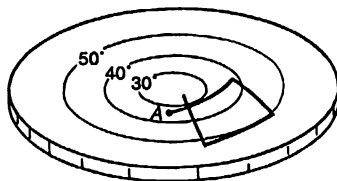
Obr. 42.7 Čtverec, trojúhelník a kružnice v plochém prostoru



Obr. 42.8 Pokus nakreslit „čtverec“ na kouli

Nyní se podíváme, co objevili ostatní brouci v *jejich* geometriích. Nejdříve: co se stane, pokud si-li se brouk na kouli nakreslit „čtverec“? Postupuje-li podle popsaných instrukcí, zjistí, že výsle-

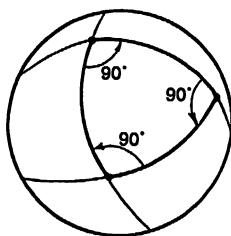
dek pravděpodobně nestál za námahu. Dostane křivku jako na obr. 42.8. Koncový bod B nesouhlasí s počátečním bodem A . Vůbec se mu nepodaří získat uzavřený obrazec. Vezměte kouli a vyzkoušejte si to. Podobná věc se přihodí i našemu příteli na ohřáté desce. Zakreslí-li čtyři úsečky stejné délky (změřené pomocí jeho roztažných pravítek), které svírají pravé úhly, získá obrázek znázorněný na obr. 42.9.



Obr. 42.9 Pokus nakreslit „čtverec“ na ohřáté desce

Nyní předpokládejme, že naši brouci kdysi měli své Euklidy, kteří jim řekli, jaká by „měla geometrie být“, a že oni si předpovědi ověřili pomocí nepřesných měření v malém měřítku. Když se pak pokusili nakreslit přesné čtverce ve velkém měřítku, zjistili, že něco není v pořádku. Důležité je, že pouze na základě geometrických měření by zjistili, že je na jejich prostoru něco zvláštního. *Zakřivený prostor* definujeme jako prostor, v němž se geometrie liší od očekávání v rovině. Geometrie brouků na kouli a na ohřáté desce je geometrií v zakřiveném prostoru. Zákony euklidovské geometrie tu selhávají. A vůbec není třeba se vzdálit z roviny, abyste zjistili, zda svět, v němž žijete je zakřiven. Není třeba obeplovat zeměkouli, abyste zjistili, že je kulatá. Můžete zjistit, že žijete na kouli, tak, že se pokusíte nakreslit čtverec. Je-li čtverec velmi malý, musíte pracovat extrémně přesně, ale je-li čtverec velký, měření lze udělat hrubší.

Vezměme si případ trojúhelníka v rovině. Součet jeho úhlů je 180 stupňů. Náš přítel na kouli může najít velmi zvláštní trojúhelníky. Může například najít trojúhelníky, které mají *tři pravé úhly*. Opravdu! Jeden je znázorněn na ob. 42.10. Nechť náš brouk vyjde ze severního pólu a nakreslí úsečku až po rovník. Potom se otočí o pravý úhel a projde další úsečku stejné délky. Potom totéž provede znovu. V případě speciální délky, kterou si vybral, se vrátí přesně do počátečního bodu a s první úsečkou se setká pod pravým úhlem. Je tedy nepochybné, že jeho trojúhelník má tři pravé úhly, jejichž součet je 270 stupňů. Ukazuje se, že v jeho případě je součet úhlů trojúhelníku vždy větší než 180 stupňů. O kolik je větší (v našem speciálním případě o 90°), ve skutečnosti závisí na ploše trojúhelníka. Je-li trojúhelník na kouli malý, jeho úhly se sčítají na hodnotu velmi blízkou 180 stupňům, jen o maličko větší.

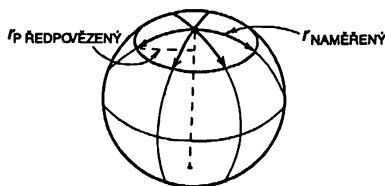


Obr. 42.10 „Trojúhelník“ na kouli může mít tři pravé úhly

Když se trojúhelník zvětšuje, roste i odchylka. Brouci na ohřáté desce by se svými trojúhelníky měli podobné problémy.

Dále se podíváme, co naši brouci zjistí o kružnici. Nakreslí kružnice a změří jejich obvody. Například brouk na kouli by mohl nakreslit kružnici jako na obr. 42.11. Přitom by zjistili, že obvod je menší než 2π -násobek poloměru. (Díky moudrosti našeho trojrozměrného pohledu vidíte, že to co se nazývá poloměrem, je ve skutečnosti křivka, která je *delší* než skutečný poloměr kružnice.) Nechť má brouk na kouli prostudovanou euklidovskou geometrii a rozhodne se předpovědět poloměr kružnice tak, že vydělí obvod C číslem 2π ,

$$r_{\text{předp}} = \frac{C}{2\pi}. \quad (42.1)$$



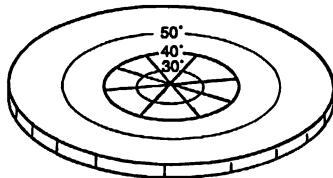
Obr. 42.11 Kružnice na kouli

Pak zjistí, že naměřený poloměr je větší než předpovězený. Aby se s tím nějak vyrovnal, může rozdíl definovat jako „nadbytečný poloměr“

$$r_{\text{naměř}} - r_{\text{předp}} = r_{\text{nadb}} \quad (42.2)$$

a zkoumat, jak nadbytečný poloměr závisí na velikosti kružnice.

Náš brouk na ohřáté desce by objevil podobný jev. Nechť má nakreslit kružnici se středem v chladném bodě desky (obr. 42.12). Kdybychom sledovali, jako kreslí kružnici, zjistili bychom, že jeho pravítka jsou blízko středu kratší a prodlužují se směrem od středu, ačkoliv to brouk neví. Když pak měří obvod, jeho pravítko je po celou dobu dlouhé, takže také zjistí, že změřený poloměr je větší než předpovězený, $C/2\pi$. Brouk na ohřáté desce také objeví „efekt nadbytečného poloměru“. A znovu velikost efektu závisí na poloměru kružnice.



Obr. 42.12 Kružnice na ohřáté desce

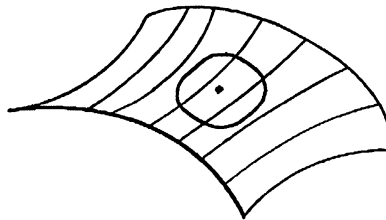
Zakřivený prostor budeme *definovat* jako prostor, v němž se vyskytují tyto typy geometrických chyb: Součet úhlů trojúhelníka se liší od 180 stupňů; obvod kružnice dělený číslem 2π není roven poloměru; návod na nakreslení čtverce nevede k uzavřenému obrazci. Můžete si vymyslet i jiné.

Uvedli jsme dva různé příklady zakřiveného prostoru: povrch koule a ohřátou desku. Je však zajímavé, že zvolíme-li vhodně způsob, jak se na ohřáté desce mění teplota v závislosti na vzdálenosti, budou obě *geometrie* úplně stejné. Je to zábavné. Můžeme dosáhnout toho, aby brouk na ohřáté desce dostával přesně stejné výsledky jako brouk na kouli. Těm z vás, kteří mají rádi geometrii a geometrické úlohy, poradím, jak to lze udělat. Předpokládáte-li, že délka pravítek (jako funkce teploty) je úměrná jedné plus konstanta krát druhá mocnina vzdálenosti od počátku, zjistíte, že geometrie ohřáté desky je ve všech podrobnostech přesně stejná jako geometrie koule.⁵⁸⁾

Samozřejmě existují i jiné geometrie. Mohli byste se zeptat, jaká je geometrie brouka, který žije na hrušce, tj. na povrchu, který má větší zakřivení na jednom místě a menší na jiném, takže přebytek úhlů v trojúhelníku je větší, když brouk nakreslí malý trojúhelník v jedné části svého světa, než když jej nakreslí v jiné. Jinými slovy, křivost prostoru se může od místa k místu měnit. To je jen zobecnění myšlenky zakřiveného prostoru. Totéž lze imitovat i vhodným rozdělením teploty na ohřáté desce.

Také je třeba poznamenat, že výsledky by mohly vyjít i s opačným znaménkem. Mohli byste například zjistit, že všechny trojúhelníky, když jsou velmi velké, mají součet úhlů *menší* než 180 stupňů. Možná že to zní neuvěřitelně, ale není to vůbec tak. Za prvé, mohli bychom mít ohřátou desku, jejíž teplota se vzdáleností od středu klesá. Pak by všechny pozorované efekty měly opačné znaménko. Můžeme toho však dosáhnout i čistě geometricky, podíváme-li se na dvojrozměrnou geometrii sedlového povrchu. Představte si sedlovou plochu jako na *obr. 42.13*. Nakreslete na ní „kružnici“ definovanou jako množinu bodů, které mají od středu stejnou vzdálenost. Tato kružnice je křivka, která po povrchu osciluje a vytváří vroubkovaný okraj. Její obvod je proto větší než očekávaných $2\pi r$. Takže $C/2\pi$ je nyní menší než r a nadbytečný poloměr je záporný.

Koule a hrušky apod. jsou všechno plochy s *kladnou* křivostí; ostatní se nazývají plochy se *zápornou* křivostí. Obecně dvojrozměrný svět bude mít křivost, která se mění od místa k místu a může být někde kladná a jinde záporná. Pod zakřiveným prostorem obecně chápeme takový prostor, v němž jsou zákony euklidovské geometrie porušeny, ať už je odchylka kladného nebo záporného znaménka. Velikost křivosti (definovaná, řekněme, pomocí nadbytečného poloměru) se může od místa k místu měnit.

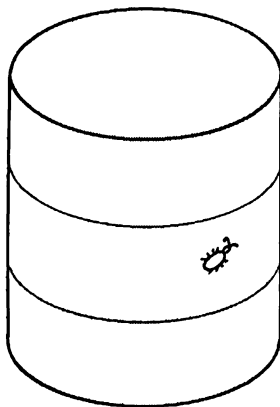


Obr. 42.13 „Kružnice“ na sedlovém povrchu

Ještě poznamenejme, že podle naší definice křivosti není válec kupodivu zakřiven. Kdyby brouk žil na povrchu válce (*obr. 42.12*), zjistil by, že trojúhelníky, čtverce a kruhy, by se chovaly jako v rovině. O tom se lze snadno přesvědčit, představíme-li si, jak by jednotlivé obrazce vypadaly, kdybychom válec rozvinuli do roviny. Pak všechny geometrické obrazce přesně korespondují s tím, co máme v rovině. Pro brouka na válci (předpokládáme, že jej neobejde dokola, ale provádí

⁵⁸⁾ S výjimkou bodu v nekonečnu.

jen lokální měření) neexistuje způsob, jak zjistit, že je jeho prostor zakřiven. V našem technickém smyslu *není* jeho prostor zakřiven. Veličina, o níž chceme hovořit, se přesněji nazývá *vnitřní křivost*, tj. křivost, kterou můžeme objevit na základě měření v lokální oblasti prostoru. (Válec má nulovou vnitřní křivost.) Právě v takovém smyslu je třeba chápat Einsteinovo tvrzení, že náš prostor je zakřiven. My jsme však definovali zakřivený prostor pouze ve dvou rozměrech; musíme postoupit dále a podívat se, jaký smysl by tento pojem mohl mít ve třech rozměrech.



Obr. 42.14 Dvojměrný prostor, jehož vnitřní křivost je nulová

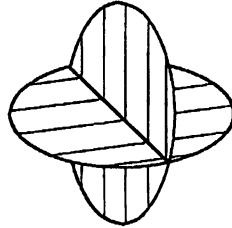
42.2 KŘIVOST V TROJROZMĚRNÉM PROSTORU

My žijeme v trojrozměrném prostoru, a proto budeme nyní zvažovat myšlenku, že je náš prostor zakřiven. Můžete namítnout: „Ale jak si dokážete představit, že je prostor v nějakém směru zakřiven?“ Pravda, prostor zakřivený v nějakém směru si představit neumíme, neboť naše představivost není dostatečná. (Možná, že je dobře, že si neumíme představit příliš mnoho věcí, takže se alespoň neodtrhneme od reálného světa.) Ale křivost můžeme definovat, aniž bychom z našeho trojrozměrného světa vyšli. To, o čem jsme hovořili ve dvou rozměrech, bylo jen rozvíčkou na to, abychom mohli zavést definici křivosti, která nevyžaduje náš „pohled zvenku“.

To, zda náš svět zakřiven je nebo není, můžeme určit způsobem, který je analogický tomu, co používali naši dřentlmeni na kouli nebo na ohřáté desce. Možná, že nedokážeme rozlišit dva takové případy, ale jistě můžeme zjistit rozdíl mezi těmito případy a plochým, nezakřiveným prostorem. Dokonce velmi snadno. Nakreslíme trojúhelník a změříme úhly. Nebo vytvoříme velkou kružnici a změříme její obvod a poloměr. Nebo zkusíme vytvořit přesné čtverce, případně krychli. V každém případě zkoumáme, zda platí zákony geometrie. Jestliže neplatí, prohlásíme náš prostor za zakřivený. Nakreslíme-li velký trojúhelník a zjistíme, že součet jeho úhlů překračuje 180 stupňů, můžeme říci, že náš prostor je zakřiven. Ne-li změřený poloměr kružnice roven jejímu obvodu dělenému číslem 2π , můžeme prohlásit, že náš prostor je zakřiven.

Jistě si všimnete, že situace ve třech rozměrech může být mnohem složitější než ve dvou. Na libovolném místě ve dvou rozměrech má křivost určitou velikost. Ale ve třech rozměrech může mít křivost *několik složek*. Nakreslíme-li trojúhelník v nějaké rovině, výsledek může být jiný, než když orientujeme rovinu trojúhelníka jiným způsobem. Nebo vezměme jako příklad kružnici. Představte si, že nakreslíme kružnici, změříme její poloměr a zjistíme, že se neshoduje s $C/2\pi$,

takže tu je nějaký nadbytečný poloměr. Pak nakreslíme jinou kružnici pod pravým úhlem (obr. 42.15). Není důvod, proč by nadbytek měl být stejný v případě obou kružnic. Ve skutečnosti v případě kružnice v jedné rovině může být nadbytek kladný a ve druhé rovině záporný (úbytek).



Obr. 42.15 Nadbytečný poloměr může být různý u kružnic s různými orientacemi

Možná, že přemýšlíte o lepším nápadu: nemůžeme se zbavit všech složek tak, že ve třech rozměrech použijeme kouli? Povrch koule můžeme definovat jako množinu bodů, které jsou od daného bodu v prostoru stejně vzdáleny. Velikost povrchu pak můžeme změřit tak, že na ni položíme jemnou pravouhlou mřížku a sečteme všechny malé plošky. Podle Euklida má být celková plocha S 4π krát druhá mocnina poloměru; „předpovídaný“ poloměr tedy můžeme definovat jako $\sqrt{S/4\pi}$. Poloměr však můžeme změřit také přímo tak, že provrtáme díru do středu a změříme jeho vzdálenost. Opět můžeme od změřeného poloměru odečíst předpovídaný poloměr a rozdíl nazvat nadbytkem poloměru:

$$r_{\text{nadb}} = r_{\text{naměř}} - \left(\frac{\text{změřený povrch}}{4\pi} \right)^{1/2},$$

což by mohlo být dobrou mírou křivosti. Má tu velkou výhodu, že nezávisí na tom, jak zorientujeme trojúhelník nebo kruh.

Ale nadbytečný poloměr koule má i nevýhodu: necharakterizuje prostor úplně. Udává pouze *střední křivost* trojrozměrného světa, protože průměruje přes různé křivosti. Jelikož je to jen průměr, neřeší úplně problém, jaká je geometrie prostoru. Znáte-li pouze toto číslo, nemůžete předpovědět všechny vlastnosti geometrie prostoru, neboť nedokážete říci co se stane s kružnicemi, které mají různou orientaci. Úplná definice vyžaduje zadání šesti hodnot křivosti v každém bodě. Matematici samozřejmě vědí, jak tato čísla vypočítat. Jednou si v matematické knize můžete přečíst, jak je všechny zapsat v elegantním a dokonalém tvaru, ale nejdříve je lepší zhruba pochopit, o čem to vlastně budete psát. Pro to, co je naším cílem v naší kapitole, většinou vystačíme se střední křivostí.⁵⁹⁾

59) Pro úplnost je třeba zmínit ještě jednu okolnost. Jestliže chcete přenést model zakřiveného prostoru jako ohřátou desku do tří rozměrů, musíte si představit, že délka pravítka závisí nejen na místě, ale i na orientaci, kterou má když jej přiložíte. Je to zobecnění jednoduchého případu, kdy délka pravítka závisí jen na místě, ale je stejná jestliže má směr ze severu na jih, z východu na západ, nebo shora dolů. Toto zobecnění je nevyhnutelné, chcete-li pomocí tohoto modelu reprezentovat trojrozměrný prostor s libovolnou geometrií, ačkoliv to shodou okolností nebylo třeba ve dvou rozměrech.

42.3 NÁŠ PROSTOR JE ZAKŘIVEN

Nyní přichází na řadu nejdůležitější otázka. Je pravda, že náš fyzikální trojrozměrný svět, v němž žijeme je opravdu zakřiven? Od okamžiku, kdy mají lidé dost představivosti, aby si uvědomili, že prostor může být zakřiven, je lidský duch zvědavý, zda je skutečný svět zakřiven nebo ne. Mnozí uskutečnili přímá geometrická měření, ale nezjistili žádné odchylky. Na druhou stranu, na základě úvah o gravitaci objevil Einstein, že prostor *je opravdu* zakřiven. Řekneme si, jaký je Einsteinův zákon pro hodnotu křivosti, a také něco o tom, jak k němu dospěl.

Einstein zjistil, že prostor je zakřiven a hmota je zdrojem křivosti. (Hmota je také zdrojem gravitace, takže gravitace souvisí s křivostí, ale k tomu se ještě v této kapitole vrátíme.) Předpokládejme, abychom si problém zjednodušili, že hmota je spojitě rozložena s určitou hustotou, která se však podle potřeby může od místa k místu měnit.⁶⁰⁾ Einsteinovo pravidlo pro výpočet křivosti je následující. Máme-li oblast prostoru, v níž se nachází hmota, a v ní vybereme dostatečně malou kouli, takže hustota hmoty ρ v ní je v podstatě konstantní, je *nadbytečný poloměr* koule úměrný množství hmoty v kouli. Podle definice nadbytečného poloměru platí

$$\text{nadbytečný poloměr} = \sqrt{\frac{S}{4\pi}} - r_{\text{naměř}} = \frac{\kappa}{3c^2} \cdot M, \quad (42.3)$$

kde κ je Newtonova gravitační konstanta, c je rychlost světla a $M = 4\pi\rho r^3/3$ je hmotnost látky uvnitř koule. To je Einsteinův vztah pro střední křivost prostoru.

Vezměme si jako příklad náš Zemi a zapomeňme, že její hustota se od bodu k bodu mění, abychom nemuseli počítat žádné integrály. Předpokládejme, že bychom její povrch změřili velmi pečlivě, a pak vykopali díru do středu a změřili její poloměr. Z velikosti povrchu bychom mohli vypočítat předpovídaný poloměr tak, že bychom povrch brali jako $4\pi r^2$. Pokud bychom porovnali předpovídaný poloměr se skutečným, zjistili bychom, že skutečný poloměr převyšuje předpovídaný o hodnotu, kterou udává vztah (42.3). Konstanta $\kappa/3c^2$ je rovna asi $2,5 \cdot 10^{-28} \text{ m} \cdot \text{kg}^{-1}$, takže na každý kilogram látky, je odchylka naměřeného poloměru $2,5 \cdot 10^{-28} \text{ m}$. Dosadíme-li hmotnost Země, která je přibližně $6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ vyjde, že zemský poloměr je asi o 1,5 mm větší, než by měl odpovídat velikosti jejího povrchu.⁶¹⁾ Pokud byste stejný výpočet zopakovali pro Slunce, zjistili byste, že poloměr Slunce je o půl kilometru větší, než by měl být.

Všimněte si, že zákon říká, že *střední* křivost *nad* povrchem země je nulová. To však *neznamená* že všechny složky křivosti jsou nulové. I nad Zemí může být – a ve skutečnosti je – určité zakřivení. V případě kružnice v rovině bude existovat nadbytečný poloměr jednoho znaménka při jistých orientacích roviny a opačného znaménka při jiných. Pouze průměr přes kouli vychází nulový, když se *uvnitř* nenachází žádná látka. Shodou okolností se ukazuje, že existuje vztah mezi různými složkami křivosti a *změnami* průměrné křivosti od místa k místu. Tudíž znáte-li průměrnou křivost v celém prostoru můžete detailně vypočítat křivost v každém bodě. Střední křivost nad zemí se mění s výškou, takže i tam je prostor zakřiven. A právě toto zakřivení se nám jeví jako gravitační síla.

Představme si brouka na rovině. Nechť na povrchu roviny existují drobné „puchýřky“. Kdykoliv brouk narazí na „puchýřek“ usoudí, že jeho prostor má malou lokální oblast zakřivení. Něco

⁶⁰⁾ Nikdo (dokonce ani Einstein) neví, jak postupovat, je-li hmota soustředěna do bodů.

⁶¹⁾ Přibližně, neboť hustota není nezávislá na poloměru, jak jsme předpokládali.

podobného máme ve třech rozměrech. Všude, kde se nacházejí shluky látky, má náš trojrozměrný prostor lokální zakřivení – jakýsi trojrozměrný „puchýřek“.

Vytvoříte-li na rovině mnoho hrbolů, může být jejich výsledkem vedle všech „puchýřků“ i globální křivost – prostor může vypadat jako koule. Bylo by zajímavé vědět, zda má náš prostor takovou výslednou průměrnou křivost, jakož i lokální „puchýřky“ v důsledku shluků hmoty, jakými jsou například Země a Slunce. Astrofyzikové hledají odpověď na tuto otázku na základě měření galaxií ve velkých vzdálenostech. Například, liší-li se počet galaxií, který vidíme v kulové slupce ve velké vzdálenosti, od našich očekávání na základě velikost poloměru slupky, máme míru nadbytečného poloměru obrovské koule. Existuje naděje, že na základě takovýchto měření můžeme zjistit, je-li náš vesmír jako celek v průměru plochý nebo zakřivený, zda je „uzavřený“ (jako koule) nebo „otevřený“ (jako rovina). Možná, že jste něco slyšeli o debatách, které se na toto téma vedou. Diskutuje se velmi, neboť astronomická měření jsou stále ještě zcela nekonkluzivní; experimentální údaje nejsou dost přesné, aby poskytly definitivní odpověď. Bohužel, nemáme ani nejmenší představu o tom, jaká je globální křivost našeho Vesmíru.

42.4 GEOMETRIE V ČASOPROSTORU

Nyní musíme něco říci o čase. Jak víte ze speciální teorie relativity, měření v prostoru a měření v čase navzájem souvisí. A bylo by trochu bláznivé, kdyby se něco dělo s prostorem, přičemž čas by v tom nehrál určitou úlohu. Pamatujete si, že měření času závisí na rychlosti, jakou se pohybujete. Například pozorujeme-li chlapíka, který kolem nás proletí v raketě, vidíme, že u něj vše probíhá pomaleji než u nás. Řekněme, že se vydá na cestu a vrátí se *podle našich hodin* přesně za 100 sekund; jeho hodiny mohou ukazovat, že byl pryč jen 95 sekund. Ve srovnání s našimi běžely jeho hodiny, jakž i jiné procesy, např. úder srdce, pomaleji.

Všimněme si zajímavého problému. Předpokládejme, že vyjste ten chlapík v raketě. Požádáme vás, abyste vystartovali na daný signál a vrátili se do výchozího místa přesně včas, abyste stihli další signál – řekněme přesně o 100 sekund později podle *našich* hodin. A také od vás chceme, abyste výlet uskutečnili tak, aby *vaše* hodiny ukazovaly co nejdelší *uplynulý* čas. Jak se máte pohybovat? Měli byste zůstat stát. Pohnete-li se, vaše hodiny budou ukazovat po návratu méně než 100 sekund.

Ale předpokládejme, že úlohu trochu změním. Požádáme vás, abyste vyšli z bodu A na daný signál a dorazili do bodu B (oba body se vůči vám nepohybují), a to tak, že se vrátíte přesně v okamžiku druhého signálu (řekněme o 100 sekund později podle našich nehybných hodin). A opět se po vás chce, abyste výlet uskutečnili tak, že po návratu budou vaše hodinky ukazovat co nejvyšší hodnotu. Jak byste to udělali? Pro jakou trajektorii a jaký jízdní řád budou *vaše* hodiny ukazovat při příchodu největší uplynulý čas? Odpověď je, že z *vašeho* hlediska bude výlet nejdelší, uskutečníte-li ho stálou rychlostí po přímce. Důvod je ten, že každý pohyb navíc a každý vzrůst rychlosti zpomalí vaše hodiny. (Jelikož časové rozdíly závisejí na druhé mocnině rychlosti, to, co ztratíte příliš rychlým pohybem na jednom místě, nikdy nedoženete velmi pomalým pohybem na místě jiném.)

Motiv celé této diskuze spočívá v tom, že tento nápad můžeme využít k definici úsečky v časoprostoru. Analogem prostorové úsečky v časoprostoru je *pohyb* konstantní rychlostí v konstantním směru.

Křivce s nejmenší délkou v prostoru neodpovídá v časoprostoru dráha s nejkratším, ale s *nejdelším* časem, v důsledku zábavných věcí, které se dějí se znaménky časových členů v teorii relativity. Pohyb „po přímce“ – analog „konstantní rychlostí na přímce“ – je tedy ten pohyb, který

přeneseme hodiny z jednoho místa v jednom čase na jiné místo v jiném čase tak, že údaj na hodinách ukáže nejdelší uplynulý čas. To bude naše definice analogu úsečky v časoprostoru.

42.5 GRAVITACE A PRINCIP EKVIVALENCE

Jsmo připraveni přejít k zákonům gravitace. Einstein usiloval o vytvoření teorie gravitace, jež by byla ve shodě s teorií relativity, kterou vytvořil dříve. Snažil se marně do té doby, než se zachytil principu, který jej dovedl ke správným zákonům. Tento princip je založen na myšlence, že padá-li nějaký předmět volným pádem, vše se v něm zdá být ve stavu bez tíže. Například družice na oběžné dráze padá volně v poli zemské přitažlivosti a proto se v něm astronaut cítí bez tíže. Tato myšlenka, zformulovaná podstatně přesněji, se nazývá *Einsteinův princip ekvivalence*. Souvisí se skutečností, že všechna tělesa padají se stejným zrychlením bez ohledu na jejich hmotnost a na to, z čeho se skládají. Pohybuje-li se raketa bez motorů, tj. vlastně volným pádem, a v ní se nachází člověk, zákony, které řídí pád člověka i rakety jsou stejné. Přemístí-li se do středu rakety, zůstane tam. *Vzhledem k raketě nepadá*. To máme na mysli, když říkáme, že je v beztláčeném stavu.

Dále si představte, že jste v raketě, která se pohybuje se zrychlením. Se zrychlením vzhledem k čemu? Řekněme, že její motory jsou zapnuty a vytvářejí tah, takže raketa nepluje volným pádem. Také si představte, že jste daleko v prázdném prostoru, takže na raketu nepůsobí prakticky žádné gravitační síly. Je-li zrychlení rakety právě g , dokážete stát na její podlaze a cítíte svou normální tíhu. Pustíte-li míč, bude padat na podlahu. Proč? Protože raketa se zrychluje směrem nahoru, ale míč necítí žádné síly, a proto nezrychluje a setrvává. Uvnitř rakety se zdá, že míč má zrychlení g směrem dolů.

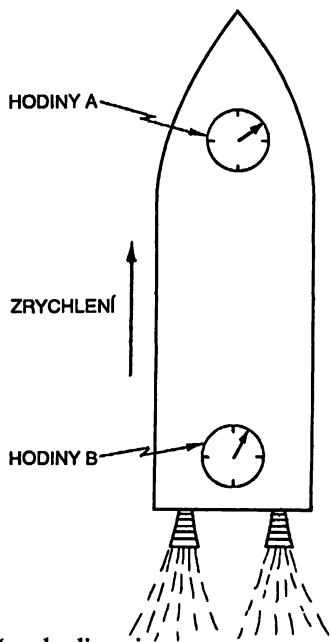
Tuto situaci porovnejme s tím, co se děje v raketě, která klidně odpočívá na povrchu Země. *Vše je stejné!* Přitahuje nás to k Zemi, míč padá se zrychlením g atd. Skutečně, jak můžete uvnitř rakety usoudit, zda sedíte na Zemi, nebo se zrychluje ve volném prostoru? Podle Einsteinova principu ekvivalence neexistuje způsob jak rozlišit obě situace, provádíte-li měření toho, co se děje uvnitř rakety!

Abychom byli zcela přesní, platí to jen pro jeden bod uvnitř rakety. Gravitační pole Země není přesně homogenní, takže míč, který padá volným pádem, má na různých místech trochu jiná zrychlení – mění se jejich směr i velikost. Ale představte-li si absolutně homogenní gravitační pole, bude takové pole dokonalé a v každém ohledu imitováno systémem s konstantním zrychlením. To je základ principu ekvivalence.

42.6 CHOD HODIN V GRAVITAČNÍM POLI

Princip ekvivalence využijeme k výpočtu zajímavého jevu, k němuž dochází v gravitačním poli. Ukážeme vám, jaká věc se stává v raketě. Zřejmě byste něco podobného v gravitačním poli neočekávali. Umístíme jedny hodiny do „hlavy“ rakety, tj. do jejího předního konce, a stejné hodiny do jejího „ocasů“, jako na *obr. 42.16*. Nazvěme tyto hodiny *A* a *B*. Porovnáme-li údaje obou hodin, když raketa zrychluje, zdá se, že přední hodiny jdou rychleji než hodiny zadní. Abyste se o tom přesvědčili, představte si, že přední hodiny vysílají záblesk světla každou sekundu a že vy sedíte v ocasu a porovnááte příchod záblesků světla s tikáním hodin *B*. Řekněme, že se raketa nachází v poloze *a* na *obr. 42.17*, když hodiny *A* vyšlou záblesk, a v poloze *b*, když záblesk dojde k hodinám *B*. Později bude raketa v poloze *c*, když hodiny *A* vyšlou další záblesk, a v poloze *d*, když uvidíte jeho příchod k hodinám *B*.

První záblesk projde vzdálenost L_1 , zatímco druhý kratší vzdálenost L_2 . Vzdálenost je kratší, neboť raketa se zrychluje a v okamžiku druhého záblesku má vyšší rychlost. Vidíte, že pokud byly oba záblesky z hodin A vyslány s jednosekundovým časovým posunem, dojdou k hodinám B oddělené intervalem kratším než sekunda, neboť druhý záblesk na cestě stráví kratší dobu.

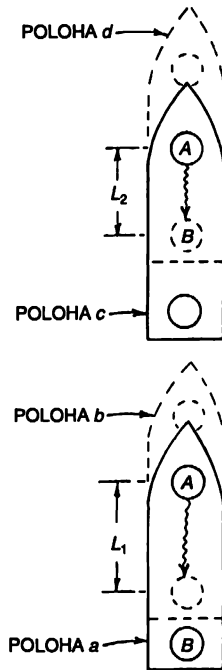


Obr. 42.16 Zrychlující raketa se dvěma hodinami

Totéž se bude dít s pozdějšími záblesky. Kdybyste tedy seděli v ocasu, dospěli byste k závěru, že hodiny A běží rychleji než B. Pokud byste provedli celou věc naopak, nechali hodiny B vyslat světlo a pozorovali jej u hodin A, zdálo by se vám, že hodiny B běží *pomaleji* než A. Vše souhlasí a není na tom nic záhadného.

Nyní si představte, že raketa je v klidu na zemském povrchu. *Děje se totéž.* Sedíte-li s jedněmi hodinami na podlaze a pozorujete druhé, které leží na vysoké polici, zdá se, že běží rychleji než hodiny na podlaze! Řeknete: „To není správně. Časy musí být stejné. V případě bez zrychlení není důvod proč by hodiny neměly jít stejně.“ Musí to však tak být, platí-li princip ekvivalence. Einstein trval na tom, že princip je správný a postupoval odvážně vpřed. Prohlásil, že hodiny na různých místech v gravitačním poli musí zdánlivě jít různými rychlostmi. Jdou-li však vždy *zdánlivě* vzhledem k sobě různou rychlostí, pak vzhledem k prvním hodinám druhé opravdu jinou rychlostí jdou.

Ted' vidíte, že tu máme s hodinami analogickou situaci jako se zahřátým pravítkem, o kterém jsme mluvili dříve, když jsme si všimli brouka na zahřáté desce. Představovali jsme si, že pravítka i brouci a vůbec vše se měnilo stejným způsobem při změně teploty, takže brouci nikdy nemohli zjistit, že jejich měřicí pomůcky se změnily při pohybu po ohřáté desce. Podobné je to v případě hodin v gravitačním poli. Každé hodiny, které umístíme na vyšší úroveň, běží viditelně rychleji. Tlukot srdce je rychlejší, všechny procesy probíhají rychleji.



Obr. 42.17 Hodiny v přední části zrychlující rakety běží zdánlivě rychleji než hodiny v zadní části.

Pokud by to tak nebylo, mohli byste odlišit gravitační pole od zrychlující vztázně soustavy. Představa, že čas se může od místa k místu měnit, není jednoduchá, ale právě tuto představu Einstein použil, a – věřte nebo nevěřte – je správná.

Pomocí principu ekvivalence můžeme vypočítat, jak se mění rychlost hodin v gravitačním poli s výškou. Stačí vypočítat zdánlivou odchylku mezi dvěma hodinami ve zrychlující se raketě. Nejsnáze to můžeme provést pomocí výsledku pro Dopplerův jev, který jsme odvodili v kapitole 34 prvního dílu. Tam jsme zjistili (viz vztah (34.14)), že je-li v relativní rychlost zdroje a přijímače, souvisí zachycená frekvence ω s vyslanou frekvencí ω_0 podle vztahu

$$\omega = \omega_0 \frac{1 + v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (42.4)$$

Zamyslíme-li se nyní nad zrychlující se raketou na obr. 42.17, vidíme, že vysílač i přijímač se pohybují v každém okamžiku stejnými rychlostmi. Ale za čas, za který projde světelný signál od hodin A k B, se raketa zrychlila. Ve skutečnosti nabyla dodatečnou rychlost gt , přičemž g je zrychlení a t je čas, za který světlo urazí vzdálenost H z A do B. Tento čas je velmi blízký H/c .

Dojde-li tedy signál k B, zvýšila raketa svou rychlost o gH/c . Přijímač má takovou rychlost vždy vůči rychlosti vysílače v okamžiku, kdy ho signál opustil. To je tedy rychlost, kterou musíme dosadit do vztahu (42.4) pro Dopplerův posun. Předpokládáme-li, že zrychlení a délka kosmické lodi jsou dostatečně malé, takže tato rychlost je mnohem menší než c , můžeme zanedbat členy řádu v^2/c^2 . Vyjde nám

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{gH}{c^2} \right). \quad (42.5)$$

V případě dvou hodin v raketě platí vztah

$$\left(\begin{array}{c} \text{frekvence hodin} \\ \text{přijímače} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{frekvence hodin} \\ \text{vysílače} \end{array} \right) \cdot \left(1 + \frac{gH}{c^2} \right), \quad (42.6)$$

přičemž H je výška vysílače nad přijímačem.

Na základě principu ekvivalence musí platit stejný vztah v případě dvojích hodin oddělených výškovým rozdílem H v gravitačním poli se zrychlením volného pádu g .

To je natolik důležitá myšlenka, že bychom vám chtěli dokázat, že vyplývá i z jiného zákona fyziky – ze zákona zachování energie. Víme, že gravitační síla, která působí na těleso, je úměrná její hmotnosti M , která je ve vztahu k celkové vnitřní energii E , $M = E/c^2$. Například hmotnosti jader určené z energií jaderných reakcí, při nichž dochází k přeměně jader, souhlasí s hmotnostmi získanými z atomových hmotností.

Nyní si představme atom, jehož nejnižší energetický stav má celkovou energii E_0 a vyšší stav energii E_1 a který může přejít ze stavu E_1 do stavu E_0 emitováním světla. Frekvence ω tohoto světla bude dána vztahem

$$\hbar \omega = E_1 - E_0 \quad (42.7)$$

Nechť je takový atom původně na podlaze a přeneseme jej odtud do výšky H . Musíme přitom vykonat práci, která je potřebná k přesunu hmotnosti $m_1 = E_1/c^2$ proti směru působení gravitační síly. Vykonaná práce je

$$\frac{E_1}{c^2} gH. \quad (42.8)$$

Pak necháme atom vyslat foton a přejít do nižšího energetického stavu E_0 . Poté atom přeneseme zpět na podlahu. Při návratu je hmotnost E_0/c^2 ; zpět získáme energii

$$\frac{E_0}{c^2} gH, \quad (42.9)$$

takže jsme vykonali celkovou práci

$$\Delta W = \frac{E_1 - E_0}{c^2} gH. \quad (42.10)$$

Když atom emitoval foton, odevzdal energii $E_1 - E_0$. Představte si, že se foton náhodou vrátí na podlahu a byl absorbován. Kolik energie by odevzdal? V prvním okamžiku byste si mohli myslet, že by odevzdal energii $E_1 - E_0$. To však nemůže být pravda, zachovávali se energie. Na začátku jsme měli energii E_1 na podlaze. Na konci je energie na úrovni podlahy součtem energie E_0 atomu v nižším stavu a energie E_{fot} absorbovaného fotonu. Mezi tím jsme však museli dodat dodatečnou energii ΔW podle vztahu (42.10). Zachovávali se energie, musí být energie, s níž skončíme na podlaze, větší než počáteční energie o hodnotu vykonané práce. Musí platit

$$E_{\text{fot}} + E_0 = E_1 + \Delta W \quad (42.11)$$

neboli

$$E_{\text{fot}} = E_1 - E_0 + \Delta W.$$

Musí to být tak, že foton na úroveň podlahy *nedopadne* jen s energií $E_1 - E_0$, s níž byl vyslán, ale s *o něco větší energií*. Jinak by se nějaká energie ztratila. Dosadíme-li do rovnice (42.11) ΔW z rovnice (42.10), vyjde nám, že foton dopadne na úroveň podlahy s energií

$$E_{\text{tot}} = (E_1 - E_0) \left(1 + \frac{gH}{c^2} \right). \quad (42.12)$$

Ale foton s energií E_{tot} má frekvenci $\omega = E_{\text{tot}}/\hbar$. Označíme-li frekvenci *vyslaného* fotonu ω_0 (musí být podle (42.7) rovna $(E_1 - E_0)/\hbar$), náš výsledek (42.12) vede opět ke vztahu (42.5) mezi frekvencí fotonu absorbovaného na podlaze a frekvencí s jakou byl vyslán.

Stejný výsledek můžeme získat ještě jinak. Foton s frekvencí ω_0 má energii $E_0 = \hbar\omega_0$. Jelikož energii E_0 odpovídá gravitační hmotnost E_0/c^2 , má foton hmotnost (*ne klidovou hmotnost!*) $\hbar\omega_0/c^2$ a je „přitahován“ k Zemi. Při pádu z výšky H získá dodatečnou energii $(\hbar\omega_0/c^2)gH$, takže dopadne s energií

$$E = \hbar\omega_0 \left(1 + \frac{gH}{c^2} \right).$$

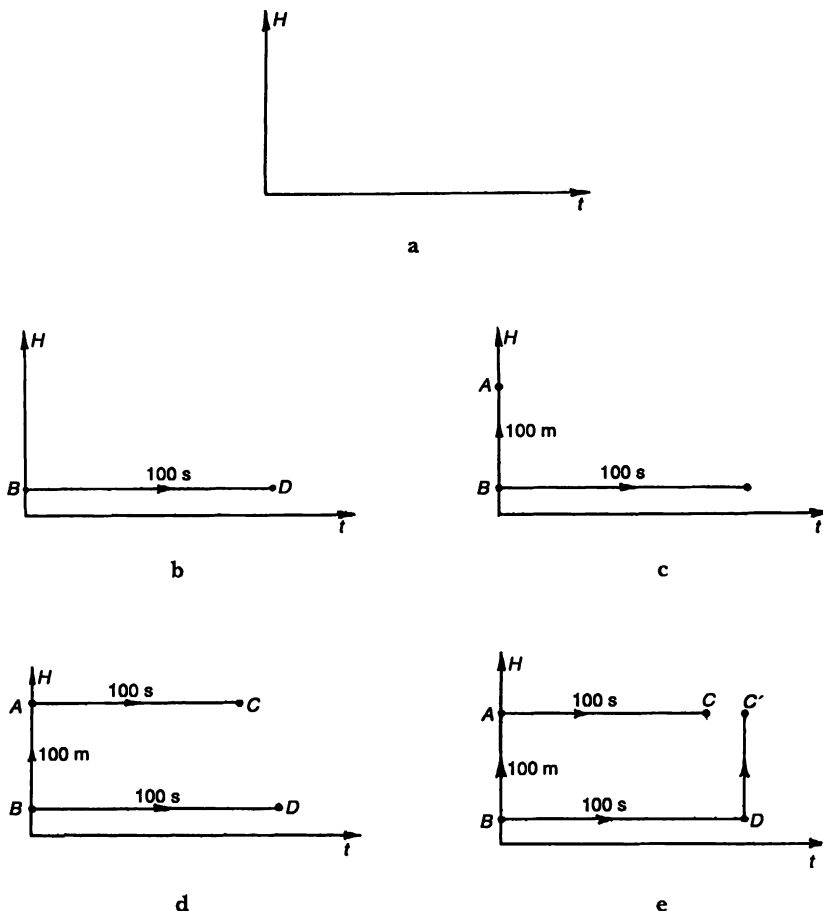
Jeho frekvence po pádu je E/\hbar , což opět vede k výsledku (42.5). Naše představy o relativitě, kvantové fyzice a zachování energie navzájem souhlasí pouze tehdy, jsou-li Einsteinovy předpovědi o hodinách v gravitačním poli správné. Změny frekvence, o nichž hovoříme, jsou obvykle velmi malé. Například při rozdílu výšek 20 metrů u zemského povrchu je rozdíl frekvencí přibližně jen $2 \cdot 10^{-15}$. Právě takovou změnu se však podařilo experimentálně změřit pomocí Mössbauerova jevu.⁶²⁾ Einstein měl úplnou pravdu.

42.7 KŘIVOST ČASOPROSTORU

Nyní bychom chtěli vše, o čem jsme hovořili, dát do souvislosti s představou o zakřiveném časoprostoru. Už jsme poznamenali, že běží-li čas různými rychlostmi na různých místech, je to analogické se zakřiveným prostorem ohřáté desky. Je to však víc než analogie; znamená to, že časoprostor je *opravdu* zakřiven. Pokusme se o trochu geometrie v časoprostoru. Na první pohled to může vypadat zvláštně, ale vždyť jsme už mnohokrát kreslili časoprostorové diagramy se vzdálenostmi nanesenými na jednu osu a časem na druhou. Zkusme vytvořit pravouhelník v časoprostoru. Nejprve nakreslíme graf výšky H v závislosti na čase t jako na *obr. 42.18a*. Abychom vytvořili základnu našeho pravouhelníku, vezmeme si předmět, který je *v klidu* ve výšce a budeme sledovat jeho světočáru 100 sekund. Získáme tak úsečku BD v části *b* obrázku, která je rovnoběžná s osou t . Nyní si vezmeme další předmět, který je v čase $t=0$ 100 metrů nad prvním. Vyjde z bodu A na *obr. 42.18c*. Nyní sledujme jeho světočáru po dobu 100 sekund, kterou měříme pomocí hodin v bodě A . Předmět projde z bodu A do C jak znázorňuje část *d* obrázku. Všimněte si však, že v důsledku toho, že hodiny v různých výškách jdou různou rychlostí (předpokládáme přítomnost gravitačního pole), body C a D nejsou současné. Pokusíme-li se doplnit pravouhelník úsečkou do bodu C' , který leží 100 metrů nad bodem D ve stejném čase (*obr. 42.18e*) obrazec se neuzavře. Právě toto máme na mysli, když říkáme, že časoprostor je zakřiven.

62)

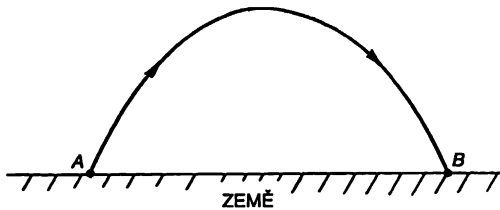
R. V. Pound a G. A. Rebka, Jr., Physical Review Letters, sv. 4, str. 337 (1960).



Obr. 42.18 Pokus vytvořit pravouhelník v časoprostoru

42.8 POHYB V ZAKŘIVENÉM ČASOPROSTORU

Podívejme se na zajímavou hádanku. Máme dvojici identických hodin, A a B , které leží na povrchu Země jako na obr. 42.19. Zvedneme hodiny A do nějaké výšky H , chvíli je tam podržíme a opět vrátíme na Zem, právě ve chvíli, kdy druhé hodiny B ušli o 100 sekund. Hodiny A ukáží řekněme 107 sekund, neboť nahoře ve vzduchu běžely rychleji. Tady je naše hádanka: Jak máme pohybovat hodinami A aby ukazovaly co nejvyšší hodnotu uplynulého času, za předpokladu, že se vrátí, když hodiny B ukazují 100 sekund? Řeknete si: „To je snadné. Jednoduše zvedneme hodiny A co nejvýše. Tam poběží nejrychleji, tudíž uplyne nejvíce času, než se vrátí.“ To je ale chyba. Na něco jste zapomněli – na cestu vzhůru a dolů máme jen 100 sekund. Vyrázíme-li velmi vysoko, musíme se vrátit velmi rychle, abychom prošli tam a zpět za 100 sekund. A nesmíte zapomenout na efekt speciální relativity, který způsobuje, že se pohybující hodiny zpomalí $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ -krát. Tento relativistický jev způsobuje, že hodiny A ukazují *menší* čas než hodiny B . Vidíte, že tu máme zajímavou hru.



Obr. 42.19 V homogenním gravitačním poli je trajektorie s maximálním vlastním časem při dané hodnotě uplynulého času parabolou

Nebudeme-li hodinami A hýbat, dostaneme 100 sekund. Přesuneme-li je do malé výšky a pomalu se vrátíme, získáme o trochu více než 100 sekund. Posuneme-li je o kousek výše, získáme možná ještě o trochu víc. Posuneme-li je příliš vysoko, musíme se pohybovat rychle, a tak zpomalit naše hodiny na tolik, že se vrátíme s méně než 100 sekundami. Jaký jízdní řád, jaká závislost výšky na čase, nám dá nejvyšší možnou hodnotu na hodinách A ? Jak vysoko se máme posunout, jakou pečlivě vybranou rychlostí se tam máme dostat, abychom se k hodinám B vrátili právě v okamžiku, kdy na nich uplyne 100 sekund?

Odpověď je následující. Vypočítejte, jak rychle musíte vyhodit míč směrem vzhůru do vzduchu, aby na zem dopadl přesně za 100 sekund. Pohyb míče – nejprve rychlý vzestup, zpomalení, zastavení a zpětný návrat na zem – jsou tím pravým pohybem, který maximalizuje čas, který uplyne na hodinách připevněných k míči.

Nyní si všimněme trochu jiného problému. Mějme dva body A a B na zemském povrchu v nějaké vzdálenosti od sebe. Zahrajme si stejnou hru, jako když jsme hledali „úsečku“. Ptáme se, jak se máme přesunout z A do B , aby čas na našich pohybujících se hodinách byl co největší. Předpokládáme, že z A vyrazíme na daný signál a do B dojdeme současně s jiným signálem, o němž podle nehybných hodin víme, že je posunut o 100 sekund. Nyní řeknete: „Vždyť jsme zjistili, že je třeba se pohybovat po přímce konstantní rychlostí zvolenou tak, abychom do B dorazili přesně o 100 sekund později. Nebudeme-li se pohybovat po přímce, budeme muset jít vyšší rychlostí a to zpomalí naše hodiny.“

Ale počkejte. Tehdy jsme nebrali v úvahu gravitaci. Není lepší se pohybovat chvíli vzhůru po zakřivené dráze a pak klesat dolů? Tak strávíme část času ve výšce, kde naše hodiny poběží rychleji. Opravdu je tomu tak. Vyřešíte-li matematickou úlohu, jak zvolit křivku pohybu tak, aby čas, který uplyne na pohybujících se hodinách, byl co největší, zjistíte, že pohyb probíhá po parabole – po téže křivce, po níž se pohybuje těleso při šikmém vrhu v gravitačním poli (obr. 42.19). Proto můžeme zákon pohybu v gravitačním poli formulovat i takto: *Těleso se vždy pohybuje z místa na místo po takové trajektorii, že hodiny s ním spojené ukazují delší čas, než na kterékoliv jiné možné trajektorii, samozřejmě, při stejných počátečních a konečných podmínkách.* Čas, který měří pohybující se hodiny, se často nazývá jejich *vlastním časem*. Při volném pádu trajektorie maximalizuje vlastní čas tělesa.

Podívejme se, jak se k tomu všemu dojde. Vyjdeme z rovnice (42.5), která říká, že nadbytečná rychlost chodu pohybujících se hodin je

$$\frac{\omega_0 g H}{c^2}. \quad (42.13)$$

Kromě toho si musíme pamatovat, že existuje i korekce opačného znaménka v důsledku rychlosti. U tohoto jevu víme, že

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Ačkoliv zákon platí pro libovolnou rychlost, všimneme si případu, kdy jsou rychlosti mnohem menší než c . Pak můžeme rovnici zapsat jako

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} \right)$$

a úbytek rychlosti chodu hodin je

$$-\omega_0 \frac{v^2}{2c^2}. \quad (42.14)$$

Složíme-li oba členy (42.13) a (42.14), zjistíme, že

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{c^2} \left(gH - \frac{v^2}{2} \right). \quad (42.15)$$

Takový posun frekvence našich pohybujících se hodin znamená, že změříme-li čas dt na nehybných hodinách, hodiny v pohybu zaznamenají čas

$$dt \left[1 + \left(\frac{gH}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} \right) \right]. \quad (42.16)$$

Celkový přírůstek času podél trajektorie je integrálem nadbytečného členu podle času, tj.

$$\frac{1}{c^2} \int \left(gH - \frac{v^2}{2} \right) dt, \quad (42.17)$$

a ten má být maximální.

Člen gH je právě gravitační potenciál φ . Celou rovnici vynásobíme konstantou $-mc^2$, přičemž m je hmotnost tělesa. Konstanta nezmění podmínku maxima a záporné znaménko změni jen maximum na minimum. Rovnice (42.17) pak říká, že těleso se bude pohybovat tak, aby

$$\int \left(\frac{mv^2}{2} - m\varphi \right) dt = \text{minimum}. \quad (42.18)$$

Pod integrálem je právě rozdíl kinetické a potenciální energie. Podíváte-li se do kapitoly 19, uvidíte, že při diskuzi principu nejmenšího účinku jsme ukázali, že Newtonovy zákony pro těleso v poli potenciálu lze zapsat přesně ve tvaru rovnice (42.18).

42.9 EINSTEINOVA TEORIE GRAVITACE

Einsteinův tvar pohybových rovnic – požadavek, že vlastní čas má být v zakřiveném časoprostoru maximální – vede při nízkých rychlostech ke stejným výsledkům jako Newtonovy zákony. Při obězích kolem Země ukazovaly hodinky Gordona Coopera delší čas, než na jakékoliv jiné dráze, kterou byste si pro jeho družici dokázali představit.⁶³⁾

Zákon gravitace lze tedy pomocí geometrické představy o časoprostoru vyjádřit tímto pozoruhodným způsobem: Částice si při pohybu vyberou nejdelší vlastní čas, což je veličina, která je v časoprostoru analogem „nejkratší vzdálenosti“. Takový je zákon pohybu v gravitačním poli. Velkou výhodou takové formulace je, že nezávisí na žádných souřadnicích ani jiném způsobu specifikace situace.

Shrňme, co jsme už udělali. Zformulovali jsme dva zákony gravitace:

1. Jak se mění geometrie časoprostoru v přítomnosti hmoty: křivost vyjádřená pomocí nadbytečného poloměru je úměrná hmotnosti uvnitř koule (viz vztah (42.3)).
2. Jak se tělesa pohybují, působí-li jen gravitační síly: pohybují se tak, aby vlastní čas mezi oběma krajními body dráhy byl maximální.

Tyto dva zákony odpovídají podobným párům rovnic, s nimiž jsme se setkali dříve. Původně jsme pohyb v gravitačním poli popsali pomocí Newtonova gravitačního zákona („zákonu převráceného čtverce“) a jeho pohybových rovnic. Zákony 1 a 2 nyní zaujaly jejich místo. Náš nový pár rovnic odpovídá také tomu, co jsme viděli v elektrodynamice. Tam jsme měli zákon, soustavu Maxwellových rovnic, která určuje pole vytvářená náboji. Říká nám, jak se „prostor“ změní v důsledku přítomnosti nabitých částic; plní podobnou úlohu jako zákon 1 v gravitaci. Navíc jsme měli zákon pohybu částic v daných polích – $d(m\mathbf{v})/dt = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Tuto úlohu v gravitaci hraje zákon 2.

V zákonech 1 a 2 máte přesnou formulaci Einsteinovy teorie gravitace – ačkoliv ji obvykle najdete zformulovanou v komplikovanějším matematickém tvaru. Měli bychom však ještě něco přidat. Podobně jako se časová měřidla v gravitačním poli mění od místa k místu, mění se i měřidla délky. Právítka mění při pohybu svou délku. Jsou-li prostor a čas tak úzce svázány, není možné, aby se s časem dělo něco, co by se nějak neodráželo i v prostoru. Vezměte si nejjednodušší případ: Proletáváte kolem Země. Co je čas z vašeho hlediska, je zčásti prostor z našeho hlediska. Musí tedy docházet ke změnám v prostoru. Celý časoprostor je přítomností hmoty zakřiven, a to je složitější situace než pouhá změna časové škály. Pravidlo, které jsme uvedli ve vztahu (42.3), však postačuje k úplnému určení všech zákonů gravitace, je-li chápáno v tom smyslu, že toto pravidlo o křivosti neplatí jen z hlediska jednoho pozorovatele, ale platí obecně. Někdo, kdo prochází množstvím látky, vidí jiný obsah hmoty v důsledku kinetické energie svého pohybu; musí zahrnout hmotnost, která této energii odpovídá. Teorie musí být vytvořena tak, aby každý – bez ohledu na to, jak se pohybuje – zjistil, že nadbytečný poloměr nějaké koule je $\kappa/3 c^2$ krát celková hmotnost (nebo lépe $\kappa/3 c^4$ krát celkový obsah energie) uvnitř koule. To, že tento zákon – zákon 1 – musí platit v libovolné pohybující se soustavě, je jedním z velkých zákonů gravitace,

⁶³⁾ Přesněji je to jen lokální maximum. Raději bychom měli říci, že vlastní čas je větší než na jakékoliv blízké trajektorii. Například vlastní čas na eliptické dráze kolem Země nemusí být delší než na balistické dráze tělesa, které je vystřeleno do velké výšky a pak padá zpět.

který se nazývá *Einsteinova rovnice pole*. Druhý velký zákon 2 (tj., že věci se musí pohybovat tak, aby vlastní čas byl maximální) se nazývá *Einsteinova rovnice pohybu*.

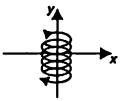
Zapsat tyto rovnice v úplném algebraickém tvaru, porovnat je s Newtonovy zákony a dát je do souvislosti s elektrodynamikou je matematicky obtížné. Ale právě tak dnes vypadají neúplnější zákony fyziky gravitace.

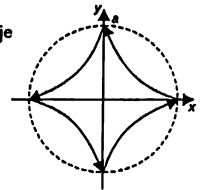
Ačkoliv nám v jednoduchém případě, který jsme zkoumali, poskytly výsledek ve shodě s Newtonovou mechanikou, není to tak vždycky. Tři odchylky, které Einstein jako první odvodil, byly potvrzeny experimentálně: 1. dráha Merkuru není nehybná elipsa; 2. světlo hvězdy se při průchodu v blízkosti Slunce ohýbá dvakrát více, než byste očekávali; 3. rychlost hodin v gravitačním poli závisí na jejich poloze. Kdykoliv se Einsteinovy předpovědi odlišily od představ Newtonovy mechaniky, příroda si volila Einsteina.

Nakonec shrňme vše, co jsme řekli, takto: Zprv, měřidel času a délky závisí na místě v prostoru, kde je měříte, a na čase. To je ekvivalentní s tvrzením, že časoprostor je zakřiven. Z naměřené velikosti povrchu koule můžeme definovat její očekávaný poloměr, $\sqrt{S/4\pi}$, ale skutečný naměřený poloměr bude větší o hodnotu, která je úměrná (konstanta úměrnosti je $\kappa/3c^2$) celkové hmotnosti, obsažené uvnitř koule. To přesně určuje stupeň zakřivení našeho časoprostoru. Křivost musí být stejná bez ohledu na to, kdo se dívá na hmotu, nebo jak se pohybuje. Za druhé, částice se pohybují v tomto zakřiveném časoprostoru po „úsečkách“ (po trajektoriích s maximálním vlastním časem). To je obsah Einsteinovy formulace zákonů gravitace.

Výsledky a návody ke cvičením

KAPITOLA 1

- 1.1 a) Gravitační přitažlivé síly a elektrické odpudivé síly klesají obě se čtvercem vzdálenosti, takže jejich poměr na vzdálenosti nezávisí. Z Newtonova gravitačního zákona a Coulombova zákona dostaneme, že pro dva protony by se tyto síly vyrovnaly, kdyby měl proton hmotnost $m = 1,9 \cdot 10^{-9}$ kg, t. j. 10^{18} krát větší než ji má ve skutečnosti.
- b) Obě mince by se odpuzovaly silou $1,7 \cdot 10^{13}$ N, což odpovídá tíže balvanu (např. asteroidu) o rozměrech asi 1×2 km.
- 1.2 Práci odhadneme jako energii dvou nabitých koulí, jejich středy se nacházejí ve vzdálenosti průměru jádra uranu. Dostaneme $W = 250$ MeV ($2,8 \cdot 10^7$ kWh/kg), projádru helia $W = 0,47$ MeV ($3,1 \cdot 10^8$ kWh/kg).
- 1.3 $v = 0,42$ m/s, $\langle v^2 \rangle / c^2 = 2 \cdot 10^{-20}$.
- 1.4 Pohyb mionu můžeme ještě považovat za nerelativistický. Z pohybové rovnice s Lorentzovou silou a podmínek $v_x = 0$, $v_y = 0$ dostaneme $B = E_x / v_z = 10^{-2}$ T. Nedá.
- 1.5 a) Z pohybových rovnic se zadanými počátečními podmínkami máme $x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$, $y = \frac{v_0}{\omega} \cos(\omega t - 1)$, $z = 0$, $\omega = \frac{qB_0}{m}$.
- b)  c) Není splněna rovnice $\text{rot } \mathbf{B} = 0$.
- 1.6 a) Součet elektrické a magnetické síly musí být roven síle odstředivé, odkud $B_0 = \frac{1}{a^2 q v_0} \left(m v_0^2 a - \frac{q q_0}{4 \pi \epsilon_0} \right)$, kde q_0 je velikost záporného náboje.
- b) Magnetické pole nekoná práci nad pohybujícím se nábojem a nemění velikost jeho rychlosti.
- c) Rychlost částice určíme ze zákona zachování energie $E = \frac{m v^2}{2} - \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q q_0}{r}$.



KAPITOLA 2

- 2.1 a) Z rovnice tepelné vodivosti a hraničních podmínek najdeme $(\nabla T)_r = \frac{T_1 - T_2}{r} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$.
- b) Určíme-li tepelný výkon Q vyvíjený na jednotce délky vodiče podle Ohmova zákona a označíme měrný odpor vodiče ρ , dostaneme hraniční podmínku na povrchu vodiče $dT/dr = -I^2 \rho / 2 \pi^2 a^2 x = A$. Zintegrujeme-li rovnici tepelné vodivosti stouho hraniční podmínkou, najdeme $T(r) = T_2 + A \ln \left(\frac{b}{r} \right)$ a $T_1 - T_2 = 2,4$ K.
- 2.2 Bez komentáře.
- 2.3 a)–e) bez komentáře, f) $\varphi = R^2/2$.
- 2.4 Bez komentáře.
- 2.5 Umístíme-li počátek souřadnic na ose rotace, dostaneme pro každý bod tělesa $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$. Aplikujeme-li pak operace divergence a rotace a použijeme vztahy vektorové analýzy z příkladu 2.3, dokážeme požadovaný výsledek.
- 2.6 Operátor ∇ působí na všechny proměnné vektory na pravé straně, takže správně musíme psát $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{R}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{R}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{R} = 2\mathbf{A}$.
- 2.7 \mathbf{h} je maximální v bodě B_1 kde má křivka největší zápornou křivost. $\nabla \times \mathbf{h} = 0$ všude.

KAPITOLA 3

- 3.1 Bez komentáře.

- 3.2 Obklopíme kouli, z níž radiálně vyletují náboje soustřednou kulovou plochou. Na této ploše vybereme libovolnou uzavřenou křivku a určíme jednak cirkulaci B podél této křivky, jednak tok B plochou obepínanou touto křivkou. Z Maxwellových rovnic zjistíme, že jak cirkulace tak tok B budou rovny nule, takže magnetické pole nevzniká.
- 3.3 a) $4\pi K$
 b) Dosazením E do Gaussova zákona dostaneme nulu, neboť $\nabla \cdot E = 0$. To ovšem platí jen pro body, pro něž je $r \neq 0$; zdrojem toku je právě náboj v počátku. c) Cirkulace vektoru E nulová.
- 3.4 Výraz, který je „prakticky bez užitku“ plyne z Gaussovy věty, uvážíme-li, že $\text{div } R = 3$ (R je polohový vektor. Má tvar $V = \frac{1}{3} \int_S R \cdot dS$).

KAPITOLA 4

- 4.1 $\varphi = \frac{r}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{r^2 + l_1^2} + l_2}{\sqrt{r^2 + l_2^2} - l_1}$. Pro velká r je $\varphi \approx \frac{r}{4\pi\epsilon_0} \frac{l_1 + l_2}{r}$, pro malá r je $\varphi \approx \frac{r}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{4l_1 l_2}{r^2}$.
- 4.2 Označíme σ plošnou hustotu náboje kotouče a integrujeme potenciál vytvářený úzkými mezikružními kotoučky, jejichž body jsou stejně vzdáleny od P . Potenciál v bodě P je $\varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + r^2} - r)$, intenzita $E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{r}{\sqrt{R^2 + r^2}}\right)$.
- 4.3 a) $\varphi = (q + q')/r$, b) mezi koulemi $E = q'/r^2$, vně vnější koule $E = (q + q')/r^2$, jinde nulové, c) $\varphi(r_a) = (q + q')/r_a + q'/r_a - q'/r_a$, d) Vně vnější koule přestane být pole sféricky symetrické, ve stěně vnější koule zůstane pole nulové.

KAPITOLA 5

- 5.1 Lze dokázat na základě úvahy o tom, že náboj rovnoměrně rozestřený na kulové ploše se navenek chová jako bodový náboj ve středu této plochy, a symetrie vzájemného působení mezi náboji.
- 5.2 Intenzita pole uvnitř objemově nabitého válce má radiální směr kolmo k ose válce a velikost $E = (Qr)/(2\pi\epsilon_0 LR^2)$, kde Q je náboj, L délka a R poloměr válce. V případě objemově nabitě koule $E = (Qr)/(4\pi\epsilon_0 R^2)$.
- 5.3 $E_1 = 2\sigma/3\epsilon_0$, $E_2 = \sigma/3\epsilon_0$.
- 5.4 Z Maxwellovy rovnice $\nabla \cdot E = \rho(x)/\epsilon_0$ dostaneme $E(x) = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho(x) dx$.
- 5.5 a) $\sigma_K = 0$, $\sigma_s = (4/3)kd^{1/3}$, b) $\rho(x) = -(4/9)k\epsilon_0 x^{-2/3}$ (známý zákon dvou třetin).
- 5.6 Malá nabitá ploška dS bude v nekonečně blízkých bodech vytvářet pole $\sigma/2\epsilon_0$, mířící na obě strany kolmo k plošce (plyne z Gaussova zákona). Protože uvnitř vodiče je pole nulové, musí ostatní náboje na povrchu vodiče vytvářet v místě plošky dS rovněž pole intenzity $\sigma/2\epsilon_0$ mířící na vnější stranu vodiče.
- 5.7 Počet nadbytečných elektronů $\Delta n = \sigma/q_e = \epsilon_0 E/q_e = 5,5 \cdot 10^8 \text{ m}^{-2}$, počet atomů je 10^{19} m^{-2} . Síla je 10^{11} krát menší než síla se strany protonu.
- 5.8 $h\omega = h \left[(82 q_e^2)/(4\pi\epsilon_0 \cdot 207 m_e \cdot 209 R_0^3) \right]^{1/2} \approx 6,1 \text{ MeV}$. (q_e , m_e jsou náboja a hmotnost elektronu, $Z = 82$ a $A = 209$ protonová a nukleonová čísla olova).
- 5.9 $T = 2\pi(R_e/g)^{1/2}$ (R_e je poloměr Země).
- 5.10 Podle analogie s elektrostatikou bychom mohli pro radiální gradient teploty napsat $dT/dr = -(Qr)/(4\pi\kappa R^3)$ a položíme-li teplotu na zemském povrchu rovnou nule, máme $T(r) = Q(R_e^2 - r^2)/(8\pi\kappa R^3)$. Ve středu Země dostáváme odhad $T(0) = 5 \cdot 10^3 \text{ K}$.
- 5.11 Elektrické pole je nenulové mezi válci: $E = \tau_1/(2\pi\epsilon_0 r)$ a vně vnějšího válce: $E = (\tau_1 + \tau_2)/2\pi\epsilon_0 r$; $\Delta\varphi = (\tau_1/2\pi\epsilon_0) \ln(r_2/r_1)$. a) ke změně nedojde, b) E se změní, $\Delta\varphi$ klesne, c) charakter pole se změní, střední hodnota pole klesne.

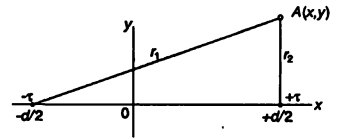
KAPITOLA 6

- 6.1 $F_x = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left[\frac{d}{(a^2 + b^2)^{3/2}} - \frac{1}{a^2} \right]$, F_y totéž se záměnou a a b , síla míří do rohu.
- 6.2 $E_k = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right)$. Při $x \rightarrow 0$ roste kinetická energie do nekonečna. Energie elektronu na vzdálenosti rovné meziatomové je řádově několik eV a je rovna výstupní práci.
- 6.3 Výpočet může být pouze aproximační, např. podle vzdálenosti od středu tyčky můžeme použít vztahy pro potenciál bodového náboje (na velkých vzdálenostech), potenciál dlouhého válce, nekonečné roviny apod. a volit konstanty tak, aby potenciál byl spojitý
- 6.4 Povrch Země by skutečně začal odpuzovat kosmické protony přibližně za 1 měsíc. Náboj Země musí být proto neustále kompenzován dopadajícími elektrony, např. při bouřkových výbojích.
- 6.5 $c_1 = 2\pi\epsilon_0/\ln(b/a)$. Bude-li výstupek na vnitřním povrchu vnějšího válce, kapacita vzroste.

- 6.6 a) Je-li apoloměr koule a ϑ úhel, který svírá průvodič bodu na povrchu koule vedený z jejího středu se spojnicí středu koule a náboje q , potom
- $$\sigma = \frac{q}{4\pi} \left[\frac{1}{ab} - \frac{b^2 - a^2}{a(a^2 + b^2 - 2ab\cos\vartheta)^{3/2}} \right]$$
- b) $F = \frac{q\varphi a}{b^2} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{ab}{(a^2 - b^2)^2}$.
- 6.7 Vnětakové koule dostaneme pole elektrického dipólu s dipólovým momentem o velikosti $p = (4\pi/3)AR^3$, uvnitř máme homogenní pole $E = -A/3\epsilon_0$, mífící proti směru dipólu.
- 6.8 a) $E_r = (2\rho\cos\vartheta)/(4\pi\epsilon_0 r^3)$, $E_\vartheta = (\rho\sin\vartheta)/(4\pi\epsilon_0 r^3)$
 b) $\operatorname{tg}\alpha = E_\vartheta/E_r = (1/2)\operatorname{tg}\vartheta$ nezávislí na r
 c) $E = (2\rho)/(4\pi\epsilon_0 r^3)$, $E = (\rho/4\pi\epsilon_0 r^3) \left(3e_r/\sqrt{2} - \rho/\rho \right)$, $E = -\rho/(4\pi\epsilon_0 r^3)$.
- 6.9 a) $\rho = 4\pi\epsilon_0 E_0 a^3$, b) $E = 3E_0 \cos\vartheta$, c) Ne , d) $\sigma = 3\epsilon_0 E_0 \cos\vartheta$, e) $\rho = 4\pi\epsilon_0 a^3 E_0$,
 f) Lze aplikovat na případ náboje indukovaného na vodivé kouli v homogenním elektrickém poli.
- 6.10 a) $F = (\tau\rho)/(2\pi\epsilon_0 r^2)$, $N = 0$.
 b) $F = 0$, $N = (\tau\rho)/(2\pi\epsilon_0 r)$, mífí kolmo k rovině vodiče a dipólu.
- 6.11 Jde o potenciál elektrické dvojvrstvy, po obou stranách desky je konstantní, na desce má nespojitost ρ/ϵ_0 .
- 6.12 a) $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{x} \right)$, b) $E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} - \frac{1}{x^2} \right]$, c) $E_x = -(3qa^2)/(8\pi\epsilon_0 x^4)$, klesá rychleji, protože dipólový moment prstence je nulový.
- 6.13 $t_1 = 1000$ s, při $t \gg t_2$ $\Delta\varphi = 1,5$ V. V prvním případě bude $t_1 = 500$ s, v druhém případě se t_1 nemění.
- 6.14 a) $E_1 = 0$, $E_2 = 0,7 \cdot 10^4$ v/m, $E_3 = 5,6 \cdot 10^4$ v/m, $E_4 = 2,8 \cdot 10^4$ v/m.
 b) Určíme-li potenciál integrací příspěvků od jednotlivých řezů tyčinky a rozložíme integrál do řady podle mocnin r/l , najdeme přibližně $\varphi(0) = \frac{aR^4}{16\epsilon_0} \left[1 + 4 \ln \frac{l}{R} \right] = 2,3$ kV. c) Menší.

KAPITOLA 7

- 7.1 b) $c_1 = (\pi\epsilon_0)/\ln(d/r_0)$.
 c) Vedou-li vlákna kolmo k rovině x, y (obrázek), bude potenciál v bodě A
- $$\varphi = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} - \frac{\tau d}{2\pi\epsilon_0} R \frac{1}{z'}, \text{ kde } z = x + iy.$$



KAPITOLA 8

- 8.1 Ano.
- 8.2 $\Delta W = \Delta CU^2/2 = 4,1 \cdot 10^6$ J.
- 8.3 $\Delta W = \frac{(q_1 C_2 - q_2 C_1)^2}{2 C_1 C_2 (C_1 + C_2)} < 0$. Ke ztrátám energie, např. zahříváním, nedojde při $q_1 C_2 = q_2 C_1$.
- 8.4 a) Dipól můžeme považovat za dvojici opačných bodových nábojů separovaných malou vzdáleností Δl a najít jejich energii v elektrickém poli.
 b) $N = \rho \times E$.
 c) Energie při postupném umístění nábojů bude menší o $q^3/(4\pi\epsilon_0\rho)$, tj. o energii vzájemného působení nábojů tvořících dipól.
- 8.5 $W = -(q^2/2\epsilon_0 S) dx$.
- 8.6 Použijeme-li (8.22) $\Delta W = \frac{3}{5} \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$, odkud dostaneme poloměr pionu $a = 2 \cdot 10^{-16}$ m, tj. menší než poloměr jádra.
- 8.7 $W_1 = \frac{q_1^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{a-b}{ab}$, $W_2 = W_1 + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 b}$.

KAPITOLA 10

- 10.1 Bez komentáře.
- 10.2 a) $F = (C_0 U^2)/(1 + \epsilon) d = 7,1 \cdot 10^{-8}$ N (C_0 je původní kapacita).
 b) $P = \frac{\epsilon_{r-1}}{\epsilon_{r+1}} \frac{2\epsilon_0 U}{d} = 1,1 \cdot 10^{-8}$ C · m⁻²,
 c) Menší.

10.3 Bez komentáře.

10.4 Vrstva dielektrika se zpolarizuje s $P = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{r^3}$.

a) Povrchový náboj s hustotou $\sigma_p = P \cdot n$ je $Q_p = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{Q}{\epsilon_0}$.

b) Objemová hustota náboje $\rho_p = -\nabla \cdot P = 0$.

10.5 a) Bez komentáře. b) Práce vnějších sil $W = (\epsilon_r - 1) U_0 q_0 / 2$ je kladná.

10.6 Práce vykonaná elektrickými silami $W = (C_1 - C_2) U^2 / 2 = \pi \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) U^2 h / (\ln(b/a))$. Přirovnáme-li ji změně potenciální energie koaxiálního sloupce, dostaneme požadovaný výsledek.

10.7 Použijeme hraniční podmínky pro vektory E a D .

KAPITOLA 11

11.1 Viz úlohu 6.7.

11.2 $p = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 E / N = 2,4 \cdot 10^{-37} \text{ C} \cdot \text{m}$.

11.3 Použijeme-li vztah (11.21), bude polarizovatelnost klesat nepřímou úměrně teplotě. Určíme-li směrnici A přímky $\alpha(1/T)$, najdeme $p = \sqrt{3} \epsilon_0 k A = 2 \cdot 10^{-26} \text{ C} \cdot \text{m}$.

11.4 Vztah mezi α a α musí odpovídat minimu energie. V případě fetizku atomů kyslíku a titanu dostaneme elektrické pole v místě atomu kyslíku

$$E_0 = \frac{1}{8\pi a^3} (p_O A_1 + 8 p_{Ti} A_2), \text{ kde } A_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}, A_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} = 7 A_1 / 8.$$

Analogickou rovnici pro pole v místě atomů titanu dostaneme, zaměníme-li atom kyslíku a titanu.

Označme dále $\alpha_1 = 8\pi a^3 / A_1$. Má-li být fetizek atomů v rovnováze, musí platit, že $(\alpha_O - \alpha_1) E_O + 7 \alpha_{Ti} E_{Ti} = 0$, $7 \alpha_O E_O + (\alpha_{Ti} - \alpha_1) E_{Ti} = 0$. Tato soustava bude mít netriviální řešení, bude-li její determinant roven nule. To nám dá vztah mezi rozestupem a a polarizovatelnostmi, za jehož platnosti může nastat ferroelektrický stav.

11.5 Protože uvnitř každé kuličky nastane homogenní polarizace, bude každá kulička představovat dipólsmomentem $P_k = \frac{4\pi(\epsilon_k - 1)}{\epsilon_k + 2} \left(\frac{d}{2}\right)^3 \epsilon_0 E$ (ϵ_k je relativní permitivita skla).

Pro relativní permitivitu modelového dielektrika dostaneme $\epsilon_r = 1 + \frac{4\pi(\epsilon_k - 1)}{6^3(\epsilon_k + 2)}$.

KAPITOLA 12

12.1 Použijeme elektrostatickou analogii a najdeme potenciál ve středu koule. Pro teplotu dostaneme $T = W / (4\pi\kappa a) + T_0$.

12.2 V tomto modelu poloměr jádra Země $a = R_Z \sqrt{1 - \frac{8\pi\kappa T_0 R_Z}{W}} = 5870 \text{ km}$.

12.3 a) b_2, b_1 , b) c_1, c_1 .

12.4 Analogicky úloze 7.1 $T = -\frac{W}{2\pi\kappa l} \ln \frac{r_2}{r_1} + T_0$, kde r_1 a r_2 jsou vzdálenosti bodu v rovině x y od trubek. V uvedeném bodě $T = 20,5 \text{ }^\circ\text{C}$.

KAPITOLA 13

13.1 $B_x = 0, B_y = 2I / (\pi \epsilon_0 c^2 a) = 8 \cdot 10^{-5} T, f_x = -3I^2 / (4\pi \epsilon_0 c^2 a), f_y = I^2 / (4\pi \epsilon_0 c^2 a), f = 6,3 \cdot 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

13.2 $B(0) = (P_0 \omega a^2) / (4 \epsilon_0 c^2)$.

13.3 a) $B = (I\eta) / (2\pi \epsilon_0 c^2 a^2)$, b) $B = I / (2\pi \epsilon_0 c^2 \eta)$, c) $B = I(d^2 - r^2) / [2\pi \epsilon_0 c^2 (d^2 - b^2)r]$, d) $B = 0$.

13.4 Je-li délka úzké části trubice l_1 délka široké části l_2 a rozměr obrazovky D , lze přibližně odhadnout $B = m v_0 / [q, l_1 \sqrt{1 + (4l_2^2 / D^2)}]$, počet ampérvážitů na jednotku délky $nI = \epsilon_0 c^2 B$. B a nI by vzrostly.

13.5 a) Síla působící na obvod $F_r = \frac{w I l_1 l_2}{2\pi \epsilon_0 c^2 a(a+w)}$; stejná síla opačného směru působí na vodič. b) Nulový.

13.6 Magnetické pole lze najít pomocí Ampèrova zákona a principu superpozice jako $B = jd / 2 \epsilon_0 c^2$; míří kolmo na průvodič vedený z bodu na ose. Je zajímavé, že pole uvnitř celé dutiny je homogenní.

KAPITOLA 14

14.1 Míří-li osa x ve směru pohybu fólie, $A_x = -\sigma v z / (2 \epsilon_0 c^2), A_y = 0, A_z = 0, B_y = -\sigma v / (2 \epsilon_0 c^2), B_x = 0, B_z = 0$.

14.2 Jediný příspěvek k magnetické indukci pochází od polokružnice $B = I / (4 \epsilon_0 c^2 r)$.

14.3 a) $B_x = \frac{I a^2}{2 \epsilon_0 c^2} \left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r_2^3} \right)$, kde $r_{1,2} = \sqrt{a^2 + [(b/2) \mp x]^2}$. b) $B_x = \frac{I a^2}{\epsilon_0 c^2 r_0^3} \left[1 + \left(\frac{15 b^2}{4 r_0^4} - \frac{3}{r_0^2} \right) \frac{x^2}{2} \right]$, $r_0 = \sqrt{a^2 + b^2/4}$. c) $a = b$.

14.4 Bez komentáře.

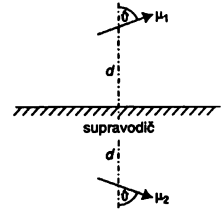
14.5 $B = \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \frac{I}{2 \epsilon_0 c^2}$.

14.6 Bez komentáře.

14.7 a) Na koncích vodiče délky a spojujícího nejkratší cestou osu a plášť válce se při rotaci válce v zemském magnetickém polu indukuje napětí $U = B \omega a^2/2$. Přitom magnetická indukce uvnitř nabitého rotujícího válce je $B = \lambda \omega / (2 \pi \epsilon_0 c^2)$. Odtud $U = \left(\frac{v}{c} \right)^2 \frac{\lambda}{4 \pi \epsilon_0}$.
b) Ne.

KAPITOLA 15

- 15.1 a) Normálová složka B je nulová.
b) Podobně jako v elektrostatice můžeme použít metodu zrcadlového zobrazení a pole najít jako superpozici polí dvou magnetických dipólů (viz obrázek).
c) $N = -\mu^2 \sin 2\theta / (32 \pi \epsilon_0 c^2 d^3)$, stabilní rovnovážná poloha při $\theta = \pi/2$ a $\theta = 3\pi/2$, nestabilní při $\theta = 0$ a $\theta = \pi$ (najdeme minima a maxima potenciální energie).
d) $F = 3 \mu^2 (3 \cos^2 \theta - \cos 2\theta) / (64 \pi \epsilon_0 c^2 d^4)$, odpudivá.



KAPITOLA 17

- 17.1 Podle (17.3) $E = -(r/2) dB/dt$ vytváří koncentrické kružnice. Elektron se urychluje z klidu se zrychlením $a = -(q_e r/2m) dB/dt$. V bodech P_1 a P_3 mají zrychlení velikost $4,4 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ a opačný směr, v bodě P_2 je zrychlení nulové.
- 17.2 $\mathcal{E} = -d\Phi/dt = (1/2) B \pi r^2 \omega \sin \omega t$, $I = \mathcal{E}/R_M$.
- 17.3 Malé smyčky budou vytvářet pole jako magnetické dipóly. Indukované napětí $\mathcal{E} = -d\Phi/dt = (2 I \pi^2 a^4 \omega/R^3) \sin \omega t$.
- 17.4 a) $v(\theta) = (IBd/m)t$; b) Při ustáleném pohybu $v = \mathcal{E}_G/BD$, dosáhne, pohyb v případě a) je rovnoměrně zrychlený; c) $I = 0$.
- 17.5 $L = L_1 + L_2 - 2M$, $L = L_1 + L_2 + 2M$.
- 17.6 a) Určíme magnetickou indukci mezi válci, dále magnetickou energii na jednotku délky válce a přirovnáme ji výrazu $w_l = L_1 I^2/2$.
b) $L_1 = [\ln(b/a) + (1/4)]/2 \pi \epsilon_0 c^2$.
- 17.7 a) Bez komentáře. b) Určíme magnetický indukční tok vyvolávaný vodičem a procházející průřezem toroidu. Pak $M = (Na/2 \pi \epsilon_0 c^2) \ln [1 + a/\theta]$. c) $L/M = N$.
- 17.8 Smyčky se chovají jako magnetické dipóly. a) $M = \pi^2 a^4 [\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - 3 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2] / (4 \pi \epsilon_0 c^2 r^3)$.
b) Sílu mezi smyčkami určíme jako $F = -I^2 \nabla M$. Složka ve směru spojnice smyček $F_1 = k[\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - 3 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2]$, složka kolmá na spojnici $F_2 = k \sin(\alpha_1 + \alpha_2)$, $k = (3 \pi^2 a^4 I^2) / (4 \pi \epsilon_0 c^2 r^4)$. c) Při změně směru proudu ve smyčce se změní orientace dipólu na opačnou.
- 17.9 Magnetická indukce uprostřed solenoidu konečné délky l je $B = IN/2 \epsilon_0 c^2 r_2 [1 + (l/2r_2)^2]^{1/2}$. Odtud určíme indukční tok malou smyčkou a najdeme $M = B \pi r_1^2/l$.
- 17.10 $I = Bv/R = 1 \text{ mA}$. Proud klesne. Bude-li se magnet pohybovat, bude velikost proudu táž, vlastní indukčnost obvodu bude klesat.
- 17.11 (viz též úlohu 17.8)
a) Je-li závit natočen tak, že jeho normála svírá se spojnicí středů obou závitů úhel θ , máme $M = -(\pi a^4 \cos \theta) / (\epsilon_0 c^2 d^3)$, odtud určíme proud indukovaný v závitě B a silový moment $N = I_A I_B \partial M / \partial \theta = (4 \pi^4 a^8 K^2 t^3 \sin 2\theta) / [(4 \pi \epsilon_0 c^2)^2 d^6 R]$, pro $\theta = 0$ nulový.
b) Přitahují se.
c) Síla i moment síly se zmenší. d) Změní-li se θ z 0 na $\pi/2$, bude moment síly v obou případech nulový, síla bude při $\theta = \pi/2$ rovněž rovna nule.

KAPITOLA 20

- 20.1 a) Bez komentáře. b) V kladném směru. c) Operátor $\partial/\partial t$ odpovídá násobení $i\omega$. d) $\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{E} = 0$, $\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{B} = 0$, $\mathbf{x}_0 \times \mathbf{E} = (\omega/k) \mathbf{B}$, $\mathbf{x}_0 \times \mathbf{B} = -(\omega/kc^2) \mathbf{E}$, $\omega = ck$. e) Vlna se šíří v záporném směru x .
- 20.2 Z podmínky spojitosti tečné složky intenzity elektrického pole na povrchu zrcadla pro dopadající a odraženou vlnu $k = \omega/c$, $k' = \omega'/c$, $x = vt$, odkud $\omega' = \omega(1 - v/\partial)/(1 + v/\partial)$.

KAPITOLA 21

- 21.1 Vyjdeme z rovnic (21.18), (21.25) a potenciálů φ, A , najdeme $\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \partial A / \partial t$.

21.2 Bez komentáře.

21.3 Ve výrazu pro elektrické pole z úlohy 21.2 nahradíme $\rho \rightarrow \pi a^2 I$.

21.4 a) Vyjádříme pomocí da $d\ell$, upravíme kosiny podle součtových vzorců a rozložíme do řady.

b) Bez komentáře.

c) Vyjádříme elektrické a magnetické pole pomocí potenciálů a porovnáme je s polem z úlohy 21.2; pro magnetické pole $\mathbf{B} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{E}/c$.

21.5 a) Pro proud I musíme psát $I = d p_{\ell} / dt$, kde p_{ℓ} je dipólový moment jednotky délky antény. Integrací dostaneme požadovaný výraz.

b) Vektorový potenciál určíme jako $A_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \int_{\lambda/4}^{\lambda/4} I_0 \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right) \sin\left[\omega\left(t - \frac{r'}{c}\right)\right] dz$, kde $r' = (r^2 + z^2 - 2rz \cos \vartheta)^{1/2}$. Pro $r \gg \lambda/2$ po úpravě

dostaneme $A_z = \frac{2I_0}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\cos[(\pi/2)\cos\vartheta] \sin[\omega(t-r'/c)]}{k \sin^2 \vartheta}$ a dále můžeme postupovat jako v úloze (21.4. c).

c) Máme porovnat křivky $F(\vartheta) = \frac{\cos[(\pi/2)\cos\vartheta]}{\sin \vartheta}$ a $F(\vartheta) = \sin 2\vartheta$.

21.6 a) $\varphi = q/(4\pi\epsilon_0 a)$,

b) $A = q\mathbf{v}/(4\pi\epsilon_0 c^2 a)$, kde $v'(t) = v(t-a/c)$, $v'_x = -v \sin(\omega t - v/c)$, $v'_y = v \cos(\omega t - v/c)$.

c) Abychom mohli určit pole ve středu kružnice, musíme najít potenciály v blízkém okolí. Najdeme $E_x = (q/4\pi\epsilon_0 a^2) [(v^2/c^2 - 1) \cos(\omega t - v/c) - (v/c) \sin(\omega t - v/c)]$, E_y stejné se zápornou sin. Při $t=0$ je $E_x < 0$, $E_y < 0$ (E_y je řádově v/c , pole nemění z bodu P do centra). $B_z = qv/(4\pi\epsilon_0 c^2 a^2)$, magnetické pole na čase nezávisí.

KAPITOLA 22

22.1 Odpor mezi sousedními vrcholy $7/2\Omega$, mezi protějšími vrcholy stěnové úhlopříčky $3/4\Omega$, mezi protějšími vrcholy tělesové úhlopříčky $5/6\Omega$.

22.2 a) $I = \left[\mathcal{E}_0 (1 - \omega^2 LC) \sin \omega t \right] / \left[\omega L (2 - \omega^2 LC) \right]$,

b) $I = \left[\mathcal{E}_0 (1 - \omega^2 LC) \sin \omega t \right] / \left[\omega (L + M) [2 - \omega^2 C(L - M)] \right]$.

22.3. Bez komentáře.

22.4 V komplexním zápisu $\hat{U}_{AB} = U_0(z/z^*) e^{i\omega t}$, kde $z = R + i/\omega C$ a z^* je komplexně sdružená impedance. Při nízkých frekvencích je napětí U_{AB} přibližně ve fázi se zdrojem, při vysokých frekvencích v protifázi (srůstem frekvence fáze U_{AB} klesá od 0 do $-\pi$). Při vysokých frekvencích klesne svorkové napětí zdroje na $5/6$.

22.5 a) Jde o paralelní rezonanční obvod s minimem proudu na rezonanční frekvenci $\omega = 1/\sqrt{LC}$ rovném $I_{\min} = \mathcal{E}_0/R$.

b) Definujeme-li šířku rezonanční křivky na úrovni dvojnásobku minima čtverce proudu, dostaneme $\Delta\omega = 1/\sqrt{RC}$ (u sériového obvodu $\Delta\omega = 1/\sqrt{RL}$).

Pro $R = K\sqrt{L/C}$ u paralelního a $R = (1/K)\sqrt{L/C}$ u sériového obvodu v obou případech poměr šířky rezonanční frekvence je $1/K$.

22.6 $L = CR^2$.

22.7 Bez komentáře.

22.8 a) Za uvedených podmínek je impedance obvodu $Z = R$. b) $\varphi = \arctg(\omega L/R)$.

22.9 1. Střední výkon $P = (1/2) R I_0^2 = R U_0^2/2 [R^2 + (\omega L - (m/\omega C))^2]$.

2. a) $m = 2$, b) 100 V.

KAPITOLA 23

23.1 V daném přiblížení můžeme mít za to, že zúžená část dutiny tvoří kondenzátor o kapacitě $C = \epsilon_0 \pi a^2 d$ a toroidální část cívku s indukčností $L = [(b-a)/2\pi\epsilon_0 c^2] \ln(b/a)$, takže rezonanční frekvence $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Pozn. Indukčnost můžeme určit z výrazu pro energii magnetického pole $W_m = (1/2) L I^2 = (\epsilon_0 c^2/2) \int B^2 dV$, $B = I/(2\pi\epsilon_0 c^2 r)$.

KAPITOLA 24

24.1 Bez komentáře.

24.2 Určíme magnetickou indukci mezi pásky jako mezi nekonečnými proudovými rovinami, dále magnetickou energii a indukčnost na jednotku délky $L_\ell = a/(\epsilon_0 c^2 b)$. Kapacita na jednotku délky $C_\ell = \epsilon_0 b/a$.

24.3 a) Z hraničních podmínek na koncích dutiny pro stojatou vlnu ve směru osy z $\sin(\pi z/\ell) = 0$ dostaneme úhlovou frekvenci $\omega_0 = \pi c/\ell$.

b) Radiální $E_r = \sin(\pi z/\ell)/r$.

c) Pro nekonečné koaxiální vedení $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = c/\ell$ (viz úlohy 6.5, 17.6).

24.4 Z hraničních podmínek $E_\vartheta(x, z) = A \sin(\pi x/a) \sin(\pi z/\ell)$ a podle vlnové rovnice $\omega = \pi c \sqrt{(1/a^2) + (1/\ell^2)}$.

24.5 a) $U_x = U_0 \sin(\omega t - kx + k\ell/2 \sin(k\ell))$, U_0 se liší znaménkem u $k = \omega/c$.

b) $U = U_x + U_0 \cos(\omega x/\ell) \cos \omega t$, maximální amplituda při $x=0$, $2\ell/5$, $4\ell/5$,

c) Podle vztahu (24.1) $I=0$, $-U_0 \sqrt{C_0/2} I_0 \sin \omega t$, $U_0 \sqrt{C_0/2} I_0 \sin \omega t$. d) Je nulový.

24.6 Najdeme napětí a proud v podobě superpozice dopadající a odražené vlny s příslušnými hraničními podmínkami.

a) $Z_r = i Z_0 \operatorname{tg}(\omega l / LC)$, b) $Z_r = -i Z_0 / \operatorname{tg}(\omega l / LC)$, c) $Z_r = Z_0$, vedení je přizpůsobeno.

24.7 Bez komentáře.

24.8 a) Je třeba určit složky E a B . b) k_z je imaginární.

KAPITOLA 25

25.1 $A_\mu A_\mu, -A_\mu j_\mu, \mu = 1, 2, 3, 4$.

25.2 Ze zákonů zachování energie a hybnosti dostaneme $\hbar\omega = \hbar\omega_0 / [1 + \hbar\omega_0(1 - \cos\theta) / m]$.

25.3 $\hbar\omega = 4 m_e = 2,04 \text{ MeV}$.

25.4 $m' = (m^2 + M^2 + 2mM/\sqrt{1-v^2})^{1/2}$, $v' = Mv / [M + m\sqrt{1-v^2}]$, $p' = m'v' / \sqrt{1-v'^2}$; v nerelativistickém případě $m' = m + M$, $v' = Mv / (M + m)$, $p' = m'v'$.

KAPITOLA 26

26.1 $\nabla_\mu F_{\mu\nu} = j_\nu / \epsilon_0$ (j_ν je čtyřproud).

26.2 $f_\mu = F_{\mu\nu} j_\nu$; časová složka je hustota výkonu elektrického pole, prostorové složky udávají sílu působící na náboje v jednotce objemu.

26.3 Viz tabulku 26.2. Oba invarianty jsou nulové u elektromagnetické vlny ve vakuu, kdy vektory E a B jsou navzájem kolmé.

26.4 Vybereme soustavu S' tak, aby se pohybovala ve směru osy x rychlostí v a vektorový součin $E' \times B'$ v ní byl nulový. Použijeme-li Lorentzovu transformaci a podmínku $E'_x = B'_x = 0$, dostaneme $v / (1 + v^2) - (E \times B)_x / (E^2 + B^2)$.

26.5 Pohybuje-li se částice ve směru osy x a svírá-li průvodič daného bodu úhel θ , dostaneme z Lorentzovy transformace $E = \Gamma q r / (4\pi\epsilon_0 r^3)$, $B = \Gamma q (v \times r) / (4\pi\epsilon_0 c^2 r^3)$, $\Gamma = (1 - v^2)^{-1/2} / (1 - v^2 \sin^2 \theta)^{3/2}$.

26.6 Viz úlohu 26.5.

26.7 a) Podle podmínky úlohy bude elektrické pole nulové a koncentrické magnetické pole $B = I / 2\pi\epsilon_0 c^2 r$.

b) $E' = (v \times B) / \sqrt{1 - v^2}$, $B' = B / \sqrt{1 - v^2}$.

26.8 a) Elektron je přitahován k rovině silou $q\sigma / 2\epsilon_0$ a odpuzován druhým elektronem silou $q^2 / \sqrt{1 - v^2} / (16\pi\epsilon_0 a^2)$ (přetrafovali jsme výraz pro elektrickou sílu do laboratorní soustavy). Hledaná hodnota $\sigma = q\sqrt{1 - v^2} / (8\pi a^2)$.

b) Poměr obou hodnot odpovídá poměru klidové energie elektronu k jeho energii, tj. 10^{-3} .

26.9 $f_\mu u_\mu = u_\mu d p_\mu / ds = (m/2) d(u_\mu^2) / ds = 0$ (neboť $u_\mu^2 = 1$). Čtyřsíla a čtyřrychlost jsou „čtyřkolmé“.

26.10 Úloha je trochu zavádějící, pole v bodě P okamžiku t_1 je při dané rychlosti dáno pohybem částice podél osy x . Použijeme-li vztahy (26.2), (26.3), (26.6), dostaneme $E_x = E'_x = 0$, $E_y = q / [2\sqrt{3}\pi\epsilon_0 a^2]$.

KAPITOLA 27

27.1 $\nabla \times (A \times B) = A(\nabla \cdot B) - B(\nabla \cdot A) + (B \cdot \nabla)A - (A \cdot \nabla)B$, $\nabla \times (A \cdot B) = A \times (\nabla \times B) + B \times (\nabla \times A) + (A \cdot \nabla)B + (B \cdot \nabla)A$.

27.2 Z údajů o B , na rovníku určíme velikost magnetického dipólového momentu Země a zintegrujeme energii magnetického pole vně Země s výsledkem $W_m = 4\pi\epsilon_0 c^2 B^2 R^3 / 3 = 1000 \text{ Mt}$. Nemůže.

27.3 $S = (\epsilon_0 c^2 R_0) I \times B$, tok energie povrchem úseku vodiče jednotkové délky je $R_0 I^2$, tj. je roven ohmickým ztrátám.

27.4 Rychlost toku energie najdeme jako podíl velikosti Poyntingova vektoru a hustoty energie jako $v = 2R / (R^2 c_1 + L)$, kde c_1 a L jsou kapacita a indukčnost připadající na jednotku délky kabelu. Je-li zátěž $R = \sqrt{L_1 / C_1}$ přizpůsobena, $v = (1 / L_1 C_1)^{1/2} = c$.

27.5 a) Použijeme-li zrcadlové zobrazení čtvrtvlnové antény nad vodivým povrchem, můžeme použít pole z úlohy 21.5. Je-li P střední výkon vysílačky, bude velikost Poyntingova vektoru $S = 3P / (4\pi r^2) = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$

b) $E_0 = [3P / (2\pi\epsilon_0 c r^2)]^{1/2}$, $B_0 = [3P / (2\pi\epsilon_0 c^2 r^2)]^{1/2}$.

27.6 a) Bez komentáře.

b) $S = \epsilon_0 c^2 E \times B$, $w = (\epsilon_0 / 2) (E^2 + c^2 B^2)$, kam dosadíme za E a B .

c) $\epsilon_0 c^2 k E_0^2 / 4\omega$. d) $\epsilon_0 E_0^2 / 4$. e) $[1 - \pi^2 c^2 / (a^2 \omega^2)]^{1/2} c$.

27.7 a) $S = (\rho^2 \omega^4 \sin^2 \theta \cos^2 \omega t) / (16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2)$ (viz též 21.23)

b) Bez komentáře.

27.8 Z pohybové rovnice určíme dipólový moment elektronu, dále Poyntingův vektor, diferenciální tok energie vyzářované v prostorovém úhlu $d\Omega$ diferenciální průřez rozptylu vlny na elektronu a výsledný poměr $\sigma = (8\pi/3) [q^2 / (4\pi\epsilon_0 m c^2)]^2$.

27.9 Příklad 34.9, 1. díl. Součinn konstant $\kappa M_S = Rv^2$, kde R je vzdálenost Země od Slunce a v oběžná rychlost Země.

- 27.10 a) $B = (NK\dot{\theta}) / (2\pi\epsilon_0 c^2 R)$, $W = r^2 N^2 K^2 (\dot{\theta}^2 + r^2/2 c^2) / (4\epsilon_0 c^2 R)$
 b) $S = (N^2 K^2 r \dot{\theta}) / (8\pi^2 \epsilon_0 c^2 R^2)$, kolmý k povrchu, míří dovnitř toroidu.
 c) Pohlcovaný výkon $P = (N^2 K^2 \pi r^2 \dot{\theta}) / (2\pi\epsilon_0 c^2 R)$.

KAPITOLA 28

- 28.1 $r_e = 3e^2 / (5m_e c^2) = 1,69 \cdot 10^{-15} \text{ m}$, $r_e = e^2 / (2m_e c^2) = 1,41 \cdot 10^{-15} \text{ m}$.
 28.2 a) Bez komentáře.
 b) $L/\mu = m/q$, je-li $m = 2e^2 / (3c^2 a)$.
 c) $v_{\max} = 9c/4\alpha$, větší než c , což ukazuje na neoprávněnost klasického modelu spinu (viz též úlohu 14.6).

KAPITOLA 29

- 29.1 a) $v_x = (c q E \dot{\theta}) / \sqrt{m^2 c^2 + (q E \dot{\theta})^2}$, $x = (c/qE) (\sqrt{m^2 c^2 + (q E \dot{\theta})^2} - m c)$
 b) Označíme-li $\beta_0 = m v_0 / \sqrt{1 - v_0^2/c^2}$, bude $v_x = (c q E \dot{\theta}) / \sqrt{m^2 c^2 + \beta_0^2 + (q E \dot{\theta})^2}$, $v_y = (\beta_0 / q E \dot{\theta}) v_x$.
 29.2 $\omega_c = (qB/m) \sqrt{1 - v^2/c^2}$, vzroste-li energie o 1 %, klesne cyklotronová frekvence také o 1 %.
 29.3 a) $x = (qE/m\omega^2) (\omega t - \sin \omega t)$, $y = (qE/m\omega^2) (1 - \cos \omega t)$, $\omega = qB/m$, pohyb po cykloidě, $E/B \ll c$.
 c) $B > \sqrt{(2mc^2 E) / (q d)}$.
 29.4 a) $l = f(f - d) / d$, b) obraz bude skutečný pro $f > d$.

KAPITOLA 32

- 32.1 Bude. Plyne to z Maxwellových rovnic, pokud pole nejsou natolik silná, aby nastaly nelineární jevy.
 32.2 $N = m\epsilon_0 \omega_p^2 / q_e^2 = 1,1 \cdot 10^{10} \text{ m}^{-3}$.
 32.3 Dosadíme driftovou rychlost (32.39) do pohybové rovnic se středním polem a dostaneme $v_{\theta} = (qE/m) \tau e^{-t/\tau}$.
 32.4 a) $B_x = B_z = 0$, $B_y = (k/\omega) E_0 e^{i(\omega t - kz)}$. b) Pravý. c) $-\pi/4$.
 32.5 Přesnější bude použít komplexní index lomu (32.42).

KAPITOLA 33

- 33.1 a) $I_T = 16 n_1^2 n_2^2 [(n_1 + n_2)^2 (n_2 + n_3)^2 + (n_1 - n_2)^2 (n_2 - n_3)^2 + 2(n_1^2 - n_2^2)(n_2^2 - n_3^2) \cos(2n_2 \omega l / \theta)]^{-1}$
 b) Bez komentáře.
 c) $\lambda/4 n_2 = 120 \text{ nm}$.
 d) Ano, nezáleží.
 33.2 Viz odst. 33.6. Zapišeme hraniční podmínku pro intenzitu elektrického pole pro vlnu dopadající, odraženou a pro exponenciálně klesající pole postupující z hranolu do vakuu pod úhlem γ , kde $\sin \alpha / \sin \gamma = n$. Protože nás zajímá kolmá vzdálenost, na níž pole za delší stranu hranolu pronikne, určíme $\cos \gamma = \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \alpha} = -0,53$ i. Intenzita pole klesne e-krát na vzdálenosti $x = \lambda / (2\pi \cdot 0,53) \approx 130 \text{ nm}$. Nezmění.

KAPITOLA 34

- 34.1 Proměnné magnetické pole indukuje elektrické pole $E = -(R/2) dB/dt$. Moment hybnosti částice $J = pR = qBR^2$ ($R = p/qB$, kde p je hybnost). Protože $dp/dt = qE$, dostaneme $(1/J) dJ/dt = -(1/2B) dB/dt$. Magnetické pole se musí měnit pomalu ve srovnání s oběžnou dobou částice.

KAPITOLA 35

- 35.1 Je-li ω_p úhlová frekvence jaderné magnetické rezonance a T perioda oběhu, platí $\omega_p = 2\pi f_p$, $B = 2\pi m/qT$, $q = 2m\omega_p/qB = 2f_p T = 5,46$.
 35.2 Klasická fyzika pouze nemůže zdůvodnit existenci spinu.
 35.3 Podle vzorce (35.21) při pokojové teplotě bude zorientováno 0,23 % spinů, při teplotě kapalného helia 15,9 %.
 35.4 $M = (2/3) N \mu_0^2 B / kT$ (srovnej s 35.22).

KAPITOLA 36

- 36.1 Po povrchu koule by musely protékat plošné proudy o hustotě $j_p = M \sin \theta$, kde M je magnetizace a θ úhel, který svírá průvodič se směrem magnetického dipólu.

- 36.2 Použijeme Stokesovu větu a podmínky na hranicích štěrbin. Najdeme lineární vztah mezi magnetickým polem v štěrbině a polem v jádru magnetu. Použijeme-li vztah mezi H a B na obrázku, můžeme odhadnout pole v štěrbině na 1,17 T.
- 36.3 Je-li S_1 průřez magnetu a S_2 průřez štěrbin, bude platit $B_1 S_1 = B_2 S_2$.
Po vypnutí proudu bude cirkulace H magnetickým obvodem nulová a $H_1 l_1 + H_2 l_2 = 0$ (l_1 je délka magnetu, l_2 šířka štěrbin). Odtud $4H_1 + B_1 = 0$, $M = -(5/\epsilon_0 c^2) H_1$. Spolu s magnetizační křivkou na obrázku dostaneme $B_1 = -0,16$ T, $B_2 = 0,8$ T.

KAPITOLA 38

- 38.1 Použijeme vztah (38.42) a najdeme $R_{\text{hlinik}}/R_{\text{ocel}} = (E_{\text{ocel}}/E_{\text{hlinik}})^{1/4} = 1,32$.
Poměr hmotností hliníkové a ocelové tyče je přibližně 0,6.
- 38.2 Z pohybové rovnice dostaneme $\omega = (a^2/2)\sqrt{E/L^3 m}$.
- 38.3 Bez komentáře.
- 38.4 a) $y(x) = K \sin(\pi x/l)$, $K = (2/\pi)\sqrt{(L-l)} = 34,2$ nm (slabý průhyb).
b) Přibližně 15 N.
- 38.5 Viz odstavec 38.5. Pro malé odchylky ϑ sestavíme rovnici $d^2\vartheta/ds^2 + F/(IE)\vartheta = 0$ a z hraničních podmínek dostaneme kritickou (Eulerovu) sílu $F_E = \pi^2 IE/4L^2$, $I = di^3/12$.

KAPITOLA 40

- 40.1 a) Souvisí to s tím, že v nevažké tekutině nejsou tečná napětí a má-li být síla vždy kolmá k libovolně vybrané plošce, musí být tlak ve všech směrech stejný.
b) Plyne z posledního vztahu úlohy (27.1).
- 40.2 Z pohybové rovnice částice a podmínky nulového (resp. atmosférického) tlaku na hladině dostaneme rovnici rotačního paraboloidu $z = \omega^2(x^2 + y^2)/2g$.
- 40.3 Viz odst. 12.5 (přejdeme do soustavy, v níž je koule v klidu a je obtékána kapalinou. Pro rychlostní pole využijeme řešení úlohy 27.2). $P = mv$.

KAPITOLA 41

- 41.1 $[F] = [a]^\alpha [v]^\beta [\eta]^\gamma$, $MLT^{-2} = M^\alpha L^{\alpha+\beta+\gamma} T^{-\beta-\gamma}$, $F = \text{konst } \eta a v$ (Stokesova síla $6\pi\eta a v$).
- 41.2 Řešíme stacionární Navierovu-Stokesovu rovnici pro laminární proudění $\nabla^2 v_x = -\Delta p/\eta L$ (Δp je tlakový spád na délce L) s hraniční podmínkou nulové rychlosti na stěně. Objemový průtok $Q = \pi a^4 \rho \Delta p / 8 \eta L$ (Poiseuilleův zákon), „odpor“ trubice $R = \Delta p/Q$. Analogii kondenzátoru by bylo možno vytvořit pomocí dvou spojených nádob, v nichž by se kapalina o různé výšce hladiny mohla přelévat z jedné do druhé.
- 41.3 Rychlost kapaliny mezi deskou a dnem se bude měnit jako $v = uy/d$ (měříme od dna bazénu). Síla tření působící na jednotkovou plochu desky je $\eta u/d$ a hustota disipovaného výkonu $\eta u^2/d^3$.

REJSTŘÍK VYBRANÝCH POJMŮ A JMEN

- A**
Aharonov 274
akce 334
Ampér 228, 327, 663
Ampérův zákon 230
antiferoelektrika 203
antiferomagnetická 699
- B**
Bader 331, 343
Barkhausenův jev 696
Bernoulliho věta 747
Bessel 426
betatron 298
Biotův-Savartův zákon 256
Bohm 274
Bohr 85
Bohrův magneton 642, 656
Bopp 519
Bom 518
bouřková buňka 164
- C**
cirkulace 19
Clausiova-Mosottioho rovnice 197, 598
Cooper 793
Coulombův zákon 65
Curieova teplota 680
Curieův zákon 193
Curieův-Weissův zákon 201
- Č**
čtyřdivergence 464
čtyřgradient 464
čtyřhybnost 461
čtyřpotenciál 466
čtyřproud 466
čtyřrychlost 459
čtyřsílka 488
čtyřvektor 458
- D**
Debyeova délka 134
deformace 703
dielektrika 174
difúze 55
Dirac 518
dislokace 554
doména 691
- E**
Einstein 786
ekvipotenciální plochy 79
elektret 198
elektrická síla 224
elektrická susceptibilita 179
elektrické pole 15
elektrický dipólový moment 102
elektrický proud 226
elektrický tok 18
elektromagnetická indukce 281
elektromotorické napětí 283
elektronová polarizace 188
elektrostatická čočka 532
elektrostatický potenciál 70
- F**
Faraday 174, 281, 290, 327
Faradayův zákon 295
fázová rychlost 445
ferity 700
feroelektrika 199
feromagnetismus 661
Feynman 519
Franklin 91
- G**
Gauss 52, 282, 669
Gaussův zákon 76
Geiger 85
Gerlach 648
grupová rychlost 445
- H**
Heisenberg 343
Helmholtz 754
Hess 160
Hookův zákon 703
hybnostní spektrometr 529
hysterezní křivka 672
- I**
impedance 392
Infeld 518
iontová polarizovatelnost 199
iontová vazba 545
- J**
jademé síly 148
- K**
kapacita 114
Kármánova vírová cesta 767
klasický poloměr elektronu 514
koeficient absorpce 600
kondenzátor 114
konduktivita 603
kovalentní vazba 545
krystalová mřížka 547
kvadrupólová čočka 538
- L**
Lagrangeova funkce 341
Lamb 92
Lamého konstanty 727
Landého faktor 633
Larmorova věta 637
látky diamagnetické 630
látky paramagnetické 630
Laughton 92
Lenzovo pravidlo 285
Liénard 383
Liénard-Wiechertovy potenciály 383
Lorentz 384, 514
Lorentzova podmínka 467
Lorentzova síla 225
Lorentzova transformace 457
- M**
Machovo číslo 766
magnetická čočka 532
magnetická síla 224
magnetická susceptibilita
magnetické pole 15
magnetický dipólový moment 253
magnetický náboj 229
magnetizace 653
magnetizační křivka 672
magnetron 541
magnetostrikce 692
Marsden 85
Maxwell 295, 318, 327, 513
Maxwellovy rovnice 37, 317
McCullough 24
mezní frekvence 444
mezní vrstva 769
měrná tepelná kapacita 54
mod vlnovodu 450
modul objemové pružnosti 706

modul pružnosti ve smyku 708
molekulový krystal 546
Mössbauerův jev 789
Mueller 119

N

napětí 703
von Neumann 217, 744

O

Oersted 327, 669

P

permalloye 698
permeabilita 673
permitivita 182
piezoelektrický efekt 588
piezoelektrina 199
plazmová úhlová frekvence 131
Plimpton 92
Poincaré 515
Poissonův poměr 704
polarizační náboj 178
polarizovatelnost atomu 189
Poynting 498, 513
Poyntingův vektor 498
princip superpozice 15
princip ekvivalence 785
přenosové vedení 436
pyroelektrina 199

R

Rabi 649

relativní permitivita 174
Retherford 92
Reynoldsovo číslo 765
rezonanční mod 433
rovnice difúze tepla 55
Rutherford 85

S

samoindukce 285
samoindukčnost 307
Schrödinger 343
siločáry 78
skinové vrstvy 605
Snellův zákon 610
Stem 648
Stokes 58, 767
střížné vlny 713
stupňovitý vůdčí výboj 172
supravodič 286
synchrotron 299, 540

T

tenzor 482
tenzor deformace 587, 721, 724
tenzor energie 589
tenzor hybnosti 589
tenzor napětí 582
tenzor polarizovatelnosti 574
tenzor pružnosti 725
tenzor setrvačnosti 580
Thomson 85
točivé magnetické pole 289
torzní vlny 712

U

úplný vnitřní odraz 625

V

Van Allenovy pásy 541
vektor elektrické polarizace 178
vektorový potenciál 243
víratost 746
viskozita 740, 758
vinovod 440
vylučovací princip 686
výměnná síla 686
vzájemná indukčnost 305
vztlaková síla 754

W

Weber 282
Weiss 682
Wheeler 519
Wiechert 383
Wilson 170

Y

Youngův modul pružnosti 703
Yukawa 524
Yukawův potenciál 525



Kompletní vydání světově
proslulého kurzu fyziky
Richarda P. Feynmana.

- | | |
|--------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| 1 ELEKTROMAGNETIZMUS | 21 ŘEŠENÍ MAXWELLOVÝCH ROVNIC
S PROUDY A NÁBOJI |
| 2 DIFERENCIÁLNÍ POČET
VEKTOROVÝCH POLÍ | 22 STŘÍDAVÉ OBVODY |
| 3 INTEGRÁLNÍ POČET
VEKTOROVÝCH POLÍ | 23 DŮTINOVÉ REZONÁTORY |
| 4 ELEKTROSTATIKA | 24 VLNOVODY |
| 5 POUŽITÍ GAUSSOVA ZÁKONA | 25 ELEKTRODYNAMIKA
V RELATIVISTICKÉM ZÁPISU |
| 6 ELEKTRICKÉ POLE V RŮZNÝCH
PŘÍPADECH | 26 LORENTZOVY TRANSFORMACE POLÍ |
| 7 ELEKTRICKÉ POLE V RŮZNÝCH
PŘÍPADECH (POKRAČOVÁNÍ) | 27 ENERGIE POLE A HYBNOST POLE |
| 8 ELEKTROSTATICKÁ ENERGIE | 28 ELEKTROMAGNETICKÁ HMOTNOST |
| 9 ELEKTŘINA V ATMOSFÉŘE | 29 POHYB NÁBOJŮ V ELEKTRICKÉM
A MAGNETICKÉM POLI |
| 10 DIELEKTRIKA | 30 VNITŘNÍ GEOMETRIE KRYSTALŮ |
| 11 VNITŘNÍ STAVBA DIELEKTRIK | 31 TENZORY |
| 12 ANALOGIE ELEKTROSTATIKY | 32 INDEX LOMU OPTICKY
HUSTÝCH LÁTEK |
| 13 MAGNETOSTATIKA | 33 ODRAZ OD PLOCHŮ |
| 14 MAGNETICKÉ POLE V RŮZNÝCH
PŘÍPADECH | 34 MAGNETIZMUS LÁTEK |
| 15 VEKTOROVÝ POTENCIÁL | 35 PARAMAGNETIZMUS A MAGNETICKÁ
REZONANCE |
| 16 INDUKOVANÉ PROUDY | 36 FEROMAGNETIZMUS |
| 17 ZÁKONY ELEKTROMAGNETICKÉ
INDUKCE | 37 MAGNETICKÉ LÁTKY |
| 18 MAXWELLOVY ROVNICE | 38 PRUŽNOST |
| 19 PRINCIP NEJMENŠÍ AKCE | 39 PRUŽNÉ LÁTKY |
| 20 ŘEŠENÍ MAXWELLOVÝCH ROVNIC
VE VOLNÉM PROSTORU | 40 PROUDĚNÍ „SUŠÉ VODY“ |
| | 41 PROUDĚNÍ „MOKRÉ VODY“ |
| | 42 ZAKŘIVENÝ PROSTOR |

ISBN 80-7200-420-4



9 788072 004204